Atti della R. Accademia delle scienze di Torino

Reale accademia delle scienze di Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

— 26

VOLUME VIGESIMOSESTO

1890 - 91

—

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1891

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

VOLUME VIGESIMOSESTO

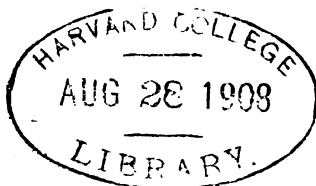
1890 - 91

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1891

Digitized by Google

ELENCO DEGLI ACCADEMICI

RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, STRANIERI E CORRISPONDENTI

al 1° Marzo 1891

PRESIDENTE

LESSONA (Michele), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore e Direttore del Museo di Zoologia della R. Università di Torino, Socio delle RR. Accademie di Agricoltura e di Medicina di Torino, Comm. ✱ e ⊖.

VICE-PRESIDENTE

FABRETTI (Ariodante), Senatore del Regno, Professore di Archeologia greco-romana nella Regia Università, Direttore del Museo di Antichità, Socio Corrispondente dello Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Membro effettivo delle RR. Deputazioni di Storia patria della Emilia, della Toscana, delle Marche e dell'Umbria, Socio onorario della Società Veneta di Storia patria, Socio Nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Membro corrispondente del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia di Archeologia, Letteratura e Belle Arti di Napoli, della R. Accademia della Crusca, dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia de la Historia di Madrid, dell'Imp. Istituto Archeologico Germanico. Professore Onorario dell'Università di Perugia, Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✱, Comm. ⊖; ✠, Cav. della Leg. d'O. di Francia, e C. O. della Rosa del Brasile.

TESORIERE

BRUNO (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Professore di Geometria descrittiva nella R. Università di Torino, ✱, ⊖.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Cossa (Alfonso), Dottore in Medicina. Direttore della Regia Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, Professore di Chimica docimastica nella medesima Scuola, e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, Socio ordinario non residente dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino e Socio dell'Accademia Gioenia di Catania, Socio effettivo della Società Imperiale mineralogica di Pietroburgo, Comm. ✤, ⊖, e dell'O. d'Is. Catt. di Sp.

Segretario

Basso (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche e matematiche, Prof. ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, ⊖.

Digitized by Google

Accademici residenti.

Lessona (Michele), *predetto*.

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, e della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; Membro effettivo della Società imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio straniero dell'*American Ornithologist's Union* e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ⊜, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), *predetto*.

Bruno (Giuseppe), *predetto*.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano, e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Gr. Uffiz. ⊜, Comm. ✠, dell'O. di Francesco Gius. d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

Siacci (Francesco), Deputato al Parlamento nazionale, Tenente Colonnello nell'Arma d'Artiglieria, Professore di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, e di Matematiche applicate nella Scuola d'Applicazione delle Armi di Artiglieria e Genio, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio

Digitized by Google

Nazionale della R. Accademia dei Lincei, e Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✠, Comm. ✠.

Basso (Giuseppe), *predetto.*

D'Ovidio (Dott. Enrico), Professore ordinario d'Algebra e Geometria analitica e incaricato di Analisi superiore nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio dell'Accademia Pontaniana, ecc., ✠, Comm. ✠.

Bizzozero (Giulio), Senatore del Regno, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, ecc., Uff. ✠ e Comm. ✠.

Ferraris (Galileo), Ingegnere, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Professore di Fisica tecnica nel R. Museo Industriale Italiano e Direttore del Laboratorio di Elettrotecnica, Prof. di Fisica nella R. Scuola di Guerra, Uffiz. ✠; Comm. ✠ e dell'O. di Franc. Gius. d'Austria.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Socio corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Rettore e Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✠, ✠.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della

Digitized by Google

R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruselle, ecc. ecc. ✠, Comm. ⊕.

SPEZIA (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia, e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ⊕.

GIBELLI (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, ⊕.

GIACOMINI (Carlo), Dott. aggregato in Medicina e Chirurgia, Prof. di Anatomia umana, descrittiva, topografica ed Istologia, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, e Direttore dell'Istituto Anatomico della R. Università di Torino, ⊕, ✠.

CAMERANO (Lorenzo), Dott. aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra.

SEGRE (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino.

PEANO (Giuseppe), Dottore in Matematica, Prof. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Accademici Nazionali non residenti

MENABREA (S. E. Conte Luigi Federigo), Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella Regia Università di Torino, Tenente Generale, Ambasciatore di S. M. a Parigi, Primo Aiutante di campo Generale Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), Membro Onorario del Regio

Digitized by Google

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Ufficiale della Pubblica Istruzione di Francia, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cord. e Cons. ✱, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cr. ✪, ⊜, dec. della Med. d'oro al Valor Militare e della Medaglia d'oro Mauriziana, Gr. Cr. dell'O. Supr. del Serafino di Svezia, dell'O. di Sant'Alessandro Newski di Russia, di Danebrog di Danim., Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo, dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. Militare), della Probità di Sassonia, della Corona di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp., Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria, di quelli della Fedeltà e del Leone di Zähringen di Baden, Gr. Cr. dell'Ord. del Salvatore di Grecia, G. Cr. dell'Ordine di S. Marino, Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Ahid* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Comm. dell'Ordine della Leg. d'On. di Francia, di Cristo di Portogallo, del Merito di Sassonia, di S. Giuseppe di Toscana, Dottore in Leggi, *honoris causa*, delle Università di Cambridge e di Oxford, ecc. ecc.

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. d'Idraulica, e Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, di Pietroburgo, ecc., Presidente della R. Accademia dei Lincei, Membro delle Società Matematiche di Londra e di Parigi, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ecc., Gr. Uff. ✱, della Legion d'Onore; ⊜, ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Moleschott (Jacopo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, Professore di Fisiologia nella R. Università di Roma, Professore Onorario della Facoltà Medico-Chirurgica della R. Università di Torino e Membro onorario della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio corrispondente delle Società per le Scienze mediche e naturali a Hoorn, Utrecht, Amsterdam, Batavia, Magonza, Lipsia, Cherbourg, degli Istituti di

Digitized by Google

Milano, Modena, Venezia, Bologna, delle Accademie Medico-Chirurgiche in Ferrara e Perugia, della Società Batava di Filosofia sperimentale a Rotterdam, Socio onorario della Società epidemiologica di Londra, della *Medicorum Societas Bohemicorum* a Praga, della *Société médicale allemande* a Parigi, della Società dei Naturalisti in Modena, dell'Accademia Fisio-medico-statistica di Milano, della *Pathological Society* di S. Louis, della *Sociedad antropolojica Española* a Madrid, della Società di Medici Russi a Pietroburgo, Socio dell'Accademia Veterinaria Italiana, del Comitato Medico-Veterinario Toscano, della *Société Royale des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles*, Socio straniero della Società Olandese delle Scienze a Harlem, e della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Socio onorario *de la Société de Médecine Mentale de Belgique*, della Società dei Medici della Boemia a Praga, Socio fondatore della Società Italiana d'Antropologia e di Etnologia in Firenze, Membro ordinario dell'Accademia Medica di Roma, Gr. Uff. ✠ e Gr. Uffiz. ⊕, Comm. dell'Ordine di Casa Mecklenburg, e Cav. del Leone Neerlandese.

CANNIZZARO (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente delle Accademie delle Scienze di Berlino, di Vienna, e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera e della Società R. di Londra, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ⊕; ✿.

BETTI (Enrico), Senatore del Regno, Professore di Fisica matematica nella R. Università di Pisa, Direttore della Scuola Normale Superiore, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio dell'Accademia di Gottinga, Corrispondente dell'Accademia di Berlino e Membro della Società matematica di Londra; Comm. ✠, Grande Uffiz. ⊕; ✿.

SCACCHI (Arcangelo), Senatore del Regno, Professore di Mine-

Digitized by Google

ralogia nella R. Università di Napoli, Presidente della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, Presidente del Reale Istituto di Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Segretario della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ⊜; ✿.

SCHIAPARELLI (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroborgo, di Stockolma, di Upsala, della Società de'Naturalisti di Mosca, e della Società Astronomica di Londra, Comm. ✱; ⊜, ✿, Comm. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

CREMONA (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri, Vice Presidente del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edinburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi e di Copenhagen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze, Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, Socio corrispondente delle Reali Accademie di Berlino e di Lisbona, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo, Professore emerito dell'Università di Bologna, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ⊜, Cav. Cons. ✿.

BELTRAMI (Eugenio), Socio della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Berlino, dell'Istituto di Francia

Digitized by Google

(Accademia delle Scienze), della Società Reale di Napoli, Prof. di Fisica matematica nella R. Università di Pavia, ◆, Comm. ●, ✿.

Accademici Stranieri

HELMHOLTZ (Ermanno Luigi Ferdinando), Professore nella Università di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Fisica generale).

DANA (Giacomo), Professore di Storia naturale a New-Haven, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Anatomia e Zoologia).

HOFMANN (Guglielmo Augusto), Prof. di Chimica, Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della Società Reale di Londra, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Chimica).

HERMITE (Carlo), Membro dell'Istituto di Francia, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

WEIERSTRASS (Carlo), Professore di Matematica nell'Università di Berlino.

THOMSON (Guglielmo), Socio Straniero dell'Istituto di Francia, Professore di Filosofia naturale nell'Università di Glasgow.

GEGENBAUR (Carlo), della R. Accademia Bavarese delle Scienze, Professore di Anatomia nell'Università di Heidelberg.

CAYLEY (Arturo), Professore di Matematiche nella Università di Cambridge.

VIRCHOW (Rodolfo), Professore di Patologia generale e Anatomia patologica nell'Università di Berlino.

STAS (Giovanni Servais), della R. Accademia belgica di Scienze, Lettere ed Arti in Brusselle.

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

SEZIONE

DI MATEMATICA PURA E ASTRONOMIA

De Gasparis (Annibale), Professore d'Astronomia nella R. Università di . . . . . . *Napoli*

Tardy (Placido), Professore emerito della Regia Università di . . . . *Genova*

Boncompagni (D. Baldassarre), dei Principi di Piombino . . . . *Roma*

Cantor (Maurizio), Professore di Matematica nell' Università di . . . . *Heidelberg*

Schwarz (Ermanno A.), Professore di Matematica nell' Università di . . . . *Gottinga*

Klein (Felice), Professore di Matematica nell' Università di . . . . *Gottinga*

Fergola (Emanuele), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Casorati (Felice), Professore di Calcolo infinitesimale e di Analisi superiore nella R. Università di *Pavia*

Dini (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Tacchini (Pietro), Direttore dell' Osservatorio del Collegio Romano . . . . *Roma*

Digitized by Google

BATTAGLINI (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

CATALAN (Eugenio), Professore emerito della Università di . . . . *Liegi*

BERTINI (Eugenio), Professore dell'università di *Pavia*

DARBOUX (Gastone), della Facoltà di Sciente di *Parigi*

SEZIONE

DI MATEMATICA APPLICATA

E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

COLLADON (Daniele), Professore di Meccanica . *Ginevra*

TURAZZA (Domenico), Professore di Meccanica razionale nella R. Università di . . . . . *Padova*

NARDUCCI (Enrico), Bibliotecario della Biblioteca Alessandrina di . . . . *Roma*

PISATI (Giuseppe), Professore di Fisica tecnica nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in . . *Roma*

FASELLA (Felice). Direttore della Scuola navale superiore di . . . . *Genova*

SEZIONE

DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

WEBER (Guglielmo), della Società Reale delle Scienze di . . . . *Gottinga*

WARTMANN (Elia), Prof. nell'Università di . *Ginevra*

BLASERNA (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Roma*

KOHLRAUSCH (Federico), Professore nell'Istituto fisico di . . . . *Strasborgo*

CORNU (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Digitized by Google

Felici (Riccardo), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . *Pisa*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di . *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Prof. nella Università di *Lipsia*

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . *Bologna*

SEZIONE

DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

Bonjean (Giuseppe) . . . . *Chambéry*

Plantamour (Filippo), Professore di Chimica . *Ginevra*

Will (Enrico), Professore di Chimica . . . *Giessen*

Bunsen (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . *Heidelberg*

Marignac (Giovanni Carlo), Professore di Chimica *Ginevra*

Berthelot (Marcellino), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica nella R. Università di . . . . *Palermo*

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

Friedel (Carlo), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

Fresenius (Carlo Remigio), Professore a *Wiesbaden*

Baeyer (Adolfo von) . . . . *Monaco* (Baviera)

Kekule (Augusto), Professore di Chimica nell' Università di . . . . *Bonn*

Williamson (Alessandro Guglielmo), della Reale Società di . . . . *Londra*

Thomsen (Giulio), Professore di Chimica nell' Università di . . . . *Copenaghen*

Digitized by Google

SEZIONE

DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

De Zigno (Achille), Uno dei XL della Società italiana delle Scienze . . . . *Padova*

Kokscharow (Nicola di), dell'Accademia Imperiale delle Scienze di . . . . *Pietroborgo*

Ramsay (Andrea), della Società Reale di . . *Londra*

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . *Roma*

Rosenbusch (Enrico), Professore di Petrografia nell'Università di . . . . *Strasborgo*

Nordenskiöld (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . *Stoccolma*

Daubrée (Gabriele Augusto), dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere . . . . *Parigi*

Zirkel (Ferdinando), Professore di Petrografia a . . . . *Lipsia*

Des Cloizeaux (Alfredo Luigi Oliviero Legrand), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

Capellini (Giovanni), Professore nella R. Università di . . . . *Bologna*

Tschermak (Gustavo), Professore di Mineralogia e Petrografia nell'Università di . . . . *Vienna*

Arzruni (Andrea), Professore di Mineralogia nell'Istituto tecnico superiore (tecnische Hochschule) *Aachen* (Aix-la-Chapelle)

Mallard (Ernesto), Professore di Mineralogia alla Scuola nazionale delle Miniere di Francia . *Parigi*

Digitized by Google

SEZIONE
DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (Conte Vittore), Corrispondente del R. Istituto Lombardo . . . . *Milano*

CANDOLLE (Alfonso DE), Professore di Botanica. *Ginevra*

GENNARI (Patrizio), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . *Cagliari*

CARUEL (Teodoro), Professore di Botanica nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola Superiore d'Agricoltura in . . . *Milano*

SACCARDO (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . *Padova*

HOOKER (Giuseppe DALTON), Direttore del Giardino Reale di Kew . . . . *Londra*

SACHS (Giulio von), Professore nell'Università di . . . . *Würtzburg*

NAEGLI (Carlo), Prof. nell'Università di . . *Monaco* (Baviera)

DELPINO (Federico), Professore nella R. Università di . . . . *Padova*

SEZIONE
DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

DE SELYS LONGCHAMPS (Edmondo) . . . . *Liegi*

BURMEISTER (Ermanno), Direttore del Museo pubblico di . . . . *Buenos Ayres*

PHILIPPI (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chilì)

OWEN (Riccardo), Direttore delle Collezioni di Storia naturale al *British Museum* . . . *Londra*

Digitized by Google

KOELLIKER (Alberto), Professore di Anatomia e Fisiologia . . . . *Würtzburg*

GOLGI (Camillo), Professore di Istologia, ecc. nella R. Università di . . . . *Pavia*

HAECKEL (Ernesto), Prof. nell'Università di . *Jena*

SCLATER (Filippo LUTLEY), Segretario della Società Zoologica di . . . . *Londra*

FATIO (Vittore), Dottore . . . . *Ginevra*

KOWALEWSKI (Alessandro), Professore di Zoologia nell'Università di . . . . *Odessa*

LUDWIG (Carlo), Professore di Fisiologia nell'Università di . . . . *Lipsia*

BRÜCKE (Ernesto), Professore di Fisiologia e Anatomia nell'Università di . . . . *Vienna*

LOCARD (Arnould), dell' Accademia delle Scienze di . . . . *Lione*

CHAUVEAU (Augusto), Professore alla Scuola di Medicina di . . . . *Parigi*

FOSTER (Michele), Professore di Fisiologia nell'Università di . . . . *Cambridge*

HEINDENHAIN (Rodolfo), Prof. di Fisiologia nell'Università di . . . . *Breslavia*

WALDEYER (Guglielmo), Prof. di Anatomia nell'Università di . . . . *Berlino*

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

FLECHIA (Giovanni), Professore emerito di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine e di Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia de' Lincei, Uffiz. ✱, Gr. Uffiz. ✱; ✱.

Segretario Perpetuo

GORRESIO (Gaspare), Senatore del Regno, Prefetto della Biblioteca Nazionale, già Professore di Letteratura orientale nella R. Università di Torino, Membro dell'Istituto di Francia, Socio Nazionale della R. Accademia de' Lincei, Socio corrispondente della Reale Accademia della Crusca, e della R. Accademia di Scienze e Lettere di Palermo, Membro Onorario della Reale Società Asiatica di Londra, della Società accademica *Indo-Cinese* di Parigi, ecc., Membro della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ✱; ✱, Comm. dell' O. di Guadal. del Mess., e dell'O. della Rosa del Brasile, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

Accademici residenti

GORRESIO (Gaspare), *predetto.*

FABRETTI (Ariodante), *predetto.*

PEYRON (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Comm. ✱, Uffiz. ✱.

Digitized by Google

Vallauri (Tommaso), Senatore del Regno, Professore di Letteratura latina e Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Romana di Archeologia e della R. Accademia Palermitana di Scienze, Lettere ed Arti, Comm. ✻, e Gr. Uffiz. ●, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Flechia (Giovanni), *predetto*.

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Vice-Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✻ e ●.

Rossi (Francesco), Vice Direttore del Museo d'Antichità, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, e Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ●.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Comm. ✻, e Gr. Uffiz. ●.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi piemontesi e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Presidente del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle Antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Membro della Commissione araldica regionale per il Piemonte, della R. Deputazione sopra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e della Società Accademica d'Aosta, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia Patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della Nuova Società per la Storia di Sicilia, e della Società

Digitized by Google

di Storia e di Archeologia di Ginevra, Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanda, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia, ecc., Uffiz. ✱, Comm. ⊜.

SCHIAPARELLI (Luigi), Dottore aggregato, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Comm. ✱ e ⊜.

PEZZI (Domenico), Dottore aggregato e Professore straordinario nella Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, ⊜.

FERRERO (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Professore nell'Accademia Militare, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, e della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Rep. di S. Marino, ⊜.

CARLE (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✱, ⊜.

NANI (Cesare), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ⊜, ●.

BERTI (S. E. Domenico), Primo Segretario del Gran Magistero dell'Ordine Mauriziano, Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Professore emerito delle RR. Università di Torino, di Bologna e di Roma, Socio Nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro delle RR. Deputazioni di Storia patria del Piemonte e dell'Emilia, Gr. Cord. ✱, e ⊜; Cav. e Cons. ✿, Gr. Cord. della Legion d'O. di Francia, e dell'Ordine di Leopoldo del Belgio, ecc., ecc.

Digitized by Google

Cognetti De Martiis (Salvatore), Prof. di Economia politica nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, e della R. Accademia dei Georgofili, ●, Comm. ●.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, ●, ●.

Boselli (Paolo), Dott. aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Prof. nella R. Università di Roma, Membro della R. Deputazione di Storia Patria, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio della R. Accademia di Agricoltura e Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Deputato al Parlamento nazionale, Comm. ✱, Gr. Cord. ●, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia e dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), Gr. Uffiz. O. di Leop. del Belgio, Uffiz. della Cor. di Prussia, della L. d'O. di Francia e C. O. della Concezione del Portogallo.

Cipolla (Conte Carlo), Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Uff. ●.

Accademici Nazionali non residenti

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc. Gr. Uffiz. ●, Gr. Uffiz. ●, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Sp., ecc.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella R. Università di Torino, ✱.

Digitized by Google

Ricci (Marchese Matteo), Senatore del Regno, Socio residente della Reale Accademia della Crusca, Uffiz. ✱.

Minervini (Giulio), Professore Onorario della Regia Università di Napoli, Socio di molte Accademie italiane e straniere, Uffiz. ✱, e Comm. ⊜, e decorato di varii ordini stranieri.

De Rossi (Comm. Giovanni Battista), Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e della R. Accademia delle Scienze di Berlino e di altre Accademie, Presidente della Pontificia Accademia Romana d'Archeologia.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore, Consigliere della Corte di Cassazione di Roma e del Consiglio del Contenzioso Diplomatico, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei; Socio della R. Accademia delle Scienze del Belgio, e di quella di Palermo, della Società generale delle Carceri di Parigi, Comm. ✱, e Gr. Uffiz. ⊜, Comm. dell'Ordine di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Cantù (Cesare), Membro del R. Istituto Lombardo e di quello di Francia, e di molte Accademie, Gr. Uffiz. ✱ e Comm. ⊜, Cav. e Cons. ✤, Comm. dell'O. di Cristo di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa, Gr. Cr. dell'O. della Rosa del Brasile, e dell'O. di Isabella la Catt. di Spagna. ecc., Ufficiale della Pubblica Istruzione e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti (D. Luigi), Abate Benedettino Cassinese, Vice Archivista degli Archivi Vaticani.

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Ministro dell'Istruzione Pubblica, Presidente dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Prof. di Storia moderna nel medesimo Istituto, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, l'Umbria e le Marche, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio dell'Accademia Ungherese, Dott. in Legge della Università di Edimborgo, Professore emerito della R. Università di Pisa, ecc., ecc., Comm. ✱ Gr. Uffiz. ⊜, ✤.

Digitized by Google

Accademici Stranieri

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Müller (Massimiliano), Professore nell'Università di Oxford, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Gregorovius (Ferdinando), Membro della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*Ecole des Chartes*, Cav. della L. d'O. di Francia.

Whitney (Guglielmo), Prof. nel Collegio Yale a New-Haven.

Paris (Gastone), dell'Istituto di Francia (Parigi).

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Jena.

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

I. — SCIENZE FILOSOFICHE.

Rendu (Eugenio) . . . . *Parigi*

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . *Padova*

Ferri (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

Bonghi (Ruggero), Prof. emerito della R. Università di . . . . *Roma*

II. — SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI.

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno . *Roma*

Serafini (Filippo), Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Serpa Pimentel (Antonio di), Consigliere di Stato . . . . *Lisbona*

Rodriguez de Berlanga (Manuel) . . . *Malaga*

Schupfer (Francesco), Prof. nella R. Università di . . . . *Roma*

Cossa (Luigi), Prof. nella R. Università di . *Pavia*

Pertile (Antonio), Prof. nella R. Università di *Padova*

Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Università di . . . . *Pisa*

Buonamici (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

III. — SCIENZE STORICHE.

Krone (Giulio) . . . . *Vienna*

Sanguinetti (Abate Angelo), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . *Genova*

Champollion-Figeac (Amato) . . . . . *Parigi*

Digitized by Google

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . . . *Cherasco*

Daguet (Alessandro) . . . . *Neuchâtel* (Svizzera)

Perrens (Francesco) . . . . *Parigi*

Haulleville (Prospero De) . . . . *Brusselle*

De Leva (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . *Padova*

Sybel (Enrico Carlo Ludolfo von), Direttore dell'Archivio di Stato in . . . . *Berlino*

Wallon (Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) . . . . *Parigi*

Taine (Ippolito), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

Willems (Pietro), Professore nell'Università di *Lovanio*

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . *Londra*

Capasso (Bartolomeo), Sopraintendente degli Archivi Napoletani . . . . *Napoli*

Corradi (Alfonso), Professore nella R. Università di . . . . *Pavia*

Vassallo (Can. Carlo), Preside del Liceo Alfieri in . . . . *Asti*

IV. — ARCHEOLOGIA.

Wieseler (Federico) . . . . *Gottinga*

Palma di Cesnola (Conte Luigi) . . . . *New-York*

Fiorelli (Giuseppe), Senatore del Regno . *Roma*

Curtius (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

Maspero (Gastone), dell'Istituto di Francia a *Parigi*

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . *Milano*

POGGI (Vittorio), Commissario per le Antichità e le Belle Arti per la Liguria . . . . . . *Genova*

PLEYTE (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . *Leida*

PALMA DI CESNOLA (Cav. Alessandro) . . . *Londra*

MOWAT (Roberto), Presidente della Società degli Antiquari di Francia . . . . . . *Parigi*

NADAILLAC (Marchese I. F. Alberto de) . . *Parigi*

V. — GEOGRAFIA.

NEGRI (Barone Cristoforo), Console generale di prima Classe, Consultore legale del Ministero per gli affari esteri . . . . *Torino*

KIEPERT (Enrico), Professore nell'Università di *Berlino*

PIGORINI (Luigi), Professore nella Regia Università di . . . . *Roma*

VI. — LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE.

KREHL (Ludolfo) . . . . *Dresda*

RÉNAN (Ernesto), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

SOURINDRO MOHUN TAGORE . . . . *Calcutta*

ASCOLI (Isaia Graziadio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di . *Milano*

WEBER (Alberto), Professore nell'Università di *Berlino*

KERBAKER (Michele), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

MARRE (Aristide) Membro della Società Asiatica *Parigi*

OPPERT (Giulio), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

GUIDI (Ignazio), Prof. nella R. Università di *Roma*

VII. — FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA.

Linati (Conte Filippo), Senatore del Regno . *Parma*

Comparetti (Domenico), Professore emerito dell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

Bréal (Michele) . . . . *Parigi*

Negroni (Carlo), Senatore del Regno, della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria . *Novara*

D'Ancona (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Nigra (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia . . . . *Vienna*

Rajna (Pio), Prof. nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . *Firenze*

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . , ... *Firenze*

Digitized by Google

MUTAZIONI
avvenute nel Corpo Accademico
dal Gennaio 1890 *al* 1° *Marzo* 1891

ELEZIONI

SOCI.

Flechia (Giovanni), eletto Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 5 e approvato con R. Decreto del 27 gennaio 1890.

Bertini (Eugenio), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione Matematica pura e Astronomia) nell'adunanza del 9 marzo 1890.

Darboux (Gastone), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura e Astronomia) nell'adunanza del 9 marzo 1890.

Villari (Pasquale) eletto Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 16, e approvato con R. Decreto del 30 marzo 1890.

Böhtlingk (Ottone), eletto Socio Straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 16, e approvato con R. Decreto 30 marzo 1890.

Buonamici (Francesco), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze giuridiche e sociali) nell'adunanza del 16 marzo 1890.

Capasso (Bartolomeo), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche) nell'adunanza del 16 marzo 1890.

Corradi (Alfonso), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche) nell'adunanza del 16 marzo 1890,

Digitized by Google

Del Lungo (Isidoro), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia) nell'adunanza 16 marzo 1890.

Mowat (Roberto), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia) nell'adunanza del 16 marzo 1890.

Nadaillac (marchese I. F. Alberto de), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia) nell'adunanza del 16 marzo 1890.

Vassallo (Carlo), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche nell'adunanza del 16 marzo 1890.

Peano (Giuseppe), eletto Socio nazionale residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 25 gennaio, e approvato con R. Decreto del 5 febbraio 1891.

Cipolla (Conte Carlo), eletto Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 15 febbraio, e approvato con R. Decreto del 15 marzo 1891.

MORTI

11 Aprile 1890.

Péligot (Eugenio Melchiorre), dell' Istituto di Francia, Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

15 Luglio 1890.

Favre (Alfonso), Professore di Geologia in Ginevra, Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

Digitized by Google

. . . . . 1890.

Rawlinson (Giorgio), Professore nella Università di Oxford, Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia).

23 Dicembre 1890.

Sang (Edward), Socio e Segretario della Società di Scienze ed Arti di Edimborgo, Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematica applicata e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

2 Gennaio 1891.

Stoppani (Antonio), Professore di Geologia nel R. Istituto tecnico superiore di Milano (Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali) (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

3 Gennaio 1891.

Liagre (J. B.), Socio e Segretario della R. Accademia delle Scienze del Belgio, Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica applicata e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

17 Gennaio 1891.

Bancroft (Giorgio), Corrispondente dell'Istituto di Francia, Socio Straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 1ª, 1890-91

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Novembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, FERRARIS, NACCARI, GIBELLI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Presidente apre questa prima seduta dell'anno accademico col porgere il ben venuto ai Soci, ed a nome di questi gli risponde, contraccambiando il saluto, il Socio COSSA, Direttore della Classe

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza del 22 giugno p. p., che viene approvato.

Il Socio COSSA compie il gradito incarico di esprimere all'Accademia i ringraziamenti della imperiale Società mineralogica di Pietroburgo per le manifestazioni di simpatia trasmessele dall'Accademia stessa in occasione del 25° anniversario della Presidenza del Principe imperiale Nicola MAXIMILIANOWITCH ROMANOWSTKY, Duca di Leuchtenberg.

Tra le molte pubblicazioni pervenute recentemente in dono all'Accademia sono segnalate le seguenti:

« *A Text book of Physiology* (Londra, 1888-89-90, parts I-III; in-8°); del Corrispondente M. FOSTER, Prof. nell'Università di Cambridge;

« Quattro Note stampate risguardanti analisi di acque minerali eseguite dal Corrispondente Dott. Remigio FRESENIUS in collaborazione col Prof. H. FRESENIUS di Wiesbaden: presentate dal Socio COSSA;

Digitized by Google

« Nota biografica (estratta dal Bollettino della Societa belga di Geologia) scritta dal Dott. F. SACCO sul compianto Socio Prof. Luigi BELLARDI, del cui ritratto, disegnato dal Sig. Cav. Luigi CANTÙ, l'autore offre pure parecchie copie riprodotte in fototipia.

« Le comunicazioni e le letture si succedono nell'ordine che segue:

« FELICE CASORATI, *Cenno necrologico* del Socio D'OVIDIO;

« *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno* 1891, *calcolate dall'Ingegnere Tomaso* ASCHIERI, Assistente all' Osservatorio di Torino »; presentate dal Socio BASSO;

« *Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate* »; Nota del Dott. M. CHINI, presentata dal Socio SEGRE;

« *Un nuovo campo di ricerche geometriche* »: Nota IV dello stesso Socio SEGRE;

« *Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli anfibî anuri* »: del Socio CAMERANO.

« *La legge di Roberts sul quadrilatero articolato* »; Nota dell'Ingegnere Giuseppe PASTORE presentata dal Socio FERRARIS;

Vengono ancora presentati due lavori, dei quali uno del Professore Federico SACCO, che ha per titolo: « *I molluschi* dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria; parte VIII (*Galeodoliideae*, *Doliideae*, *Siculideae* e *Naticideae*) »; l'altro, di cui sono autori i Dott. Fr. Sav. MONTICELLI e Cesare CRETY, intitolato: « Ricerche intorno alla sottofamiglia delle *Solenophorinae* ».

Siccome gli autori di questi due lavori ne desiderano la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*, il Presidente nomina due Commissioni perchè le esaminino e ne riferiscano alla Classe in una prossima adunanza.

Digitized by Google

LETTURE

FELICE CASORATI.

CENNO NECROLOGICO

del Socio E. D'OVIDIO.

A breve distanza dalla morte del compianto nostro Presidente GENOCCHI, un' altra grave perdita han fatto le scienze matematiche, e segnatamente l'Analisi, per la morte del Professore FELICE CASORATI, avvenuta l'11 settembre di questo anno. Entrambi onoravano l'Italia con la profondità del sapere, col vigore dell'ingegno, con la doppia operosità di scrittore e d'insegnante. Anche del CASORATI la nostra Accademia porta il lutto, poichè lo contava fra' Soci corrispondenti dal 1880.

Il CASORATI è mancato immaturamente a 54 anni. L'animo nostro è doppiamente contristato, pensando ch' egli avrebbe potuto ancora per molti anni recar nuove contribuzioni alla scienza: unica consolazione il ricordare, che egli ha almeno potuto lavorare sino a pochi mesi avanti la sua dipartita, ed ha avuto la fortuna di non sapersi condannato, di non sentirsi morire a poco a poco.

Nacque il CASORATI a Pavia il 17 Dicembre 1835. Fece i suoi studi in quell'Università, dov'ebbe a maestro il *Brioschi*, a compagni il *Cremona*, il *Beltrami*, il *Cossa*, ai quali tutti era legato di intima amicizia. Divenne professore nella medesima Università nel 1857; dal 1861 era ordinario di Calcolo infinitesimale, e da molti anni insegnava anche l'Analisi superiore.

Coltivò con particolare predilezione l'Analisi, alla quale si riferisce la maggior parte delle sue pubblicazioni, che sommano a 50; non senza occuparsi di altri argomenti, come gli strumenti ottici e la teoria delle superficie.

Digitized by Google

Non sono in grado di fare ora l'enumerazione e la disamina di questi lavori: cómpito, che il Prof. *Brioschi* si è assunto e che assolverà con maggior diritto e competenza. Ma è noto a tutti che i lavori del CASORATI spiccano per l'importanza delle questioni trattate, per la novità dei risultati, pel rigore dei concetti, per la esattezza bibliografica. La moderna teoria delle funzioni, sia secondo il metodo di *Riemann*, sia secondo quello di *Weierstrass*, egli possedeva maestrevolmente; al progresso di essa cooperò potentemente con le Memorie inserite nei periodici e nei volumi accademici, e ne promosse la diffusione fra noi con la pregevolissima *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, della quale purtroppo non pubblicò che il primo volume: forse egli sentiva tutta la difficoltà che vi è a combattere e scrivere ad un tempo la storia del combattimento, o forse lo arrestarono gli ostacoli d'ogni maniera che pur oggi incontrano in Italia (giova sperare non sarà sempre così) gli scrittori di trattati scientifici pensati e scritti seriamente.

FELICE CASORATI, se fu da tutti i cultori delle discipline matematiche altamente stimato pel suo grande valore scientifico, fu altresì amato da tutti coloro che lo conobbero da vicino, per la squisita bontà dell'animo, per la cortese semplicità dei modi, per le stesse sue singolarità. Al Collega illustre, al gentile amico diamo, ammirati e dolenti, il saluto della mente e del cuore.

Digitized by Google

Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1891,

calcolate dall'Ing. T. ASCHIERI, Assist. all'Osservatorio di Torino, presentate dal Socio BASSO.

Gennaio 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA													Età della Luna
		Il SOLE							La LUNA						
dell'Anno	del Mese	nasce		passa al meridiano			tramonta		nasce		passa al meridiano		tramonta		
		h	m	h	m	s	h	m	h	m	h	m	h	m	
1	1	7	59	12	22	52,52	4	46	10	57*p.*	4	53*a.*	11	39*a.*	21
2	2		59		23	20,72		47	——		5	33	11	59	22
3	3		59		23	48,58		48	12	0*p.*	6	14	12	18*p.*	23
4	4		59		24	16,07		49	1	4	6	56	12	38	24
5	5		59		24	43,18		50	2	10	7	39	1	0	25
6	6		59		25	9,85		51	3	19	8	26	1	25	26
7	7		59		25	36,08		52	4	32	9	18	1	57	27
8	8		59		26	1,83		53	5	46	10	14	2	38	28
9	9		58		26	27,08		55	6	59	11	15	3	31	29
10	10		58		26	51,78		56	8	5	12	19*p.*	4	36	30
11	11		58		27	15,90		57	8	59	1	23	5	51	1
12	12		57		27	39,41		58	9	43	2	24	7	13	2
13	13		57		28	2,30		59	10	17	3	21	8	35	3
14	14		56		28	24,53	5	1	10	46	4	15	9	55	4
15	15		56		28	46,08		2	11	11	5	5	11	11	5
16	16		55		29	6,92		3	11	24	5	53	——		6
17	17		54		29	27,06		4	11	58	6	41	12	26*a.*	7
18	18		54		29	46,46		6	12	22*p*	7	29	1	38	8
19	19		53		30	5,12		7	12	51	8	18	2	49	9
20	20		53		30	23,03		8	1	22	9	9	3	58	10
21	21		52		30	40,16		10	2	1	10	0	5	5	11
22	22		51		30	56,52		11	2	46	10	53	6	6	12
23	23		50		31	12,10		12	3	38	11	42	7	0	13
24	24		49		31	26,87		14	4	36	——		7	46	14
25	25		48		31	40,86		15	5	38	12	34*a.*	8	23	15
26	26		47		31	54,05		16	6	42	1	22	8	54	16
27	27		46		32	6,42		18	7	45	2	7	9	20	17
28	28		45		32	18,00		19	8	47	2	49	9	43	18
29	29		44		32	28,77		21	9	50	3	31	10	3	19
30	30		43		32	38,74		22	10	53	4	11	10	22	20
31	31		42		32	47,89		24	11	56	4	52	10	41	21

FASI DELLA LUNA

3	Ultimo quarto	11h 2m	*ant.*
10	Luna nuova	4 14	*pom.*
17	Primo quarto	7 7	*ant.*
25	Luna piena	1 15	*ant.*

Il giorno nel mese cresce di 0h 55m

12 La Luna è in Perigeo 3h *ant.*
27 Id. Apogeo 5 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Aquario* il giorno 20 ad ore 8 m. 8 *ant.*

Digitized by Google

Febbraio 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
32	1	7 41	12 32 56,25	5 25	—	5 34*a.*	11 2*a.*	22
33	2	40	33 3,81	26	1 2*a.*	6 18	11 25	23
34	3	39	33 10,56	28	2 11	7 5	11 53	24
35	4	38	33 16,52	29	3 23	7 58	12 27*p.*	25
36	5	36	33 21,69	31	4 35	8 55	1 12	26
37	6	35	33 26,07	32	5 43	9 56	2 10	27
38	7	33	33 29,64	34	6 42	11 0	3 11	28
39	8	32	33 32,42	35	7 32	12 3*p*	4 41	29
40	9	31	33 34,41	37	8 12	1 4	6 5	1
41	10	29	33 35,59	38	8 43	2 1	7 29	2
42	11	28	33 35,99	39	9 11	2 54	8 50	3
43	12	27	33 35,61	41	9 36	3 45	10 8	4
44	13	25	33 34,45	42	10 0	4 35	11 24	5
45	14	23	33 32,53	44	10 24	5 24	—	6
46	15	22	33 29,85	46	10 52	6 14	12 39*a.*	7
47	16	21	33 26,42	47	11 23	7 5	1 50	8
48	17	19	33 22,27	48	11 59	7 57	2 58	9
49	18	17	33 17,39	49	12 42*p.*	8 49	4 2	10
50	19	16	33 11,82	51	1 33	9 41	4 57	11
51	20	14	33 5,56	52	2 29	10 31	5 45	12
52	21	12	32 58,64	53	3 30	11 19	6 25	13
53	22	11	32 51,05	55	4 33	—	6 57	14
54	23	9	32 42,83	56	5 36	12 5*a.*	7 24	15
55	24	7	32 34,00	58	6 40	12 48	7 48	16
56	25	6	32 24,57	59	7 43	1 30	8 8	17
57	26	5	32 14,56	6 1	8 45	2 10	8 27	18
58	27	3	32 4,00	2	9 47	2 51	8 46	19
59	28	1	31 52,92	4	10 53	3 32	9 6	20

FASI DELLA LUNA.

2 Ultimo quarto 5h 32m *ant.*

9 Luna nuova 3 2 *ant.*

15 Primo quarto 7 19 *pom.*

23 Luna piena 8 8 *pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 21m

9 La Luna è in Perigeo 2h *pom.*
23 Id. Apogeo 7 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Pesci* il giorno 18 ad ore 10 m. 36 *pom.*

Digitized by Google

Marzo 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA							Età della Luna
		Il SOLE			**La LUNA**				
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta		
		h	h m s	h m	h m	h m	h m		
60	1	6 58	12 31 41,32	6 5	——	4 14*a.*	9 27*a.*		21
61	2	57	31 29,22	7	12 0*a.*	5 0	9 53		22
62	3	55	31 16,66	8	1 9	5 49	10 23		23
63	4	53	31 3,65	9	2 19	6 42	11 3		24
64	5	51	30 50,20	11	3 27	7 40	11 53		25
65	6	50	30 36,34	12	4 28	8 41	12 55*p.*		26
66	7	48	30 22,08	13	5 20	9 42	2 9		27
67	8	46	30 7,43	15	6 3	10 43	3 31		28
68	9	44	29 52,40	16	6 38	11 41	4 55		29
69	10	42	29 37,03	17	7 8	12 37*p.*	6 19		30
70	11	41	29 21,32	18	7 34	1 30	7 41		1
71	12	39	29 5,29	20	7 59	2 22	9 0		2
72	13	37	28 48,94	21	8 24	3 13	10 18		3
73	14	35	28 32,31	22	8 50	4 5	11 34		4
74	15	33	28 15,41	24	9 21	4 57	——		5
75	16	31	27 58,27	25	9 56	5 50	12 47*a.*		6
76	17	29	27 40,89	26	10 38	6 44	1 53		7
77	18	27	27 23,31	27	11 27	7 36	2 53		8
78	19	26	27 5,53	29	12 22*p.*	8 27	3 44		9
79	20	24	26 47,58	30	1 22	9 16	4 26		10
80	21	22	26 29,49	31	2 24	10 3	5 1		11
81	22	20	26 11,27	33	3 28	10 47	5 29		12
82	23	18	25 52,95	34	4 31	11 29	5 53		13
83	24	16	25 34,55	35	5 34	——	6 14		14
84	25	14	25 16,10	36	6 37	12 9*a.*	6 34		15
85	26	12	24 57,62	38	7 40	12 50	6 52		16
86	27	10	24 49,13	39	8 45	1 31	7 11		17
87	28	9	24 20,65	40	9 52	2 13	7 32		18
88	29	7	24 2,22	41	11 0	2 58	7 56		19
89	30	4	23 43,85	43	——	3 45	8 25		20
90	31	3	23 25,56	44	12 10*a.*	4 37	9 0		21

FASI DELLA LUNA.

3	Ultimo quarto	8h	27m	*pom.*
10	Luna nuova	12	40	*pom.*
17	Primo quarto	10	0	*ant.*
25	Luna piena	2	2	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 38m

10 La Luna è in Perigeo 2h *ant.*
22 Id. Apogeo 11 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 20 ad ore 10 m. 13 *pom.*

Digitized by Google

Aprile 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
91	1	6 1	12 23 7,38	6 45	1 18*a*.	5 32*a*.	9 45*p*.	22
92	2	5 59	22 49,32	46	2 20	6 30	10 42	23
93	3	57	22 31,42	48	3 15	7 30	11 49	24
94	4	56	22 13,67	49	4 0	8 29	1 5*p*.	25
95	5	54	21 56,09	50	4 35	9 26	2 26	26
96	6	52	21 38,72	52	5 6	10 21	3 48	27
97	7	50	21 21,55	53	5 33	11 15	5 9	28
98	8	48	21 4,61	54	5 57	12 7*p*.	6 30	29
99	9	46	20 47,90	55	6 22	12 58	7 50	1
100	10	45	20 31,45	57	6 48	1 50	9 8	2
101	11	43	20 15,26	58	7 17	2 44	10 25	3
102	12	41	19 59,36	59	7 50	3 38	11 38	4
103	13	39	19 43,74	7 0	8 30	4 33	——	5
104	14	38	19 28,43	2	9 17	5 28	12 43*a*.	6
105	15	36	19 13,45	3	10 11	6 21	1 39	7
106	16	34	18 58,79	4	11 11	7 11	2 25	8
107	17	33	18 44,48	6	12 13*p*.	7 59	3 3	9
108	18	31	18 30,53	7	1 17	8 44	3 33	10
109	19	29	18 16,97	8	2 21	9 26	3 58	11
110	20	27	18 3,80	9	3 24	10 7	4 20	12
111	21	25	17 51,04	11	4 27	10 48	4 40	13
112	22	23	17 38,71	12	5 30	11 29	4 58	14
113	23	22	17 26,82	13	6 35	——	5 17	15
114	24	21	17 15,39	14	7 42	12 11*a*.	5 37	16
115	25	19	17 4,44	15	8 51	12 55	5 59	17
116	26	17	16 53,98	17	10 2	1 43	6 27	18
117	27	16	16 44,02	18	11 11	2 33	7 0	19
118	28	14	16 34,58	19	——	3 28	7 42	20
119	29	13	16 25,65	20	12 16*a*.	4 25	8 35	21
120	30	11	16 17,27	22	1 12	5 24	9 38	22

FASI DELLA LUNA.

2 Ultimo quarto 7h 20m *ant.*

8 Luna nuova 9 47 *pom.*

16 Primo quarto 2 30 *ant.*

24 Luna piena 5 55 *ant.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 30m

7 La Luna è in Perigeo 11h *ant.*
19 Id. Apogeo 1 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 20 ad ore 10 m. 3 *ant.*

Digitized by Google

Maggio 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
121	1	5 10	12 16 9,44	7 23	2 0a.	6 22a.	10 51a.	23
122	2	8	16 2,17	24	2 37	7 19	12 8p.	24
123	3	7	15 55,46	25	3 8	8 13	1 27	25
124	4	5	15 49,30	27	3 34	9 5	2 46	26
125	5	4	15 43,72	28	3 59	9 55	4 5	27
126	6	3	15 38,73	29	4 22	10 45	5 23	28
127	7	1	15 34,29	30	4 47	11 36	6 42	29
128	8	0	15 30,44	31	5 14	12 29p.	8 0	1
129	9	4 59	15 27,15	33	5 44	1 23	9 15	2
130	10	57	15 24,44	34	6 21	2 19	10 26	3
131	11	56	15 22,30	35	7 6	3 15	11 28	4
132	12	55	15 20,72	36	7 58	4 10	——	5
133	13	53	15 19,70	37	8 56	5 3	12 19a.	6
134	14	52	15 19,23	38	10 0	5 52	1 1	7
135	15	51	15 19,32	40	11 4	6 39	1 34	8
136	16	50	15 19,95	41	12 7p.	7 23	2 1	9
137	17	49	15 21,13	42	1 11	8 4	2 24	10
138	18	48	15 22,86	43	2 14	8 45	2 44	11
139	19	47	15 25,13	44	3 18	9 25	3 3	12
140	20	46	15 27,92	45	4 21	10 7	3 22	13
141	21	45	15 31,25	46	5 28	10 50	3 42	14
142	22	44	15 35,12	47	6 37	11 36	4 3	15
143	23	43	15 39,51	48	7 48	——	4 28	16
144	24	42	15 44,42	49	8 59	12 27a.	4 59	17
145	25	41	15 49,84	50	10 8	1 21	5 38	18
146	26	40	15 55,77	51	11 9	2 19	6 28	19
147	27	40	16 2,10	52	11 58	3 18	7 30	20
148	28	39	16 9,11	53	——	4 17	8 40	21
149	29	39	16 16,50	54	12 40a	5 15	9 57	22
150	30	38	16 24,36	55	1 12	6 9	11 15	23
151	31	37	16 32,67	56	1 39	7 1	12 33p.	24

FASI DELLA LUNA.

1	Ultimo quarto	2h	41m	*pom.*
8	Luna nuova	7	5	*ant.*
15	Primo quarto	7	54	*pom.*
23	Luna piena	7	16	*pom.*
30	Ultimo quarto	7	44	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 8m

5 La Luna è in Perigeo 10h *pom.*
17 Id. Apogeo 7 *ant.*
31 Id. Perigeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 21 ad ore 9 m. 56 *ant.*

Digitized by Google

Giugno 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA														Età della Luna
		Il SOLE							La LUNA							
dell'Anno	del mese	nasce		passa al meridiano			tramonta		nasce		passa al meridiano		tramonta			
		h	m	h	m	s	h	m	h	m	h	m	h	m		
152	1	4	37	12	16	41,42	7	57	2	4*a.*	7	51*a.*	1	49*p.*		25
153	2		36		16	50,59		58	2	27	8	40	3	5		26
154	3		36		17	0,17		59	2	49	9	28	4	22		27
155	4		35		17	10,13		59	3	14	10	19	5	39		28
156	5		35		17	20,47	8	0	3	42	11	11	6	54		29
157	6		35		17	31,14		1	4	15	12	5*p.*	8	7		30
158	7		34		17	42,12		1	4	56	1	1	9	13		1
159	8		34		17	53,40		2	5	45	1	57	10	10		2
160	9		33		18	4,94		2	6	42	2	52	10	56		3
161	10		33		18	16,72		3	7	44	3	44	11	33		4
162	11		33		18	28,71		4	8	49	4	32	—			5
163	12		33		18	40,90		4	9	54	5	17	12	3*a.*		6
164	13		32		18	53,25		5	10	57	5	59	12	28		7
165	14		32		19	5,75		5	12	0*p.*	6	40	12	48		8
166	15		32		19	18,38		6	1	3	7	20	1	8		9
167	16		32		19	31,11		6	2	6	8	1	1	26		10
168	17		32		19	43,91		6	3	12	8	43	1	44		11
169	18		32		19	56,76		7	4	18	9	28	2	6		12
170	19		33		20	9,66		7	5	29	10	16	2	29		13
171	20		33		20	22,58		7	6	41	11	9	2	57		14
172	21		33		20	35,49		8	7	53	—		3	32		15
173	22		34		20	48,38		8	8	59	12	7*a.*	4	19		16
174	23		34		21	1,23		8	9	54	1	7	5	17		17
175	24		34		21	14,01		8	10	39	2	8	6	27		18
176	25		34		21	26,70		8	11	14	3	8	7	44		19
177	26		35		21	39,29		8	11	44	4	5	9	3		20
178	27		35		21	51,77		8	—		4	58	10	22		21
179	28		36		22	4,10		8	12	9*a.*	5	48	11	39		22
180	29		36		22	16,26		8	12	32	6	37	12	56*p.*		23
181	30		37		22	28,25		8	12	54	7	25	2	11		24

FASI DELLA LUNA.

6	Luna nuova	5^h	16^m	*pom.*
14	Primo quarto	1	24	*pom.*
22	Luna piena	6	2	*ant.*
29	Ultimo quarto	12	6	*ant.*

Il giorno nel mese cresce di 0^h 12^m

14 La Luna è in Apogeo 2 *ant.*
26 Id. Perigeo 6 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 21 ad ore 6 m. 1 *pom.*

Digitized by Google

Luglio 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
182	1	4 37	12 22 40,02	8 8	1 18*a.*	8 14*a.*	3 25*p.*	25
183	2	38	22 51,57	8	1 43	9 5	4 39	26
184	3	38	23 2,86	7	2 15	9 58	5 52	27
185	4	39	23 13,88	7	2 52	10 52	7 1	28
186	5	40	23 24,59	7	3 37	11 47	8 0	29
187	6	40	23 34,96	7	4 31	12 42*p.*	8 50	1
188	7	41	23 44,98	6	5 31	1 35	9 31	2
189	8	42	23 54,63	6	6 34	2 25	10 4	3
190	9	42	24 3,87	5	7 40	3 11	10 30	4
191	10	43	24 12,68	5	8 45	3 55	10 52	5
192	11	44	24 21,06	4	9 48	4 36	11 12	6
193	12	45	24 28,98	3	10 50	5 16	11 30	7
194	13	46	24 36,42	3	11 53	5 56	11 48	8
195	14	47	24 43,37	2	12 56*p.*	6 37	—	9
196	15	48	24 49,82	1	2 1	7 20	12 7*a.*	10
197	16	48	24 55,76	1	3 9	8 6	12 30	11
198	17	49	25 1,17	0	4 20	8 56	12 55	12
199	18	50	25 6,04	7 59	5 32	9 51	1 26	13
200	19	51	25 10,36	58	6 40	10 50	2 8	14
201	20	52	25 14,14	57	7 41	11 52	3 0	15
202	21	53	25 17,36	56	8 31	—	4 6	16
203	22	54	25 20,01	55	9 12	12 54*a.*	5 21	17
204	23	55	25 22,08	54	9 45	1 54	6 43	18
205	24	56	25 23,59	53	10 12	2 50	8 6	19
206	25	57	25 24,54	52	10 35	3 43	9 26	20
207	26	59	25 24,91	51	10 59	4 33	10 44	21
208	27	5 0	25 24,71	50	11 22	5 23	12 1*p.*	22
209	28	1	25 23,93	49	11 47	6 12	1 16	23
210	29	2	25 22,59	48	—	7 2	2 30	24
211	30	3	25 20,66	47	12 17*a.*	7 53	3 44	25
212	31	4	25 18,14	45	12 51	8 47	4 52	26

FASI DELLA LUNA.

6 Luna nuova	4h 49m	*ant.*
14 Primo quarto	6 19	*ant.*
21 Luna piena	2 44	*pom.*
28 Ultimo quarto	5 23	*ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 50m.

11 La Luna è in Apogeo 8h *pom.*
23 Id. Perigeo 5 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 22 ad ore 11 m. 20 *pom.*

Digitized by Google

Agosto 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA															Età della Luna
		Il Sole							La Luna								
dell'Anno	del Mese	nasce		passa al meridiano			tramonta		nasce		passa al meridiano		tramonta				
		h	m	h	m	s	h	m	h	m	h	m	h	m			
213	1	5	5	12	25	15,03	7	44	1	33*a*	9	41*a*.	5	54*p*.			27
214	2		6		25	11,34		43	2	23	10	36	6	47			28
215	3		7		25	7,05		41	3	21	11	29	7	30			29
216	4		9		25	2,15		40	4	23	12	19*p*.	8	4			30
217	5		10		24	56,64		38	5	28	1	7	8	32			1
218	6		11		24	50,54		37	6	34	1	51	8	56			2
219	7		12		24	43,84		36	7	37	2	33	9	16			3
220	8		13		24	36,53		35	8	40	3	14	9	45			4
221	9		15		24	28,64		33	9	42	3	53	9	53			5
222	10		16		24	20,14		32	10	45	4	33	10	11			6
223	11		17		24	11,06		30	11	49	5	14	10	31			7
224	12		18		24	1,40		28	12	54*p*.	5	58	10	55			8
225	13		19		23	51,17		27	2	2	6	45	11	22			9
226	14		20		23	40,38		25	3	12	7	37	11	58			10
227	15		22		23	29,02		24	4	21	8	33	—				11
228	16		23		23	17,12		22	5	25	9	33	12	44*a*.			12
229	17		24		23	4,69		20	6	20	10	35	1	43			13
230	18		25		22	51,73		19	7	5	11	36	2	54			14
231	19		26		22	38,26		17	7	41	—		4	14			15
232	20		28		22	24,31		16	8	11	12	35*a*.	5	38			16
233	21		29		22	9,89		14	8	37	1	31	7	2			17
234	22		30		21	55,01		12	9	1	2	24	8	24			18
235	23		31		21	39,69		11	9	24	3	15	9	44			19
236	24		32		21	23,95		9	9	49	4	6	11	2			20
237	25		34		21	7,82		7	10	18	4	57	12	19*p*.			21
238	26		35		20	51,30		6	10	51	5	49	1	35			22
239	27		36		20	34,40		4	11	31	6	43	2	46			23
240	28		37		20	17,15		2	—		7	37	3	50			24
241	29		38		19	59,56		0	12	19*a*.	8	32	4	45			25
242	30		40		19	41,63	6	58	1	14	9	25	5	30			26
243	31		41		19	23,37		57	2	15	10	16	6	7			27

FASI DELLA LUNA.

4 Luna nuova	6h	2m	*pom.*
12 Primo quarto	10	1	*pom.*
19 Luna piena	10	18	*pom.*
26 Ultimo quarto	12	59	*pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 25m.

8 La Luna è in Apogeo 11h *ant.*
20 Id. Perigeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 23 ad ore 12 m. 4 *pom.*

Digitized by Google

Settembre 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
244	1	5 42	12 18 4,81	6 55	3 19a	11 4a.	6 36p.	28
245	2	43	18 45,95	53	4 25	11 49	7 1	29
246	3	44	18 26,80	51	5 31	12 32p.	7 22	1
247	4	46	18 7,40	49	6 32	1 12	7 40	2
248	5	47	17 47,74	47	7 34	1 52	7 58	3
249	6	48	17 27,86	45	8 37	2 32	8 16	4
250	7	49	17 7,75	44	9 40	3 12	8 35	5
251	8	50	16 47,45	42	10 44	3 55	8 57	6
252	9	52	16 26,95	40	11 50	4 40	9 22	7
253	10	53	16 6,28	38	12 58p.	5 28	9 54	8
254	11	54	15 45,48	36	2 6	6 21	10 4	9
255	12	55	15 24,53	34	3 11	7 18	11 25	10
256	13	56	15 3,47	32	4 9	8 17	—	11
257	14	58	14 42,32	30	4 56	9 17	12 30a.	12
258	15	59	14 21,10	28	5 36	10 16	1 44	13
259	16	6 0	13 59,83	27	6 8	11 13	3 6	14
260	17	1	13 38,52	25	6 35	—	4 30	15
261	18	2	13 17,21	23	7 0	12 8a.	5 53	16
262	19	4	12 55,92	21	7 24	1 1	7 16	17
263	20	5	12 34,69	19	7 49	1 53	8 38	18
264	21	6	12 13,53	17	8 17	2 46	10 0	19
265	22	7	11 52,47	15	8 48	3 40	11 19	20
266	23	8	11 31,54	13	9 27	4 35	12 34p.	21
267	24	10	11 10,75	11	10 13	5 31	1 43	22
268	25	11	10 50,13	9	11 7	6 27	2 42	23
269	26	12	10 29,68	8	—	7 22	3 31	24
270	27	13	10 9,43	6	12 7a.	8 13	4 9	25
271	28	14	9 49,41	4	1 11	9 2	4 41	26
272	29	16	9 29,61	2	2 16	9 48	5 7	27
273	30	17	9 10,07	0	3 21	10 31	5 28	28

FASI DELLA LUNA.

3 Luna nuova 9h 6m *ant.*

11 Primo quarto 11 57 *ant.*

12 Luna piena 5 54 *ant.*

24 Ultimo quarto 11 57 *pom.*.

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 33m.

4 La Luna è in Apogeo 9h *pom.*
18 Id. Perigeo 8 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 23 ad ore 9 m. 3 *ant.*

Digitized by Google

Ottobre 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
274	1	6 18	12 8 50,81	5 58	4 24*a.*	11 12*a*	5 47*p.*	29
275	2	19	8 31,84	56	5 27	11 52	6 5	30
276	3	21	8 13,18	54	6 29	12 31*p.*	6 22	1
277	4	23	7 54,84	52	7 33	1 11	6 41	2
278	5	24	7 36,85	51	8 36	1 53	7 2	3
279	6	25	7 19,23	49	9 42	2 37	7 25	4
280	7	26	7 1,98	47	10 50	3 25	7 54	5
281	8	27	6 45,14	45	11 57	4 15	8 30	6
282	9	28	6 28,71	43	1 3*p*	5 10	9 17	7
283	10	29	6 12,71	42	2 1	6 6	10 13	8
284	11	31	5 57,16	40	2 51	7 4	11 22	9
285	12	32	5 42,07	38	3 32	8 2	—	10
286	13	33	5 27,46	36	4 6	8 58	12 39*a.*	11
287	14	34	5 13,36	35	4 35	9 52	2 0	12
288	15	36	4 59,77	33	5 0	10 45	3 22	13
289	16	37	4 46,74	31	5 23	11 37	4 43	14
290	17	39	4 34,29	29	5 47	—	6 6	15
291	18	40	4 22,43	28	6 13	12 30*a*	7 29	16
292	19	41	4 11,18	26	6 44	1 24	8 52	17
293	20	43	4 0,58	24	7 19	2 20	10 12	18
294	21	44	3 50,63	23	8 4	3 17	11 26	19
295	22	45	3 41,36	21	8 56	4 16	12 33*p*	20
296	23	47	3 32,78	19	9 56	5 13	1 27	21
297	24	48	3 24,90	18	11 0	6 7	2 10	22
298	25	49	3 17,74	16	—	6 58	2 44	23
299	26	51	3 11,32	14	12 5*a.*	7 45	3 12	24
300	27	52	3 3,64	13	1 11	8 29	3 34	25
301	28	54	3 0,72	11	2 14	9 11	3 54	26
302	29	55	2 56,56	10	3 18	9 51	4 12	27
303	30	56	2 53,18	8	4 20	10 21	4 29	28
304	31	58	2 50,60	7	5 23	11 10	4 48	29

FASI DELLA LUNA.

3 Luna nuova 1h 48m *ant.*

10 Primo quarto 11 47 *pom.*

17 Luna piena 2 35 *pom.*

24 Ultimo quarto 2 46 *pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 34m.

1 La Luna è in Apogeo 11h *pom.*
16 Id. Perigeo 7 *pom.*
29 Id. Apogeo 5 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 23 ad ore 5 h. 28 *pom.*

Digitized by Google

Novembre 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
305	1	6 59	12 2 48,80	5 6	6 27*a.*	11 52*a.*	5 7*p*	30
306	2	7 1	2 47,80	4	7 32	12 35*p.*	5 29	1
307	3	2	2 47,62	3	8 42	1 22	5 56	2
308	4	3	2 48,25	1	9 50	2 12	6 30	3
309	5	5	2 49,69	0	10 57	3 5	7 12	4
310	6	6	2 51,95	4 59	11 57	4 1	8 7	5
311	7	7	2 55,03	58	12 49*p.*	4 58	9 11	6
312	8	9	2 58,94	56	1 32	5 55	10 23	7
313	9	10	3 3,66	55	2 7	6 50	11 40	8
314	10	12	3 9,20	54	2 36	7 42	—	9
315	11	13	3 15,58	53	3 1	8 33	12 58*a.*	10
316	12	14	3 22,77	52	3 24	9 24	2 18	11
317	13	16	3 30,80	51	3 47	10 15	3 37	12
318	14	17	3 39,67	49	4 11	11 7	4 58	13
319	15	19	3 49,38	48	4 39	—	6 20	14
320	16	20	3 59,84	47	5 11	12 2*a*	7 42	15
321	17	21	4 11,35	47	5 52	12 59	9 1	16
322	18	23	4 23,59	46	6 41	1 58	10 13	17
323	19	24	4 36,67	46	7 39	2 57	11 15	18
324	20	25	4 50,58	45	8 44	3 55	12 5*p.*	19
325	21	27	5 5,23	44	9 51	4 49	12 44	20
326	22	28	5 20,89	43	10 58	5 39	1 14	21
327	23	29	5 37,26	42	—	6 25	1 39	22
328	24	30	5 54,42	42	12 3*a.*	7 8	1 59	23
329	25	32	6 12,38	41	1 6	7 58	2 18	24
330	26	33	6 31,10	40	2 9	8 28	2 35	25
331	27	34	6 50,59	39	3 12	9 7	2 53	26
332	28	35	7 9,80	39	4 15	9 58	3 12	27
333	29	37	7 31,63	38	5 21	10 31	3 33	28
334	30	38	7 53,37	38	6 29	11 17	3 58	29

FASI DELLA LUNA.

1 Luna nuova 7h 22m *pom.*

9 Primo quarto 9 36 *ant.*

16 Luna piena 1 6 *ant.*

23 Ultimo quarto 9 16 *ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 9m.

14 La Luna è in Perigeo 3h *ant.*
25 Id. Apogeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 22 ad ore 2 m. 33 *ant.*

Digitized by Google

Dicembre 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
335	1	7 39	12 8 15,68	4 37	7 37a.	12 6p.	4 30p.	30
336	2	40	8 38,62	37	8 47	1 0	5 10	1
337	3	41	9 2,19	37	9 51	1 56	6 1	2
338	4	42	9 26,35	36	10 47	2 53	7 3	3
339	5	43	9 51,08	36	11 32	3 51	8 13	4
340	6	44	10 16,33	36	12 10p	4 46	9 30	5
341	7	45	10 42,10	35	12 40	5 38	10 47	6
342	8	46	11 8,33	36	1 5	6 29	—	7
343	9	47	11 35,00	36	1 28	7 18	12 4a.	8
344	10	48	12 2,11	36	1 50	8 7	1 21	9
345	11	49	12 29,60	36	2 12	8 56	2 38	10
346	12	50	12 57,45	36	2 37	9 48	3 56	11
347	13	51	13 25,64	36	3 7	10 43	5 15	12
348	14	51	13 54,16	36	3 42	11 40	6 35	13
349	15	52	14 22,84	36	4 28	—	7 50	14
350	16	53	14 51,99	37	5 21	12 40a	8 57	15
351	17	54	15 21,26	37	6 24	1 39	9 53	16
352	18	54	15 50,63	37	7 32	2 36	10 38	17
353	19	55	16 20,36	37	8 40	3 29	11 13	18
354	20	55	16 50,12	37	9 47	4 17	11 40	19
355	21	55	17 19,99	38	10 53	5 2	12 3p.	20
356	22	56	17 49,93	38	11 56	5 44	12 22	21
357	23	56	18 19,90	38	—	6 24	12 40	22
358	24	56	18 49,88	39	12 59a.	7 3	12 57	23
359	25	56	19 19,82	39	2 1	7 43	1 15	24
360	26	57	19 49,70	40	3 6	8 25	1 35	25
361	27	57	20 19,48	41	4 12	9 9	1 59	26
362	28	57	20 49,13	42	5 21	9 57	2 27	27
363	29	58	21 18,60	43	6 30	10 50	3 4	28
364	30	58	21 47,86	44	7 37	11 45	3 52	29
365	31	58	22 16,87	45	8 38	12 43p.	4 50	1

FASI DELLA LUNA.

1	Luna nuova	12h	35m	*pom.*
8	Primo quarto	6	3	*pom.*
15	Luna piena	1	43	*pom.*
23	Ultimo quarto	6	28	*ant.*
31	Luna nuova	4	10	*ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 16m.

11 La Luna è in Perigeo 8h *pom.*
23 Id. Apogeo 7 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 22 ad ore 3 m. 25 *ant.*

Digitized by Google

ECCLISSI

1891

(Tempo medio di Roma)

Nell'anno 1891 avverranno *due* ecclissi solari e *due* ecclissi lunari, tutte visibili nei nostri paesi, ad eccezione della seconda ecclisse solare.

I. *Ecclisse totale di* LUNA, 23 *Maggio; visibile in parte a Torino.*

Primo contatto con l'ombra, o principio dell'ecclisse a	5^h	31^m	pom.
Principio della fase totale . . . . »	6	40	»
Istante medio dell'ecclisse . . . . »	7	19	»
Fine della fase totale . . . . »	7	58	»
Ultimo contatto con l'ombra, o fine dell'ecclisse »	9	7	»

Grandezza dell'ecclisse: 1, 30 del diametro lunare.

Questo ecclisse è visibile nella parte occidentale del Grande Oceano, in Australia, in Asia, in Africa ed in Europa.

A Torino la Luna nasce a 7^h 48^m pom., cioè solo 10 minuti prima che termini la fase totale; l'ultimo contatto avviene a 59° verso destra dal punto più alto del disco della Luna (immagine diritta).

II. *Ecclisse annulare di* SOLE, 6 *Giugno; visibile a Torino come ecclisse parziale.*

Principio dell'ecclisse . . . a	6^h	12^m	pom.
Fine . . . . »	7	18	»

Grandezza dell'ecclisse 0, 17 del diametro solare.

Digitized by Google

Questa ecclisse è visibile nell'America settentrionale (eccetto che nel sud-est), in Europa (all' infuori del Portogallo e di quasi tutta la Spagna), sulle coste settentrionali dell'Asia e nelle regioni polari artiche. La fase annulare dura al massimo 12^s.

Per Torino il primo contatto avviene a 87° verso destra dal punto più alto del disco e l'ultimo a 14° verso destra dallo stesso punto.

Tramonto del Sole a $8^h\ 1^m$, della Luna a $8^h\ 7^m$.

III. *Ecclisse totale di* Luna 15-16 *Novembre*, *visibile a Torino.*

Primo contatto con la penombra, Novembre 15	a	10^h	26^m	pom.
Primo contatto con l'ombra, o princ. dell'ecclisse	»	11	25	»
Principio della fase totale, Novembre 16 . .	»	12	27	ant.
Istante medio dell'ecclisse	»	1	9	»
Fine della fase totale	»	1	50	»
Ultimo contatto con l'ombra, o fine dell'ecclisse	»	2	52	»
Ultimo contatto con la penombra	»	3	51	»

Grandezza dell'ecclisse 1, 39 del diametro lunare.

Questa ecclisse è visibile in Asia (eccetto che nella parte orientale; in Europa, in Africa, nell'Oceano Atlantico ed in America.

Per Torino si ha:

15 Nov.	- Nascere della Luna	a	4^h	39^m	pom.
16 id.	- Passaggio della Luna al meridiano	»	12	2	ant.
16 id.	- Tramonto della Luna	»	7	42	»

Per Torino il primo contatto con l'ombra avviene a 68° verso sinistra dal punto più alto del disco lunare; e l'ultimo contatto a 138° verso destra dal medesimo punto (immagine diritta).

Digitized by Google

IV. *Ecclisse parziale di* SOLE, 1° *Dicembre, invisibile a Torino.*

Quantità della massima oscurazione: 0, 53 del diametro solare.

Questa ecclisse è visibile nelle regioni circompolari antartiche e sulla punta dell'America meridionale.

Passaggio di MERCURIO *sul disco solare.*

Nel 10 Maggio 1891 Mercurio passa sul disco del Sole nelle prime ore del giorno, descrivendo una corda la cui minima distanza dal centro è di circa 8 decimi dal raggio.

Il fenomeno è visibile nell'America settentrionale, in Australia, in Asia ed in Europa (eccettuato il sud-ovest); dal principio alla fine è visibile soltanto in Australia e nella metà orientale dell'Asia.

Noi possiamo soltanto vederne la fine. Al nascere del Sole sull'orizzonte di Torino, cioè a $4^h\ 57^m$, Mercurio ha già percorso circa i $^6/_7$ della corda.

Per Torino l'emersione avviene a 56° dal punto più basso dal disco verso destra (immagine diritta). I tempi dei due contatti sono:

Contatto interno . . . »	5^h	33^m	35^s
Contatto esterno	5	38	36

Digitized by Google

Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate;

Nota del Dott. M. CHINI,
presentata dal Socio C. SEGRE

Il prof. Beltrami nella sua Memoria « *Sulla flessione delle superficie rigate* (*) » studiando la deformazione di tali superficie che conserva rettilinee le loro generatrici, risolve varie questioni, in cui una linea (*direttrice*) della superficie che considera viene a soddisfare, dopo la flessione, a condizioni diverse.

In questo breve lavoro, riducendo anzitutto al minor numero possibile gli elementi che individuano la forma di una superficie rigata, ho introdotto poi questi nelle formule che danno tutte le superficie gobbe le quali sono deformate della prima; queste formule, divenendo assai semplici e riducendosi in ultima analisi a due sole, possono rendere in molti casi più agevole e sollecita la risoluzione di certe questioni relative alla flessione delle superficie rigate. Infatti, ho potuto applicarle utilmente alla trattazione di alcuni problemi che qui mi sono proposti, della stessa specie, ma meno semplici di quelli svolti dal prof. Beltrami nella citata Memoria.

È noto che il quadrato dell'elemento lineare di ogni superficie rigata, quando si prendono a linee coordinate le sue generatrici rettilinee ($v=\text{cost}$) e un sistema di traiettorie ($u=\text{cost}$) delle medesime, può sempre ridursi alla forma:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (\mathrm{M}^2 u^2 + 2\mathrm{N}u + 1)\, dv^2\,,$$

essendo v l'arco di direttrice contato da un punto fisso, u la porzione di generatrice contata a partire dalla direttrice, e θ

(*) *Annali di Matematica* del TORTOLINI. Anno 1865, Tomo VII.

Digitized by Google

l'angolo che la generatrice $v = \cos t$ forma con tale curva; mentre le quantità M^2 e N hanno i valori seguenti:

$$M^2 = \left(\frac{dl}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dv}\right)^2$$

$$N = \alpha_1 \frac{dl}{dv} + \beta_1 \frac{dm}{dv} + \gamma_1 \frac{dn}{dv}$$

dove (l, m, n), $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$ indicano, rispettivamente, i coseni di direzione di una generatrice qualunque e della tangente alla direttrice nel punto corrispondente, rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali fissati ad arbitrio.

Volendo introdurre nell'espressione di tale elemento lineare quantità che siano più intimamente legate colla superficie, che non dipendano, cioè, anche dalla posizione di questa nello spazio, ma solo dalla sua forma, osserveremo che allora la direttrice sarà completamente determinata appena siano note le espressioni dei suoi due raggi di curvatura ρ e T in funzione dell'arco v, e che per ogni punto di tale direttrice sarà individuata la posizione della generatrice appena siano conosciuti gli angoli θ e φ che, rispettivamente, la direzione positiva di questa forma colla direzione positiva della direttrice, e che il piano tangente alla superficie nel punto considerato fa col piano osculatore della curva medesima.

Sono, dunque, quattro le funzioni (dell'arco v) che possono servire a determinare completamente, a meno di movimenti nello spazio, una superficie rigata qualsiasi.

Ora, se indichiamo con $(\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2)$ $(\alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3)$ i coseni di direzione della normale principale e della binormale alla direttrice, rispetto alla medesima terna di assi coordinati, avremo le relazioni:

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = \cos\theta$$

$$l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2 = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

$$l\alpha_3 + m\beta_3 + n\gamma_3 = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi .$$

Derivando ambo i membri della prima rapporto a v, col tener conto della seconda e delle formule di *Frenet*, si ottiene:

$$N = -\left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\right) \operatorname{sen}\theta .$$

Digitized by Google

Se invece deriviamo ambo i membri di tutte e tre, poi quadriamo e sommiamo, applicando le citate formule, si avrà:

$$M^2 = N^2 + \left\{ \frac{d}{dv}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) + \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{T} \right\}^2 +$$
$$+ \left\{ \frac{d}{dv}(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{T} \right\}^2,$$

ovvero:

$$M^2 = \left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\right)^2 + \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dv} - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta \right\}^2.$$

Talchè, nella forma precedente dell'elemento lineare possiamo sostituire a M^2 e N le espressioni ora trovate, in cui entrano le sole quantità ρ, T, θ, φ insieme alle derivate prime di alcune fra esse.

In particolare, se per direttrice si sceglie una traiettoria ortogonale delle generatrici, abbiamo:

$$ds^2 = du^2 + \left\{ \left(1 - \frac{u\cos\varphi}{\rho}\right)^2 + u^2\left(\frac{d\varphi}{dv} - \frac{1}{T}\right)^2 \right\} dv^2.$$

Ciò posto, considerando una superficie rigata, affinchè questa sia una deformazione della prima, è necessario e sufficiente che, scelta su quella a direttrice la deformata della direttrice della rigata primitiva, le corrispondenti quantità ρ_1 T_1 θ_1 e φ_1 che la individuano siano legate a ρ, T, θ e φ dalle relazioni:

$$\theta_1 = \theta$$

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\left(\varphi_1' - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\cos\theta = \pm\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}.$$

in cui gli accenti indicano derivate prese rispetto all'arco v, che per ambedue le direttrici ha il medesimo valore nei punti corrispondenti.

Se come direttrice della rigata primitiva si prende una

Digitized by Google

traiettoria ortogonale delle generatrici, le condizioni precedenti diventano:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad \varphi_1' - \frac{1}{T_1} = \pm\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right).$$

Se scegliamo una geodetica:

$$\theta_1 = \theta, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{T_1}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\rho_1}\cos\theta = \pm\left(\frac{1}{T}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\rho}\cos\theta\right),$$

Se la data superficie rigata è il luogo delle binormali a una curva dello spazio (direttrice) abbiamo:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad T_1 = \pm T$$

e possiamo, perciò, concludere:

Date due superficie rigate, luogo delle binormali a due curve dello spazio, affinchè siano applicabili l'una sull'altra, è necessario e sufficiente che quelle curve abbiano uguale il quadrato della torsione nei punti corrispondenti.

Ritornando, ora, al caso generale, possiamo, dunque, asserire che, considerata una superficie gobba qualsiasi, si otterranno tutte le superficie rigate che sono deformazioni della primitiva quando per le quantità ρ_1 T_1 e φ_1, che insieme a θ_1 determinano una qualunque di queste, si scelgono tali funzioni di v da soddisfare alle due equazioni:

$$(1)\ldots\left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \\ &\left(\varphi_1' - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} = \pm\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\right\} \end{aligned}\right.$$

e si prende inoltre:

$$(2)\ldots\ldots \qquad \theta_1 = \theta$$

dove ρ, T, θ e φ sono date funzioni della variabile v.

Digitized by Google

Poichè le tre quantità ρ_1 T_1 e φ_1 devono soddisfare a due sole equazioni, potremo sempre scegliere ad arbitrio una di esse, oppure assoggettarle ad esser legate da una relazione qualsiasi, che esprimerà geometricamente una condizione alla quale viene a soddisfare dopo la flessione una linea qualunque (direttrice) giacente sulla superficie rigata che si considera.

Così, poichè è sempre possibile porre:

$$\varphi_1 = 0$$

oppure:

$$\frac{1}{T_1} = 0$$

od anche:

$$\frac{\rho_1}{T_1} = \text{cost.}$$

risultando, in tal modo, per ogni singolo caso, determinate tutte le quantità ρ_1 T_1 θ_1 φ_1 dalle (1) e dalla (2), possiamo concludere:

È sempre possibile deformare una rigata in modo che una linea tracciata ad arbitrio su di essa diventi dopo la flessione un'assintotica della superficie, o una curva piana, oppure un'elica cilindrica.

Possiamo anche dimostrare:

Una superficie rigata può sempre flettersi in modo che una sua linea tracciata ad arbitrio venga a distendersi sopra una sfera di raggio qualunque.

Infatti, ciò risulta espresso dalla relazione:

$$(3) \ldots\ldots \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{\rho_1'}{\sqrt{R^2 - \rho_1^2}},$$

essendo R il raggio arbitrario della sfera; allora, tenendo conto della prima delle (1), avremo:

$$(4) \ldots\ldots \qquad \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}}{\rho}$$

$$\varphi_1' = -\frac{\rho_1' \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{\rho_1 \rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}} \left(\frac{\cos \varphi}{\rho}\right)'.$$

Digitized by Google

Perciò la seconda delle (1) diventa in questo caso:

$$\rho_1'\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho_1^2}}+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}\right)\operatorname{tang}\theta+\frac{\rho_1\rho}{\sqrt{\rho_2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)'\operatorname{tang}\theta+$$

$$+\frac{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}{\rho\rho_1}=\pm\left\{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}-\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta\right\}.$$

Dunque, prendendo per ρ_1 una tal funzione di v che soddisfi all'equazione differenziale precedente, del primo ordine, col mezzo delle (2) (3) e (4) risulteranno completamente determinate tutte le quantità ρ_1 T_1 θ_1 φ_1 in modo tale da definire una superficie gobba applicabile sulla primitiva e per la quale la linea deformata di quella scelta precedentemente (direttrice) giace sulla sfera di raggio R.

Se, in particolare, la linea proposta è una traiettoria ortogonale delle generatrici abbiamo le due equazioni:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_1'-\frac{\rho_1'}{\sqrt{R^2-\rho_1^2}}=\pm\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)$$

e perciò, integrando quest'ultima:

$$\varphi_1-\operatorname{arcsen}\frac{\rho_1}{R}=\pm\left(\varphi-\int\frac{dv}{T}\right)=\pm\psi$$

essendo ψ una funzione nota della variabile v. Quindi ρ_1 risulterà determinata dall'equazione algebrica:

$$\rho_1\sqrt{R^2-\rho_1^2}+\rho_1\sqrt{\left(\frac{\rho}{\cos\varphi}\right)^2-\rho_1^2}=R\rho\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

la quale, risoluta, dà:

$$\rho_1^2=\frac{R^2\rho^2\cos^2\psi}{\rho^2+R^2\cos_2\varphi\pm2R\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\psi}$$

E quindi:

$$\rho_1=\frac{R\rho\cos\psi}{\sqrt{\rho^2+R^2\cos^2\varphi\pm2R\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\psi}}.$$

Digitized by Google

Per le altre quantità abbiamo:

$$\theta_1=\frac{\pi}{2}\ ,\qquad T_1=\frac{\sqrt{R^2-\rho_1^2}}{\rho_1'}\ ,\qquad \varphi_1=\text{arcsen}\,\frac{\rho_1}{R}\pm\psi\ .$$

Se, infine, la superficie proposta è il luogo delle binormali a una curva dello spazio (direttrice) avremo:

$$\rho_1=R\ \text{sen}\int\frac{dv}{T},\qquad T_1=\pm T\ ,\qquad \theta_1=\frac{\pi}{2},\qquad \varphi_1=\frac{\pi}{2},$$

Per passare alla ricerca di altre condizioni a cui sia possibile assoggettare, dopo la flessione, una linea tracciata ad arbitrio (direttrice) sopra una superficie rigata, esprimiamo in funzione di ρ, T, θ e φ i valori che assumono lungo la linea proposta le quantità D, D$'$, D$''$ definite dalle uguaglianze:

$$D=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$D'=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$D''=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},$$

Digitized by Google

essendo E, F, G i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare della superficie, e x, y, z le coordinate di uno qualunque dei suoi punti, rispetto alla solita terna di assi cartesiani ortogonali stabilita precedentemente.

A tale scopo, osserviamo che si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = l \ , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \alpha_1 + l'u \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = l' \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\alpha_2}{\rho} + l''u \ ,$$

e analogamente per y e z; inoltre:

$$l = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \alpha_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$
$$m = \beta_1 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \beta_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$
$$n = \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \gamma_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

dunque, tenendo conto delle formule di *Frenet*, otterremo:

$$D_0 = 0 \ , \quad D_0' = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta \ , \quad D_0'' = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}$$

essendo D_0 D_0' D_0'' i valori cercati di D, D′, D″ lungo la direttrice $u = 0$.

Per mezzo di essi e di quelli dei coefficienti dell' elemento lineare possiamo intanto determinare l'espressione delle due curvature *totale* e *media* della superficie lungo la direttrice $u = 0$. Infatti, indicandole, rispettivamente, con K_0 e H_0, si ha:

$$K_0 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}^2$$

$$H_0 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(2\,D_0'\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\right) \ ,$$

e poichè per una qualunque delle rigate deformate si ha analogamente:

$$D_{01} = 0 \ , \quad D_{01}' = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\cos\theta - \left(\varphi_1' - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{sen}\theta \ , \quad D_{01}'' = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} \ ,$$

Digitized by Google

ne deduciamo che lungo la corrispondente direttrice dovremo avere:

$$K_{01} = K_0$$

$$H_{01} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \left\{ \pm 2 \left[\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen}\theta \right] \cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} \right\} .$$

notando che in questa ultima formula e nella seconda delle (1) dovranno esser presi insieme i segni superiori o quelli inferiori.

Le (1) stesse, poi, stanno geometricamente a indicare che la curvatura geodetica della direttrice e la curvatura totale della superficie rigata, lungo questa linea, rimangono inalterate durante la flessione.

Ciò posto, è sempre possibile far diventare:

$$H_{01} = K_{01} f(v) + \frac{1}{f(v)} ,$$

essendo f il simbolo di una funzione arbitraria, giacchè per questo basta fare in modo che risulti:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen}\theta \right\} \cos\theta - \\ - \left\{ K_0 f(v) + \frac{1}{f(v)} \right\} \operatorname{sen}^2\theta ,$$

e poichè deve sempre aversi:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

basterà prendere per φ_1 una tale funzione di v che si abbia:

$$(5) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos\varphi}{\rho} \operatorname{tang}\varphi_1 = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen}\theta \right\} \cos\theta - \\ &\qquad - \left\{ K_0 f(v) + \frac{1}{f(v)} \right\} \operatorname{sen}^2\theta . \end{aligned} \right.$$

Determinato così φ_1 si ha immediatamente l'espressione di ρ_1 dalla condizione:

$$(6) \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi_1} ,$$

Digitized by Google

e quella di T_1 dalla seconda delle (1), dopo che in questa si è sostituito al posto di ρ_1 e φ_1 le funzioni di v trovate antecedentemente, e dopo che nel secondo membro è stato preso il medesimo segno che venne scelto nella (5).

Ora, indicando con r_{01} e r_{02} i raggi principali di curvatura della superficie deformata lungo la sua direttrice, si conclude che possiamo sempre fare in modo che risulti:

$$r_{01} = f(v) \qquad \text{e quindi:} \qquad r_{02} = \frac{1}{K_0 f(v)} \ ,$$

Ossia:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che lungo tutta una linea tracciata ad arbitrio su di essa (direttrice) *uno dei raggi principali di curvatura della superficie diventi uguale a una data funzione dell'arco di quella linea, e in particolare che risulti uguale all'arco stesso contato da un punto fisso.*

Od anche:

Si può sempre deformare una superficie rigata in modo che lungo tutta una qualunque delle sue linee i due raggi principali di curvatura della superficie risultino legati fra loro da una relazione arbitraria.

Così, per esempio, se determiniamo φ_1 colla condizione che sia:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}\operatorname{tang}\varphi_1 = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta \right\} \cos\theta -$$
$$- \left(c K_0 + \frac{1}{c}\right)\operatorname{sen}^2\theta$$

dove c è una costante arbitraria, si ha lungo la direttrice della corrispondente superficie deformata:

$$r_{01} = c \ .$$

Dunque:

È possibile deformare una rigata in modo che lungo tutta una linea tracciata ad arbitrio su di essa divenga costante uno dei raggi principali di curvatura della superficie.

Digitized by Google

Se poi prendiamo:

$$f(v) = c - \sqrt{c^2 - \frac{1}{K_0}}$$

oppure:

$$f(v) = \sqrt{\frac{c}{K_0}} - \sqrt{\frac{c-1}{K_0}}$$

potremo concludere:

È sempre possibile deformare una superficie rigata in modo che lungo tutta una qualunque delle sue linee divenga costante la somma o il rapporto dei raggi principali di curvatura della superficie; e in particolare, *che essi risultino uguali e di segno contrario.*

Nel caso del rapporto la costante arbitraria c dovrà evidentemente essere scelta negativa.

Volendo servirci ancora delle espressioni trovate di D_0 D_0' D_0'' per ulteriori ricerche intorno alla flessione delle superficie rigate, osserviamo che su queste l'equazione delle assintotiche non rettilinee è:

$$2\,D' du + D'' dv = 0$$

e quindi lungo una qualunque di tali curve si ha:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{D''}{2\,D'}\ ,$$

Ora, se sopra la superficie gobba che si considera scegliamo una linea qualunque come direttrice $u = 0$, l'angolo α che le assintotiche della superficie fanno con detta linea è dato dall'equazione:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{D_0'' \operatorname{sen} \theta}{D_0'' \cos \theta - 2\,D_0'}$$

e quindi per l'angolo α_1 che le assintotiche di una qualunque delle rigate deformate fanno colla direttrice si avrà:

Digitized by Google

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{D_{01}'' \operatorname{sen}\theta}{D_{01}''\cos\theta - 2\,D_{01}'} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\cos\theta \pm 2\left\{\left(\varphi' - \dfrac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}}$$

notando, al solito, che in quest'ultima formula e nella seconda delle (1) dovranno esser presi insieme i segni superiori o quelli inferiori.

Ora, si potrà sempre fare in modo che risulti:

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \operatorname{cost}$$

ossia:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}(\operatorname{sen}\theta - c\cos\theta) = \pm 2\,c\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}$$

con c costante arbitraria; poichè, dovendo essere:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

basterà, a tale scopo, prendere per φ_1 una funzione di v tale che si abbia:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \pm\frac{2\,c}{\operatorname{tang}\theta - c}\left\{\rho\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi\right\},$$

Determinato in tal modo φ_1 si ha l'espressione di ρ_1 dalla (6), e quella di T_1 dalla seconda delle (1).

Dunque:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che una sua linea qualsivoglia diventi traiettoria sotto angolo costante arbitrario delle assintotiche non rettilinee della superficie deformata.

Digitized by Google

Se la funzione φ_1 è determinata dall'equazione:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \pm 2 \left\{ \operatorname{tang} \varphi - \rho \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \frac{\operatorname{tang} \theta}{\cos \varphi} \right\},$$

allora sulla corrispondente superficie deformata la linea (direttrice) che si considera, purchè non sia traiettoria ortogonale delle generatrici, è diventata traiettoria ortogonale delle assintotiche non rettilinee.

Possiamo mostrare la possibilità di una flessione della stessa specie, riferendoci anche a un sistema di linee di curvatura della superficie.

Osserviamo che sopra una superficie rigata l'equazione differenziale delle linee di curvatura è:

$$E D' du^2 + E D'' du\, dv + (F D'' - G D') dv^2 = 0$$

e quindi lungo le linee di curvatura di un sistema avremo:

$$\frac{du}{dv} = - \frac{E D'' + \sqrt{E^2 D''^2 - 4 E D' (F D'' - G D')}}{2 E D'}.$$

Segue che, se indichiamo con α l'angolo che le linee di curvatura di tale sistema formano colla direttrice $u = 0$ avremo:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(D_0'' + \sqrt{D_0''^2 - 4 D_0' D_0'' \cos \theta + 4 D_0'^2}) \operatorname{sen} \theta}{(D_0'' + \sqrt{D_0''^2 - 4 D_0' D_0'' \cos \theta + 4 D_0'^2}) \cos \theta - 2 D_0'}$$

Per l'angolo α_1 che fanno colla direttrice le linee di curvatura di un sistema, sopra una qualunque fra le rigate deformate, si avrà:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{(D_{01}'' + \sqrt{(D_{01}''^2 - 4 D_{01}' D_{01}'' \cos \theta + 4 D_{01}'^2}) \operatorname{sen} \theta}{(D_{01}'' + \sqrt{D_{01}''^2 - 4 D_{01}' D_{01}'' \cos \theta + 4 D_{01}'^2}) \cos \theta - 2 D_{01}}.$$

Ciò posto, è sempre possibile fare in modo che risulti:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \text{cost}.$$

Digitized by Google

poichè a tale scopo basterà che sia:

$$D_{01}''(\text{sen}\,\theta - c\cos\theta) + 2\,c\,D_{01}' =$$

$$= (c\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\sqrt{D_{01}''^2 - 4\,D_{01}'D_{01}''\cos\theta + 4\,D_{01}'^2}\ ,$$

da cui, quadrando, si ha:

$$D_{01}''\left\{(c^2\,\text{sen}\,\theta + 2\,c\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\cos\theta - c\right\} =$$

$$= D_{01}'(c^2\,\text{sen}\,\theta + 2\,c\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\ .$$

Dunque, tenendo conto delle (1) e (2), basterà che la funzione φ_1 sia determinata dall'equazione:

$$\text{tang}\,\varphi_1 \,.\left\{\frac{c}{(c^2\,\text{sen}\,\theta + 2\,c\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\cos\theta} - 1\right\} =$$

$$= \pm\left\{\rho\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\frac{\text{tang}\,\theta}{\cos\varphi} - \text{tang}\,\varphi\right\}\ .$$

Trovata così l'espressione richiesta di φ_1 si avrà, al solito, quella di ρ_1 per mezzo della (6), mentre la funzione di v che rappresenta T_1 si ricaverà dalla seconda delle (1), dopo che in essa al posto di ρ_1 e φ_1 si sono sostituite le funzioni determinate antecedentemente, e dopo che il segno del suo secondo membro sia stato fissato uguale a quello che venne scelto nell'equazione precedente.

Siamo, perciò, in grado di concludere:

Si può sempre deformare una superficie rigata in modo che una sua linea qualsivoglia risulti traiettoria sotto angolo costante arbitrario di un sistema di linee di curvatura della superficie.

La condizione:

$$(D_{01}'' + \sqrt{D_{01}''^2 - 4\,D_{01}'D_{01}''\cos\theta + 4\,D_{01}'^2})\cos\theta = 2\,D_{01}'$$

esprime che la direttrice della superficie deformata si è cambiata

Digitized by Google

in traiettoria ortogonale delle linee di curvatura di un sistema, e quindi che essa stessa è divenuta linea di curvatura.

Poichè l'equazione precedente equivale all'altra:

$$D_{01}'' \cos\theta = D_{01}'$$

ne concludiamo che, scegliendo la funzione φ_1 in modo da soddisfare l'equazione:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho} = \pm \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta \right\},$$

la quale dà, se θ è diverso da $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \pm \left\{ \operatorname{tang}\varphi - \rho\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\varphi} \right\},$$

allora sulla corrispondente superficie deformata la linea che si considera (direttrice), purchè non sia traiettoria ortogonale delle generatrici, sarà diventata linea di curvatura.

Dunque:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che una sua linea qualsiasi, ma non traiettoria ortogonale delle generatrici, divenga linea di curvatura (*).

Pisa, 1890.

(*) Beltrami, Mem. cit., pag. 134.

Digitized by Google

Un nuovo campo di ricerche geometriche;

Saggio del Socio Prof. CORRADO SEGRE

NOTA IV (*).

Sistemi lineari ed intersezioni d'iperconiche e d'iperquadriche.

38. Abbiansi le $r+1$ equazioni linearmente indipendenti

(1) . . . . . $\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$, ove $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$

(2) . . . . . $\Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$, ove $b_{ml} = \bar{b}_{lm}$

. . . .

rappresentanti due o più antipolarità del piano o dello spazio. Mediante esse si determina un *sistema lineare di antipolarità*, e quindi d'iperconiche o d'iperquadriche, considerando l'equazione

(3) . . . . . $\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m + \ldots = 0$,

analoga a quella che definisce un sistema lineare di polarità, di coniche o di quadriche. Qui però si ha una differenza sostanziale, dalla quale derivano come conseguenze varie altre; ed è che i parametri λ, μ,... non possono più essere numeri complessi qualunque, e però la dimensione del sistema non è più $2r$. Invero affinchè la (3) sia l'equazione di un'antipolarità dovranno (n. 35) λ, μ, ..., moltiplicate, ove occorra, per uno stesso fattor numerico, esser tali che

$$\lambda a_{ml} + \mu b_{ml} + \ldots = \bar{\lambda} \bar{a}_{lm} + \bar{\mu} \bar{b}_{lm} + \ldots,$$

(*) V. le Note I, II e III nel vol. preced. di questi Atti.

Digitized by Google

ossia, tenendo conto delle condizioni a cui soddisfanno le a, le b, ...,

$$(\lambda-\bar{\lambda})\,a_{ml}+(\mu-\bar{\mu})\,b_{ml}+\ldots=0\,,$$

donde infine, in causa dell'indipendenza lineare supposta fra le equazioni (1), (2), ...,

$$\lambda-\bar{\lambda}=0\,,\quad \mu-\bar{\mu}=0\,,\ldots;$$

sicchè la (3) rappresenterà un'antipolarità solo quando λ, μ, .., o meglio i loro mutui rapporti, siano *reali*. — Ne segue che le antipolarità rappresentate da quell'equazione sono ∞^r (*).

Se nella (3) si fanno coincidere i punti x, y, l'equazione che così si ottiene

$$(4)\ \ldots\ldots\quad \lambda\Sigma a_{lm}x_l\bar{x}_m+\mu\Sigma b_{lm}x_l\bar{x}_m+\ldots=0$$

rappresenta, per valori reali dei parametri, un *sistema lineare d'iperconiche o d'iperquadriche*, composto delle iperconiche od iperquadriche fondamentali per le antipolarità del sistema (3).

Da $r+1$ *forme* (cioè antipolarità, iperconiche, iperquadriche) linearmente indipendenti è individuato un sistema lineare di dimensione r che le contiene; l'indipendenza lineare consiste nel non stare in un sistema lineare inferiore. Così due forme distinte determinano un *fascio* ∞^1; tre forme non situate in un fascio determinano una *rete* ∞^2; ecc.

39. Assoggettando una forma del sistema lineare ad avere una data coppia x, y di punti reciproci si vengono a porre pei parametri reali λ, μ, ... *due* equazioni lineari reali, cioè quelle in cui si scinde la (3) (combinazioni di questa e della sua coniugata): però se x ed y coincidono, cioè se si dà un punto unito, quelle equazioni coincidono nella (4). Ne segue ad esempio che

(*) Questo breve ragionamento vale per un numero qualunque di variabili, e però si applica già ai sistemi lineari di antinvoluzioni e di catene semplici su una forma di 1ª specie. Esso è pur valido per enti di gradi superiori: se le forme iperalgebriche $f(x,\bar{x})$, $\varphi(x,\bar{x})$, ... sono *reali* nel senso fissato nell'introduzione di questo Saggio, le forme *reali* del sistema lineare $\lambda f+\mu\varphi+\ldots$ da esse determinato sono quelle che corrispondono a valori reali dei parametri λ, μ, ... —

Digitized by Google

da k coppie di punti reciproci distinti (ove $2k \leq r$) ed $r-2k$ punti uniti è *in generale* individuata una forma del sistema lineare di dimensione r. — Inoltre è chiaro che ogni coppia di punti reciproci, ed in particolare ogni punto unito, che sia comune a due o più antipolarità (1), (2), ..., od alle loro iperconiche o iperquadriche fondamentali, sarà pur comune a tutte le forme del sistema lineare che esse determinano.

Esaminando i coefficienti delle loro equazioni si scorge che le antipolarità e le iperconiche di un piano formano un sistema lineare di dimensione 8, mentre le antipolarità spaziali e le iperquadriche formano un sistema lineare ∞^{15}. Ne segue che le antipolarità, le iperconiche e le iperquadriche, aventi alcuni punti uniti dati od alcune date coppie di punti reciproci formano sistemi lineari le cui dimensioni si conosceranno in generale immediatamente. In particolare per 8 punti del piano passa in generale un'iperconica ben determinata, per 7 punti un fascio, per 6 una rete, per 5 un sistema triplo, e così via; e vedremo in seguito che le iperconiche di quel fascio hanno in generale ∞^2 punti comuni, quelle della rete ∞^1, e quelle del sistema triplo un sesto punto oltre ai 5 per cui esso è condotto. Similmente per 15 punti dello spazio passa in generale una sola iperquadrica, e per $15-r$ punti un sistema lineare ∞^r avente per *base*, se $r \leq 5$, una ∞^{5-r} di punti comuni.

40. Se nell'equazione (3) del n. 38 si fan variare *ad arbitrio* i parametri $\lambda, \mu, \ldots$, essa rappresenta un *sistema lineare* ∞^{2r} *di antireciprocità* nel quale è contenuto – e corrisponde ai valori *reali* dei parametri - il sistema lineare ∞^r di antipolarità che ivi si considerava. Quel sistema di antireciprocità presenta la particolarità che le antireciprocità in esso contenute sono a due a due inverse fra loro e corrispondenti a valori coniugati di $\lambda, \mu \ldots$, (come subito si scorge formando l'equazione inversa della (3)). Si potrebbe dire che in un siffatto sistema lineare di antireciprocità esiste un'*antinvoluzione* in cui si corrispondono due antireciprocità quando sono fra loro inverse, e per cui è *catena* fondamentale di specie r il sistema delle antipolarità. Queste espressioni corrisponderebbero al fatto che scaturisce dall'equazione (3) e che in seguito adopreremo ripetutamente: che *le rette od i piani polari di un punto rispetto alle antipolarità del sistema lineare costituiscono una catena* (generale o degenere) *nella va-*

Digitized by Google

rietà lineare formata dalle rette o dai piani che corrispondono al punto nelle antireciprocità del sistema, e quella catena è fondamentale per l'antinvoluzione (generale o degenere) *che in questa varietà si ha considerando come omologhi due rette o due piani che corrispondano al punto in due antireciprocità inverse fra loro.* Aggiungiamo che la varietà delle polari del punto è riferita *projettivamente* al sistema lineare di corrispondenze (cioè al sistema descritto dai parametri λ, μ,...), sicchè mutando il punto essa rimane projettiva a se stessa.

In particolare le polari di un punto rispetto ad un fascio di antipolarità del piano concorrono in un punto, che sarà reciproco di quello rispetto a tutte le antipolarità, e formano una catena semplice che sarà riferita projettivamente a quel fascio; i poli di una retta rispetto alle varie antipolarità di questo si potranno considerare come intersezioni delle polari di due punti fissi arbitrari della retta e però formeranno una catena semplice di 2° ordine (v. n. 25) situata sulla conica luogo di quei punti che son reciproci ai punti della retta rispetto a tutte le antireciprocità del fascio (*). Similmente rispetto ad una rete di antipolarità piane le polari di un punto formano una catena doppia di rette; ed i poli di una retta formano la ∞^2 (di ordini 1 e 2) luogo delle intersezioni delle rette omologhe di due catene piane projettive. Ecc. — Nello spazio rispetto ad un fascio di antipolarità i piani polari di un punto stanno pure in un fascio e vi formano una catena semplice, mentre le polari di una retta formano una catena semplice di una schiera di rette di una quadrica, ed i poli di un piano formano una catena semplice cubica. Analogamente per le reti ecc.

41. Come nello studio dei sistemi lineari di antipolarità si presentano naturalmente le antireciprocità non involutorie, così

(*) Se ad ogni punto di un piano si fa corrispondere quel punto che gli è reciproco in due date antireciprocità (e quindi nel fascio da esse determinato si avrà una corrispondenza *iperalgebrica* in cui ad una retta corrisponde una conica, e in generale ad una curva (algebrica) corrisponde una curva (algebrica). Si avverta però che un fatto analogo non si presenta sempre nelle corrispondenze iperalgebriche: generalmente da corrispondenze siffatte le curve non sono trasfomate in curve (v. ad esempio la corrispondenza accennata nella seconda nota al n. 47).

viceversa lo studio di una tale antireciprocità si può collegare strettamente con quello di un fascio di antipolarità. Sia in fatti

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un'antireciprocità non involutoria: perchè un fascio che la contenga passi pure per un fascio di antipolarità esso dovrà (n. 40) contenere anche l'antireciprocità inversa di quella, cioè

$$\Sigma \bar{a}_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 \ ;$$

ed effettivamente il fascio di antireciprocità determinato da queste due,

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma a_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 \ ,$$

contiene un fascio di antipolarità, corrispondenti a valori coniugati di λ e μ. poichè per valori siffatti quest'equazione diventa tale che due coefficienti qualunque corrispondenti agli stessi indici ma invertiti sono sempre coniugati. Ogni punto il quale sia unito per l'antireciprocità data, e quindi anche per l'inversa, sarà pure unito per tutto quel fascio di antireciprocità, e starà perciò sulla base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche; viceversa ogni punto x di quella base soddisferà all'equazione del fascio di antireciprocità in cui si ponga $y = x$ e però sarà unito per ognuna di quelle antireciprocità. Dunque concludiamo che: *i punti uniti di un'antireciprocità non involutoria, piana o spaziale, costituiscono (ove esistano) la varietà base di un fascio d' iperconiche o d'iperquadriche, e viceversa una tal varietà si può sempre considerare come il luogo dei punti uniti di ogni antireciprocità non involutoria di un fascio determinato.*

L'antireciprocità non involutoria da cui siamo partiti può essere *degenere*. Allora (v. n. 10) se si è nel piano essa riferisce antiprojettivamente fra loro due certi fasci di raggi; se si è nello spazio essa dà luogo a due stelle antireciproche ovvero a due fasci antiprojettivi di piani secondo che è degenere di 1ª o di 2ª specie. La sua inversa è data dalla stessa antiprojettività di fasci od antireciprocità di stelle, scambiando però le due forme. In ogni caso sono punti uniti dell'antireciprocità i punti comuni agli elementi omologhi dei due fasci o delle due stelle. Dunque applicando a questi casi le osservazioni precedenti abbiamo che: *Nel piano il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due*

Digitized by Google

fasci antiprojettivi di rette è la base di un fascio d'iperconiche. Nello spazio il luogo dei punti d'incontro degli elementi omologhi di due stelle antireciproche, oppure di due fasci antiprojettivi di piani, è la base di un fascio d'iperquadriche. — In quali casi si possa inversamente considerare la base di un fascio d'iperconiche o d'iperquadriche come generata da due fasci antiprojettivi di rette o di piani, o da due stelle antireciproche, risulterà nello studio speciale che ora passiamo a fare dei fasci d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n[i] 45 e seg[i]).

42. **Dei fasci.** – Cominciamo coll'esame della base di un *fascio d'iperconiche.* È chiaro che se in questo fascio vi sono delle antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, cioè prive di punti uniti, il fascio sarà privo di base; e così pure se vi è un'antipolarità avente un solo punto unito e quindi degenere, la base del fascio o manca affatto o si riduce a quell'unico punto.

In generale dall'equazione del fascio di antipolarità risulta evidente che esso determina su una retta qualunque un fascio di antinvoluzioni, o per eccezione un'antinvoluzione unica. Quindi le iperconiche del fascio tagliano in generale la retta secondo le catene di un fascio; donde segue [v. la nota al n. 18 (*) ed il n. 24] che la varietà Q base del fascio d'iperconiche (**) incontra in generale la retta in due punti, od in nessuno: a seconda dei due casi non vi è, oppure vi è sulla retta una determinata coppia di punti reciproci rispetto a tutte le forme del fascio. Se poi si avesse il caso eccezionale in cui sulla retta fosse determinata un'unica antinvoluzione di punti reciproci da tutte le antipolarità ed antireciprocità del fascio, l'iperconica di questo che passerebbe per un punto della retta non unito per l'antinvoluzione dovrebbe contenere tutta la retta e quindi degenerare in una catena semplice di rette: sicchè solo sulle rette che compongono le iperconiche degeneri del fascio accade quel fatto eccezionale e può l'intersezione con Q esser costituita da una catena semplice (es-

(*) Alcune proprietà ivi trovate pei fasci di catene di una forma semplice sono le analoghe di proprietà che presto vedremo dei fasci d'iperconiche e d'iperquadriche.

(**) Nel seguito chiameremo sempre Q l'insieme dei punti base di un fascio d'iperconiche (e Γ l'ente analogo per un fascio d'iperquadriche).

Digitized by Google

sendo allora tale intersezione quella delle rette stesse con *una* iperconica del fascio, diversa da quella degenere considerata).

Come limite del caso generale in cui una retta non incontra l'ente Q, oppure lo taglia in due punti, si ha il caso in cui la retta è *tangente* a Q in un punto, cioè quei due punti del caso generale vengono a coincidere. Allora nel fascio di catene rettilinee determinate sulla retta dal fascio d'iperconiche ve ne sarà una degenere che si ridurrà a quel solo punto; vale a dire tra quelle iperconiche ve ne sarà una tangente alla retta nel punto considerato; e viceversa. Dunque le tangenti a Q nei suoi vari punti sono le tangenti nei punti stessi alle iperconiche del fascio. Ne segue (n. 40) che le tangenti in un punto ordinario di Q formano in generale una catena semplice (il che concorda con una proposizione generale del n. 15); ma può quella catena ridursi ad una retta sola, tangente comune a tutte le iperconiche; oppure può un punto di Q esser tale che *tutte* le rette passanti per esso vi siano tangenti, e ciò accade se il punto stesso è singolare per un'iperconica degenere del fascio: esso si dirà allora *singolare* o *doppio* anche per Q.

Se l'ente Q esiste, cioè se vi è almeno un punto A il quale sia comune alle iperconiche di un fascio, tali punti, cioè i punti di Q, saranno in generale ∞^2: poichè su ciascuna delle ∞^2 rette passanti per A (escluse le tangenti) vi sarà in generale un altro punto di Q. Ciò se A è un punto ordinario. Se poi esso è singolare per un'antipolarità del fascio, e se questa è degenere di 1ª specie, avendo per fondamentale una catena semplice di rette, l'ente Q si comporrà in generale ancora di ∞^2 punti; mentre se essa è degenere di 2ª specie ed ha quindi una retta per fondamentale, Q si ridurrà in generale ad una catena rettilinea, ed eccezionalmente al solo punto A, oppure a tutta quella retta.

43. Per la base Γ di un fascio d'iperquadriche si possono fare considerazioni analoghe alle precedenti relative alla base Q di un fascio d'iperconiche. Del resto le une si collegano alle altre osservando che un piano qualunque sega il fascio di antipolarità in generale secondo un altro fascio di antipolarità. Per eccezione può un piano dare per sezione una sola antipolarità piana: ciò accade quando il piano stesso sia contenuto in un' iperquadrica del fascio, la quale deve quindi degenerare in una catena semplice di piani. Mentre in questo caso eccezionale un piano di

Digitized by Google

questa catena il quale incontri Γ la taglia generalmente secondo un' iperconica, in generale avviene che un piano qualunque incontra Γ secondo un ente Q.

Una retta qualunque incontra Γ in generale in due punti od in nessuno; è *tangente* a Γ se quei due punti coincidono. Le tangenti a Γ in un suo punto A sono le tangenti in questo alle varie iperquadriche del fascio ed hanno quindi per luogo i piani tangenti in A a queste iperquadriche, piani che formano in generale (n. 40) una catena semplice e che si posson chiamare *tangenti* a Γ (coincidono coi piani che segano Γ secondo enti Q aventi in A un punto doppio): la retta di loro intersezione è la *tangente singolare* in A (cfr. n. 15). Va escluso il caso che A sia punto singolare per un'iperquadrica degenere del fascio: allora esso è *singolare* o *doppio* per Γ, in quanto che ogni retta passante per esso si può considerare come tangente a Γ, non incontrando essa altrove quest'ente, a meno che essa giaccia in quell'iperquadrica, nel qual caso incontra Γ in generale secondo una catena semplice.

Un fascio d'iperquadriche può mancare di punti base. Ma se ne ha uno, appare dalle osservazioni precedenti che esso ne avrà in generale una ∞^4 costituente l'ente Γ; come pure appare subito quali siano i casi d'eccezione.

44. Date le due antipolarità, piane o spaziali,

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \ . \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm}$$

$$(2) \ldots\ldots \quad \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \ , \quad \text{ove} \quad b_{ml} = \bar{b}_{lm} \ ,$$

e quindi il fascio

$$(3) \ldots\ldots \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \ ,$$

si possono collegare varie proprietà o particolarità che quelle o questo possono presentare alle proprietà della collineazione che risulta come prodotto delle due antipolarità: precisamente come nella nota teoria dei fasci di polarità o di quadriche si riduce tutta la classificazione a quella della collineazione prodotto di due polarità. Però nel caso attuale si presentano certi fatti da considerare che non hanno gli analoghi in quella teoria.

Si vede subito che i punti uniti di quella collineazione sono

Digitized by Google

in pari tempo i punti singolari delle antireciprocità degeneri del fascio (3) ed i punti che rispetto alle antipolarità (1) e (2), e quindi rispetto a tutto il fascio (3), hanno una stessa retta od uno stesso piano come polare. Una qualunque di queste proprietà si esprime per un punto x mediante le equazioni

(4) ..... $$\lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum b_{lm} x_l = 0 ,$$

dalle quali eliminando le x si trae

(5) ..... $$| \lambda a_{lm} + \mu b_{lm} | = 0 .$$

Ai valori di $\lambda : \mu$ che son radici di quest'ultima equazione corrispondono per la (3) le antireciprocità degeneri del fascio e per le (4) i relativi punti singolari. Poichè il fascio contiene con ogni antireciprocità anche l'inversa e due antireciprocità inverse fra loro corrispondono a valori coniugati di $\lambda : \mu$, segue che le radici imaginarie dell'equazione (5) saranno a due a due coniugate; cosa evidente del resto poichè il determinante (5) in causa delle ipotesi fatte sulle a e le b è funzione reale di λ e μ. Se poi una radice imaginaria della (5) annulla anche i primi suddeterminanti, lo stesso fatto accadrà per la radice coniugata (ed entrambe saranno radici doppie) e l'antireciprocità corrispondente (come pure la sua inversa) sarà degenere di 2ª specie. In ogni caso i punti singolari di due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè i punti dati dalle (4) per radici coniugate dell'equazione (5), costituiscono i due centri od i due assi dei fasci antiprojettivi o delle stelle antireciproche che vengono a definire quelle antireciprocità degeneri; dalle intersezioni degli elementi omologhi di quei fasci o di quelle stelle viene allora generato l'ente base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n. 41).

45. Applichiamo queste considerazioni anzitutto al caso più generale di un fascio d'iperconiche, cioè a quello in cui la collineazione che abbiamo nominata è generale, sicchè l'equazione (5) ha 3 radici distinte, e nel fascio vi sono 3 distinte antireciprocità degeneri. *Due casi* possono presentarsi secondo che quelle radici sono tutte reali, ovvero una sola è reale e le altre due immaginarie coniugate; corrispondentemente a ciò abbiamo due specie generali di fasci d'iperconiche, o di enti Q, o (n. 41) di antireciprocità piane non involutorie.

Digitized by Google

Nel 1° caso le tre antireciprocità degeneri sono tutte antipolarità: detti A, B, C i loro punti singolari, è chiaro che la polare di A rispetto al fascio sarà la retta BC, e così via; sicchè ABC sarà un triangolo polare ordinario od autopolare di 1ª specie (v. n. 34) per tutte le antipolarità del fascio. Riferendole a questo triangolo le equazioni di queste corrispondenze e quindi delle iperconiche del fascio si riducono alla 1ª forma canonica del n. 36. Da ciò si trae subito una nuova distinzione di casi secondo che nel fascio vi sono o no delle antipolarità prive d'iperconiche fondamentali. Se vi sono, esisterà tra le antipolarità degeneri una sola dotata d'iperconica fondamentale, cioè il fascio d'iperconiche ne conterrà una sola degenerata in una catena semplice di rette; le iperconiche del fascio non s'incontreranno affatto, cioè non esisterà un ente base Q. Se invece il fascio non contiene antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, fra le iperconiche del fascio ve ne saranno tre degenerate in catene di rette di centri A, B, C, ed esisterà un ente Q base del fascio, ente che si potrà dunque considerare come l'intersezione di due catene semplici di rette. In questo caso Q contiene 3 schiere ∞^1 di catene rettilinee situate risp. sulle rette delle 3 catene nominate di centri A, B, C; per ogni punto di Q passa una sola catena di ciascuna schiera; due catene di schiere diverse si tagliano in un sol punto; le catene di una schiera punteggiano projettivamente due altre catene qualunque, ecc.

Nel 2° caso, in cui una sola radice della (5) è reale, una sola delle antireciprocità degeneri sarà un'antipolarità e sia A il suo punto singolare. Le altre due inverse fra loro abbiano per punti singolari B e C; esse determineranno fra i fasci che hanno questi punti per centri un'antiprojettività. In questo caso, e solo in questo, *il fascio d'iperconiche avrà per base un ente* Q *generato dalle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi* B, C (*) (**). La polare del punto A rispetto al fascio

(*) È chiaro che per un siffatto ente Q generato da due fasci antiprojettivi B, C non si può spostare il centro di uno dei fasci generatori in modo che esso rimanga antiprojettivo all'altro; ed invero se l'ente stesso fosse generato dai due fasci antiprojettivi B, C′, esso risulterebbe pure da due fasci *projettivi* C, C′, e però sarebbe una conica: il che è assurdo, poichè una conica non può stare in alcuna iperconica (cfr. una nota al n. 33).

(**) Applicando al fascio delle iperconiche che passano per 7 punti qualunque del piano i risultati sopra ottenuti abbiamo che: *sette punti qualunque*

Digitized by Google

sarà evidentemente la retta BC. Quanto alla polare di B si osservi che mentre a questo punto nell'una delle due antireciprocità degeneri e fra loro inverse corrisponde una retta indeterminata, nell'altra gli corrisponde quella retta del fascio B che è omologa alla CB nell'antiprojettività fra i fasci B e C: tale retta sarà dunque la polare di B e dovrà quindi passare per A. Similmente la polare di C sarà la CA e corrisponderà alla BC del fascio B nell' antiprojettività dei fasci B e C. Il triangolo ABC è dunque autopolare di 2ª specie per tutte le antipolarità del fascio (*). Queste corrispondenze sono tutte dotate d'iperconiche fondamentali aventi comuni le tangenti BA e CA nei punti B e C (**). Una sola di esse degenera in una catena semplice di

---

del piano ne determinano in generale 3 *oppure* 1 *tali che da ognuno di questi essi son projettati mediante sette rette d'una catena semplice; nel caso che vi sia solo un punto siffatto esisteranno inoltre altri due punti distinti dai quali i sette punti dati vengon projettati mediante due gruppi antiprojettivi di sette rette.* Un analogo corollario si potrà dedurre dai corrispondenti risultati che tosto otterremo pei fasci d'iperquadriche.

(*) Dall'esistenza in ambo i casi di un triangolo autopolare comune a tutte le antipolarità del fascio risulta sotto un nuovo aspetto il fatto (n. 40) che le polari di un punto rispetto a quelle antipolarità formano una catena semplice nel fascio di rette che le contiene. Invero quelle rette dovranno (nⁱ 30 e 34) far parte della catena piana che ha il triangolo detto per triangolo unito della stessa specie che quella secondo cui è autopolare per le antipolarità, e che inoltre passa pel punto dato. Da ciò segue appunto (cfr. n. 20) che quelle rette formano una catena. Aggiungiamo che per la 1ª specie di fasci di antipolarità queste catene di rette passano tutte pei vertici del triangolo autopolare, mentre per la 2ª specie esse contengono un vertice e separano armonicamente gli altri due.

(**) Si presenta così per le iperconiche un fatto opposto a quello che accade per le coniche. Mentre per due coniche l'avere punti di contatto è una particolarità di posizione, per due iperconiche può accadere nel caso più generale di avere comuni le tangenti in due punti d'incontro, senza che ciò costituisca una particolarità, anzi essendo questo caso altrettanto generale quanto quello contrario. Però si avverta subito che per due iperconiche un punto comune avente la stessa tangente non è sempre *punto di contatto* nello stesso senso che si avrebbe per due coniche; esso non è in generale *punto doppio* per l'intersezione delle due iperconiche, vale a dire tale che conti due volte fra i punti d'incontro di quest'intersezione e di una retta qualunque passante per esso. Un tal punto si ha solo (n. 42) quando esso è singolare per un'*antipolarità* degenere del fascio. — Osservazioni analoghe si potrebbero fare al nº seg., ove vedremo che nel caso più generale due iperquadriche possono avere comuni i piani tangenti in due o quattro particolari punti d'incontro.

Digitized by Google

rette, catena di centro A e contenente le rette AB, AC. Le rette di questa catena sono le sole su cui secondo il n. 42 vi sia un'unica corrispondenza di punti reciproci rispetto alle due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè su cui i due fasci antiprojettivi B, C diano per sezione due punteggiate in antinvoluzione. L'ente Q contiene una ∞^1 di catene rettilinee poste su una parte delle rette di quella catena, parte che ha per estremi le rette AB, AC su cui quelle catene rettilinee d'incontro con Q si riducono risp. ai punti B, C; sulle rette dell'altra parte della catena non vi sono punti d'incontro con Q.

46. Risultati simili ai precedenti si possono ottenere in modo perfettamente analogo pei fasci d'iperquadriche. Qui però i casi in cui si suddivide il caso generale sono *tre*, corrispondenti all'essere 4, ovvero 2, o nessuna, le radici reali dell'equazione (5), e quindi 4, 2, 0 le antipolarità fra le quattro antireciprocità degeneri del fascio.

Nel 1° caso il fascio ammette un tetraedro polare ordinario od autopolare di 1ª specie. Valendosi di questo (segando ad esempio con una catena spaziale che ne contenga i vertici e ricorrendo al n 32 ed a proposizioni note sui fasci di quadriche reali) si vede che o non vi sono punti base, ed allora due sole delle 4 antipolarità degeneri hanno dei coni iperquadrici fondamentali; oppure il fascio d'iperquadriche contiene 4 coni ed allora vi è un ente Γ base del fascio (contenente 4 serie ∞^3 di catene rettilinee, ecc., ecc.).

Nel 2° caso (e non nel 1°) *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente* Γ *generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* C, D. I piani di quelle due stelle che corrispondono alla comune retta CD nella loro antireciprocità saranno tangenti risp. in C e D a tutte le iperquadriche del fascio e si taglieranno secondo una retta contenente i centri A, B dei due coni del fascio. Il tetraedro ABCD sarà autopolare di 2ª specie per tutte le iperquadriche.

Nel 3° caso *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente* Γ *generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* A, B *ed anche da altre due stelle antireciproche* C, D. I 4 punti A, B, C, D hanno per polari rispetto a tutto il fascio risp. i piani ACD, BCD, ABC, ABD e sono quindi vertici di un tetraedro autopolare di 3ª specie co-

Digitized by Google

mune a tutte le iperquadriche. Queste saranno tutte rigate e conterranno il quadrilatero semplice ACBD. Fra esse non vi sarà alcun cono (*).

(*) *Sui fasci d'iperquadriche in uno spazio qualunque.* — Sia:

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un fascio d'antipolarità di S_d, ove $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$, $b_{ml} = \bar{b}_{lm}$; e s'indichino con α_{ml}, β_{ml} i rapporti dei complementi algebrici di queste quantità, risp. nei determinanti (supposti non nulli) formati con esse, ai determinanti stessi. Il determinante caratteristico

$$| \lambda a_{lm} + \mu b_{lm} |$$

di quel fascio, ossia della collineazione prodotto delle antipolarità con cui il fascio stesso s'è determinato, avrà le radici imaginarie a due a due coniugate e corrispondenti a divisori elementari in egual numero e di gradi uguali. Ad ogni radice corrisponde uno spazio fondamentale di punti che si compone di punti uniti della collineazione ed è singolare per un'antireciprocità del fascio e luogo di punti ognun dei quali ha uno stesso S_{d-1} per polare rispetto a tutto il fascio. Due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate sono sostegni di due forme antireciproche le quali generano colle intersezioni degli spazi omologhi l'ente base del fascio d'iperquadriche. Fra essi passa pure un altro legame geometrico notevole, che si collega a quello, ma che possiamo anche stabilire in modo indipendente. Sia x un punto dello spazio fondamentale di punti corrispondente alla radice $\lambda : \mu$, sicchè

$$\lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum_l b_{lm} x_l = 0 \ ;$$

le coordinate dello spazio polare di x rispetto a tutte le forme del fascio si potranno rappresentare con ξ_m, ove

$$\xi_m = \lambda \sum_l a_{lm} x_l = - \mu \sum_l b_{lm} x_l \ ,$$

e quindi

$$\bar{\xi}_m = \bar{\lambda} \sum_l a_{ml} \bar{x}_l = - \bar{\mu} \sum_l b_{ml} \bar{x}_l \ .$$

Ne segue che questo S_{d-1} sarà nello spazio fondamentale di S_{d-1} definito dalle equazioni

$$\lambda' \sum_m \alpha_{mk} \xi_m + \mu' \sum_m \beta_{mk} \xi_m = 0$$

se si ha

$$\lambda' \bar{\lambda} \sum_{lm} \alpha_{mk} a_{ml} \bar{x}_l - \mu' \bar{\mu} \sum_{lm} \beta_{mk} b_{ml} \bar{x}_l = 0 \ ,$$

relazione che, per le note proprietà dei determinanti, si riduce (dopo esser stata divisa pel fattore $\bar{x}_k$) a

$$\lambda' \bar{\lambda} - \mu' \bar{\mu} = 0 \ .$$

Da essa si trae (v. i n[i] 12 e 13 del lavoro già citato *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie*) che quello spazio fondamentale di S_{d-1} è quello

Digitized by Google

47. *I casi particolari* più notevoli nei fasci di antipolarità e quindi nella posizione mutua di due iperconiche od iperqua-

---

associato (nel senso che ivi ed altrove ho fissato) allo spazio fondamentale di punti che corrisponde alla radice $\bar{\lambda}:\bar{\mu}$. Dunque: *di due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate l'uno qualunque ha per polare rispetto al fascio di antipolarità quello spazio fondamentale di* S_{d-1} *che è associato all'altro.* Possiamo chiamare *associati* due siffatti spazi fondamentali di punti.

Da quel risultato si deduce (v. loc. cit.) che ogni spazio fondamentale di punti ha per polare uno spazio che contiene tutti gli spazi fondamentali di punti tranne l'associato di quello. Uno spazio fondamentale di punti che non sia autoassociato starà dunque su tutte le iperquadriche del fascio (e lungo esso vi sarà uno spazio tangente fisso). E così pure starà sulla base del fascio lo spazio che congiunge due o più spazi fondamentali di punti fra i quali non ve ne siano due associati (nè, in particolare, uno autoassociato). Se poi uno spazio fondamentale di punti è autoassociato, la sua intersezione con lo spazio fondamentale di S_{d-1} che gli è associato (e polare) starà nelle iperquadriche: una tal intersezione esiste solo quando i divisori elementari corrispondenti al detto spazio non sono tutti lineari.

Quando si conosce la specie di una forma del fascio, le osservazioni precedenti danno delle condizioni pel determinante caratteristico. Così se supponiamo anzitutto che nel fascio vi sia una forma definita, cioè un'antipolarità priva di punti uniti, il fascio sarà privo di base, e però *le radici del determinante caratteristico saranno tutte reali e corrispondenti a divisori elementari di* 1° *grado.* Di questa proprietà godrà in particolare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22}+\rho & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

ove $a_{ml}=\bar{a}_{lm}$. Essa costituisce una notevole estensione di un noto teorema sull'equazione da cui dipendono le perturbazioni secolari (teorema che si riferisce al caso che le a_{lm} siano reali), e fu data prima dal sig. HERMITE nel 1855 (*Comptes Rendus*, t. 41, p. 181), e poi indipendentemente e in modo più completo dal CLEBSCH nel 1859 (*Crelle J.*, t. 57, p. 327; e t. 62, p. 232).

Possiamo ottenere subito una proposizione più generale supponendo anzitutto di avere un fascio pel quale il determinante caratteristico abbia le radici tutte distinte. Dicendo r il numero delle coppie di radici imaginarie coniugate e congiungendo r punti uniti corrispondenti a radici prese risp. in quelle r coppie, avremo degli spazi S_{r-1} che giaceranno su tutte le iperquadriche del fascio. Se dunque nel fascio vi è un'iperquadrica contenente degli spazi S_{r-1}, ma non degli S_r, il che significa (v. una nota al n. 36) che ridotta a forma canonica essa ha r coefficienti di un segno e $d+1-r(\geq r)$ del segno opposto, il determinante caratteristico non potrà avere più di r coppie di radici imaginarie coniugate. Quando poi si abbia un fascio pel quale le radici non siano tutte distinte basterà considerarne uno infinitamente vicino per

Digitized by Google

driche, si hanno quando qualcuna delle radici del determinante caratteristico ne annulla anche i primi suddeterminanti, ecc.

Nel piano questo fatto può accadere solo per una radice, la quale sarà perciò reale. Ad essa corrisponderà nel fascio un'iperconica degenere di 2ª specie, cioè ridotta ad una retta. L'intersezione di questa con un'altra iperconica del fascio darà la base di questo: sicchè questa base o non esisterà o sarà una catena semplice di punti di quella retta (catena che può ridursi ad un sol punto) ed allora questi punti saranno da considerarsi come doppi per quella base e saranno punti di contatto per tutte le iperconiche del fascio, avendo per tangenti le rette che compongono l'altra iperconica degenere che il fascio in generale ammette. —

Per un fascio d'iperquadriche se una radice *reale* del determinante caratteristico annulla i primi suddeterminanti, essa corrisponde ad un'iperquadrica degenere di 2ª specie, i cui punti costituiranno una catena semplice di piani oppure soltanto una retta; se la base del fascio non è generabile mediante due stelle antireciproche, il fascio ammetterà ancora due iperquadriche degeneri di 1ª specie, le quali possono coincidere in una nuova iperquadrica degenere di 2ª specie. Tale sarebbe il fascio che ha per base l'intersezione di due catene semplici di piani aventi gli assi sghembi fra loro: quest'intersezione si compone di ∞^2 rette che costituiscono un ente duale a se stesso. — Se poi una radice annulla anche i suddeterminanti di 2° ordine, vi sarà nel fascio un'iperquadrica degenere di 3ª specie, cioè ridotta ad un piano; la base, ove esista, starà in questo piano e sarà in generale un'iperconica lungo cui tutte le iperquadriche del fascio avranno lo stesso cono tangente; ecc., ecc.

Altro caso notevole di fasci d'iperquadriche si ha quando una radice *immaginaria* annulla i primi suddeterminanti del determinante caratteristico, sicchè lo stesso fatto accade per la radice

dedurne che questa proposizione rimane ancor vera. Possiamo dunque dire in generale che *quando nel fascio considerato di forme ve n'è una che ridotta a forma canonica viene ad avere* k *per differenza fra i numeri di coefficienti risp. dei due segni*, *il determinante caratteristico ha almeno* k *radici reali (distinte o coincidenti)*. — Nel caso particolare in cui le forme del fascio siano a coefficienti reali, questo teorema si riduce ad uno contenuto nell'*Inauguraldissertation* del sig. KLEIN (cfr. *Math. Ann.* XXIII, nota a pag. 562).

Digitized by Google

coniugata. Allora vi sarà nel fascio un'antireciprocità non involutoria la quale sarà degenere di 2ª specie, cioè si ridurrà ad un'antiprojettività fra due fasci di piani (mentre l'antireciprocità inversa si ridurrà all'inversa di quest'antiprojettività). *Il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente Γ generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due fasci antiprojettivi di piani*, o ciò che fa lo stesso, *un ente Γ generato dalle congiungenti i punti omologhi di due punteggiate antiprojettive* (sezioni di quei fasci coi loro assi, scambiati; assi che supponiamo sghembi) (*) (**).

(*) Un esempio di siffatto ente Γ si ha nel luogo delle rette di un'iperquadrica rigata che si appoggiano a due generatrici sghembe qualunque; poichè queste vengono punteggiate antiprojettivamente da quelle rette. —

Abbiamo visto al n. 45 che *le rette di un piano sulle quali due dati fasci antiprojettivi di rette determinano un'antinvoluzione sono le rette di una catena semplice*. Questa proposizione non ha in generale l'analoga per due stelle antireciproche: cioè non esistono in generale dei piani su cui queste due stelle determinino, delle antipolarità piane (v. ad es. il n. 43). Solo si può dire, come risulta dalle cose esposte, che ove esistano cotali piani essi formano una catena semplice (iperquadrica degenere che contiene l'ente Γ generato dalle due stelle antireciproche) — La proposizione ricordata relativa al piano conduce a quest'altra relativa alle *rette dello spazio le quali segano due fasci antiprojettivi di piani secondo un'antinvoluzione*, o, ciò che fa lo stesso, *alle rette dalle quali si projettano secondo un'antivoluzione due punteggiate antiprojettive date* (sezioni di quei fasci coi loro assi): tali rette formano una varietà ∞^5 tale che in ogni piano ne giace una catena semplice e per ogni punto ne passa una catena semplice. Se si considerano come omologhi il centro ed il piano di una tal catena si viene per tal modo ad avere una corrispondenza univoca fra i punti ed i piani dello spazio sì che ogni punto sta nel piano omologo: la corrispondenza è iperalgebrica, ma *non è* un'antireciprocità.

(**) Verso la fine del n. 26 abbiamo esaminato la natura della corrispondenza fra i punti di due rette di un piano le quali si considerino come sezioni di una catena piana di rette. Un'analoga corrispondenza fra i punti di due piani π, π' si ha considerando come omologhi due punti quando stanno su una *corda* di una catena spaziale fissa C, cioè su una retta unita dell'antinvoluzione che ha questa catena per fondamentale. Allora ad una retta qualunque di π corrisponderà rispetto a quest'antinvoluzione una retta punteggiata antiprojettivamente a quella: dunque le corde di C uscenti dai punti di quella formano un ente Γ della specie che sopra è stata per ultima discorsa, e questo segherà π' secondo una ∞^2 Q, base di un fascio d'iperconiche. Alle rette di ogni piano corrispondono dunque nell'altro enti Q siffatti. La corrispondenza fra i due piani si potrebbe dunque, come quella analoga fra due rette ora ricordata, chiamare *quadratica* (iperalgebrica).

Digitized by Google

48. Infine altri casi particolari di fasci d'iperconiche o d'iperquadriche, degni di menzione, si hanno quando il determinante caratteristico è identicamente nullo (il che finora si escludeva), cioè tutte le forme del fascio sono degeneri. Osservando che la retta od il piano polare di un punto singolare di una forma rispetto ad un'altra sarà polare del punto rispetto a tutte le forme, e conterrà quindi i punti singolari di tutte, si giunge facilmente alla conclusione che oltre ai fasci in cui un punto singolare è comune a tutte le forme si hanno solo i fasci seguenti.

Il fascio d'iperconiche degeneri, o catene semplici di rette, determinato da due tali forme prese in modo da avere una retta comune. La base del fascio si comporrà (v. n. 20), oltre che di questa retta, di una catena piana. Questa catena piana incontrerà quella retta secondo una catena semplice, che sarà il luogo dei punti singolari delle iperconiche del fascio.

Il fascio d'iperquadriche degeneri determinato da due coni iperquadrici che abbiano comune una generatrice ed il piano tangente lungo essa. Il luogo dei vertici dei coni del fascio sarà ancora una catena posta su quella retta. Però vi sarà nel fascio un'iperquadrica contenente il piano nominato e quindi degenere di 2ª specie. (*). (**)

(*) Lo studio generale dei fasci d'iperquadriche degeneri di ogni spazio si può condurre in modo simile a quello dei fasci di quadriche degeneri (v. ad es. SEGRE, t. 19 di questi *Atti*; e BERTINI, *Rendic. Acc. Lincei*, ser. 4ª, t. II).

(**) *Su alcune forme invariantive del sistema di due iperconiche od iperquadriche.* — Rappresentiamo con la notazione simbolica le due forme ripetutamente considerate, sicchè:

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = a_x \bar{a}_{\bar{y}} = a'_x \overline{a'}_{\bar{y}} = \cdots$$

$$\Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = b_x \bar{b}_{\bar{y}} = b'_x \overline{b'}_{\bar{y}} = \cdots$$

Allora servendoci degl'invarianti che pel campo binario furono introdotti nella nota al n. 18, ed applicando il principio di trasporto di CLEBSCH (convenientemente esteso) otteniamo subito questi primi risultati. Nel piano le rette su cui quelle due antipolarità (iperconiche) determinano due antinvoluzioni (catene semplici) permutabili od armoniche, inviluppano l'iperconica

$$(ab\xi)(\overline{ab\xi}) = 0 .$$

Nello spazio le rette aventi la stessa relazione con due antipolarità spaziali (iperquadriche) soddisfano l'equazione

$$(ab\xi\eta)(\overline{ab\xi\eta}) = 0 ,$$

Digitized by Google

49. Reti d'iperconiche; fili cubici. — Da tre antipolarità piane che non formino fascio

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \;, \qquad (a_{ml} = \bar{a}_{lm})$$

$$(2) \ldots\ldots \quad \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \;, \qquad (b_{ml} = \bar{b}_{lm})$$

$$(3) \ldots\ldots \quad \Sigma c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \;, \qquad (c_{ml} = \bar{c}_{lm})$$

---

e però formano una varietà ∞^7 tale che le rette giacenti in un piano inviluppano un'iperconica, e quelle uscenti da un punto formano un cono iperquadrico. — Nel piano l'*equazione tangenziale dell'ente* Q intersezione delle due iperconiche considerate, cioè base del loro fascio, vale a dire l'equazione soddisfatta dalle rette che segano quelle iperconiche secondo catene semplici tangenti fra loro, è:

$$(ab\xi)(\overline{ab\xi}).(a'b'\xi)(\overline{a'b'\xi}) - (aa'\xi)(\overline{aa'\xi}).(bb'\xi)(\overline{bb'\xi}) = 0 \,.$$

Un'analoga equazione in coordinate di rette tangenti si ha per l'ente Γ intersezione di due iperquadriche basta rendere quaternari i determinanti ternari che figurano nell' equazione precedente, introducendovi ancora i simboli η, od $\bar{\eta}$).

Degl'invarianti delle due iperconiche od iperquadriche si ottengono subito considerando il determinante del fascio che esse determinano; e da essi applicando il principio di trasporto si traggono, similmente a quanto ora si fece, altre forme invariantive. Così nel caso delle iperconiche si ha

$$|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}| = \Delta\lambda^3 + \mathrm{I}\lambda^2\mu + \mathrm{I}_1\lambda\mu^2 + \Delta_1\mu^3$$

ove Δ e Δ_1 sono i determinanti delle due forme

$$\Delta = |a_{lm}| = \frac{1}{6}(aa'a'')(\overline{aa'a''})$$

$$\Delta_1 = |b_{lm}| = \frac{1}{6}(bb'b'')(\overline{bb'b''}) \,,$$

mentre I ed I_1 sono due invarianti simultanei

$$\mathrm{I} = \Sigma b_{lm} A_{lm} = \frac{1}{2}(aa'b)(\overline{aa'b})$$

$$\mathrm{I}_1 = \Sigma a_{lm} B_{lm} = \frac{1}{2}(abb')(\overline{abb'}) \,,$$

i quali col loro annullarsi esprimono una particolare posizione *armonica* delle due forme, della quale ci occuperemo nel seguito di questo Saggio. Il discriminante della forma cubica in λ, μ è un nuovo invariante che col suo segno serve ad indicare quale fra i due casi principali discussi al n. 45 presentano le due iperconiche; mentre annullandosi esprime che l'intersezione di queste ha un punto doppio. Col principio di trasporto dall'invariante I si

Digitized by Google

è determinata una rete (di antireciprocità o di antipolarità).

$$(4) \ldots \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \; .$$

Due punti qualunque x, y reciproci rispetto a quelle tre saranno reciproci rispetto a tutte le antipolarità (ed antireciprocità) della rete, e se coincidono daranno un punto unito o punto *base* della rete. La condizione necessaria e sufficiente perchè un punto x faccia parte di una tal coppia di punti reciproci rispetto alla rete si avrà eliminando le $\bar{y}_m$ dalle equazioni (1), (2), (3), cioè sarà:

$$(5) \ldots \quad \begin{vmatrix} \Sigma a_{l1} x_l \, , & \Sigma a_{l2} x_l \, , & \Sigma a_{l3} x_l \\ \Sigma b_{l1} x_l \, , & \Sigma b_{l2} x_l \, , & \Sigma b_{l3} x_l \\ \Sigma c_{l1} x_l \, , & \Sigma c_{l2} x_l \, , & \Sigma c_{l3} x_l \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Alla stessa condizione giungiamo se vogliamo che un punto x sia singolare per un'*antireciprocità* della rete. Se quest'antireciprocità corrisponde ai valori (complessi) λ, μ, ν dei parametri che compaiono nella (4), dovrà essere (successivamente per $m = 1, 2, 3$).

$$(6) \ldots \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l + \mu \Sigma b_{lm} x_l + \nu \Sigma c_{lm} x_l = 0 \; ,$$

donde eliminando λ, μ, ν si ritorna alla (5) (*). Questa sarà

---

trae che i piani su cui due date antipolarità dello spazio (iperquadriche) determinano due antipolarità piane (iperconiche) in posizione armonica inviluppano un'iperquadrica

$$(a a' b \xi)\,(\overline{a a' b \xi}) = 0 \; ;$$

e dal discriminante testè nominato si trarrebbe similmente l'*equazione tangenziale dell'ente* Γ intersezione di due iperquadriche, cioè l'equazione soddisfatta dai piani che gli sono tangenti. — Ecc., ecc.

(*) Anche sinteticamente si vede subito che per ogni punto il quale sia singolare per un'antireciprocità della rete, cioè abbia la stessa retta per polare rispetto ad un fascio di antipolarità della rete (v. n. 44), esiste un punto che gli è reciproco rispetto a tutte le forme della rete (il punto d'incontro di quella retta colla polare del punto rispetto ad una forma che stia nella rete ma non in quel fascio). Viceversa se un punto A ne ammette uno A′ come reciproco rispetto a tutta la rete, la catena piana delle rette polari di A rispetto alla rete (n. 40) dovendo comporsi di rette passanti per A′ degenererà in generale in questo fascio; e però vi sarà in questo (n. 14) una retta singolare la quale terrà luogo delle ∞^1 rette di una catena semplice contenuta nella catena piana, cioè sarà polare di A rispetto a tutto un fascio di antipolarità

Digitized by Google

similmente soddisfatta dal punto singolare dell'antireciprocità inversa, la quale corrisponde ai valori coniugati di λ, μ, ν. Quando questi valori sono reali, i due punti coincidono nel punto singolare di un'*antipolarità* della rete. —

Osserviamo però subito che l'equazione (5) potrebbe ridursi ad un'identità; potrebbe cioè accadere che ogni punto del piano ne avesse uno reciproco rispetto a tutta la rete, ossia che ogni forma della rete fosse degenere. Ricordando (n. 48) che un fascio d'iperconiche è tutto composto di forme degeneri solo quando le due forme che lo determinano hanno comune il punto singolare, ovvero quando la base del fascio si spezza in una retta ed una catena piana, è facile dedurne che una rete d'iperconiche si compone tutta di forme degeneri solo nei seguenti casi. 1° quando le tre forme che la determinano hanno comune il punto singolare. 2° quando le tre iperconiche degeneri contengono una stessa catena piana: i punti di questa costituiscono allora la base della rete e le iperconiche di questa sono le ∞^2 catene semplici di rette che la projettano dai suoi punti (cfr. n. 20); due punti armonici rispetto alla catena piana sono reciproci rispetto alla rete; ecc. 3° quando le tre iperconiche contengono una stessa retta: questa sarà allora comune a tutte e ne conterrà i punti singolari; sulla catena piana in cui due iperconiche si segano ancora, un'altra determinerà (ni 25, 26) una catena semplice di 2° ordine (di punti di una conica) la quale unitamente alla retta nominata costituirà la base della rete.

50. Nel seguito noi escluderemo sempre questi casi in cui tutte le forme della rete sono degeneri. Con questa restrizione avremo dunque dal n° prec. i risultati seguenti.

La rete determina una cubica γ e due corrispondenze iperalgebriche univoche, involutorie (o simmetriche), fra i suoi punti. Le coppie di punti omologhi dell'una corrispondenza, Ω, sono le coppie di punti reciproci rispetto a tutte le forme della rete. Le coppie di punti omologhi dell'altra corrispondenza, Π, sono

della rete: il punto A sarà dunque singolare per un'antireciprocità degenere della rete. — Quando quest'antireciprocità è involutoria si presenta il caso più particolare in cui la catena piana delle polari di A degenera in una catena semplice di rette del fascio A'; ognuna di queste figurando come singolare cfr. n. 52).

Digitized by Google

le coppie di punti singolari delle antireciprocità degeneri della rete, cioè i centri delle coppie di fasci antiprojettivi che fan parte della rete.

Di qui derivano altre conseguenze importanti. Due punti reciproci rispetto alla rete di antireciprocità dovranno in particolare trovarsi su due raggi omologhi di due fasci antiprojettivi costituenti un'antireciprocità degenere della rete. Dunque *i due fasci antiprojettivi di rette aventi i centri in due punti omologhi qualunque di* Π *projettano i punti di* γ *che si corrispondono in* Ω. In altri termini *alle coppie di punti di* γ *allineate con un punto fisso qualunque* A *di* γ *corrispondono mediante* Ω *delle coppie di punti allineate col punto* B *che è omologo di* A *in* Π, *e la corrispondenza che così si ha fra i due fasci di rette* A, B *è antiprojettiva.* In particolare considerando una tangente condotta da A a γ si vede che le dovrà corrispondere una tangente condotta da B, cioè *nella corrispondenza* Π *sono omologhi due punti quando sono i tangenziali su* γ *di due punti omologhi di* Ω. *Così i tangenziali dei punti uniti di* Ω *saranno punti uniti per* Π.

51. I punti uniti della corrispondenza Ω sono, come già notammo, i punti base della rete. Può accadere però che essi manchino completamente: basta perciò che nella rete vi sia un'antipolarità priva d'iperconica fondamentale (o coll'iperconica fondamentale degenerata in un punto, che non sia punto base). Ma se esistono, quei punti formeranno in generale sulla cubica γ una varietà iperalgebrica ∞^1, che noi diremo per brevità *filo del* 3° *ordine* o *filo cubico* (ed indicheremo ancora con Ω); chiamando in generale *fili* tutte le varietà di ∞^1 punti, e in particolare *fili del* 1° *ordine* le catene rettilinee e *fili* (piani) *del* 2° *ordine* le catene coniche. Vedremo che un filo cubico può comporsi di un sol *ramo*, o tratto continuo, ovvero anche di due rami.

I punti uniti della corrispondenza Π sono i punti singolari delle antipolarità degeneri della rete. Ognuno di essi è dunque centro di un fascio di rette nel quale si ha un'antinvoluzione che projetta la corrispondenza Ω: ogni retta unita di quest'antinvoluzione sega dunque γ ancora in due punti i quali o sono omologhi in Ω, ovvero sono uniti per Ω. Chiamando *corda* di Ω ogni retta la quale o incontri in due punti il filo cubico Ω, ov-

Digitized by Google

vero contenga due punti reciproci della rete cioè due punti omologhi nella corrispondenza Ω, potremo dire che le catene semplici di rette che, come iperconiche degeneri, fan parte della nostra rete, si compongono tutte di corde di Ω. Viceversa ogni corda di Ω fa parte di un'iperconica degenere della rete, giacchè l'iperconica della rete che è individuata dal passare per due punti arbitrari di quella retta avrà su questa 4 punti uniti, ovvero 2 punti uniti e 2 punti reciproci, assunti in modo arbitrario, e però dovrà contenere tutta la retta. Poichè le corde di Ω, anche quando la rete non ha un filo cubico base Ω, sono ∞^2, si vede che sempre vi saranno nella rete ∞^1 iperconiche degenerate in catene semplici di rette (*): il che risultava anche da ciò che (n. 45) in ogni fascio d'iperconiche contenuto nella rete vi è sempre un'iperconica (o tre) così degenerata. — *La corrispondenza* Π, a differenza della Ω, *ammette sempre in generale un filo* Π *di punti uniti*. Ogni corda (e in particolare ogni tangente) del filo Ω sega il filo Π. In altri termini ogni retta che congiunga un punto del filo Ω ad un punto del filo Π incontra ancora la curva γ in un 3° punto che sta pure nel filo Ω. Ecc. ecc.

52. Possiamo dimostrare che *il filo* Π *è pure del* 3° *ordine*, e più precisamente che *la corrispondenza* Π *fra i punti di* γ *si può, al modo stesso di* Ω, *considerare come la corrispondenza delle coppie di punti reciproci rispetto ad una rete d'iperconiche.*

Invero sia A un punto qualunque del filo Π e A' il suo reciproco rispetto alla rete, cioè l'omologo di A nella corrispondenza Ω. Il punto A ammette una retta fissa passante per A' come polare rispetto a tutto un fascio di forme della rete che comprenda l'antipolarità degenere di cui A è punto singolare. A seconda della natura di quel fascio (n. 45) accadrà che i due punti in cui quella retta incontra ancora γ saranno singolari per

(*) Se si projetta un filo cubico Ω da un suo punto su una retta r, e si considerano le projezioni delle due serie ∞^1 di catene rettilinee che sulle rette di un'iperconica degenere della rete son determinate da due altre (non formanti un fascio con quella), si vede che esse daranno su r *due fasci projettivi di catene rettilinee dai quali vien generato il filo di* 2° *ordine projezione di* Ω: si ottengono così tutti i fili rettilinei del 2° ordine e le loro generazioni projettive (cfr. la nota al n. 26).

due antipolarità del fascio, cioè saranno punti del filo Π, ovvero saranno singolari per due antireciprocità degeneri del fascio inverse l'una dell'altra, cioè saranno punti omologhi della corrispondenza Π. Facendo muovere quel fascio di forme in modo che descriva tutta la rete passando sempre per l'antipolarità che ha in A un punto singolare, la retta considerata, polare di A, descriverà intorno ad A′ una catena semplice (poichè si può considerare come polare di A rispetto ad un'antipolarità mobile di un fascio contenuto nella rete ma *non* passante per la suddetta antipolarità degenere). Ciò posto, se il punto A percorre tutto il filo Π, il suo reciproco A′ descriverà un nuovo filo Π′ sì che ogni punto di questo sarà centro di una catena semplice composta di rette che projettano il filo Π (doppiamente) e di rette che contengono coppie di punti omologhi della corrispondenza Π. Considerando tre di queste catene di rette e la rete d'iperconiche che esse (considerate come iperconiche degeneri) determinano, vediamo che il filo Π è l'intersezione di quelle tre catene di rette, ossia il filo base di una rete d'iperconiche, cioè un filo cubico: come appunto avevamo asserito. Potremo inoltre aggiungere che *il filo* Π′ *trasformato di* Π *mediante la corrispondenza* Ω *è quello che ha colla* Π *la stessa relazione che il filo* Π *ha colla* Ω (*).

53. *La cubica* γ *su cui sta un filo del* 3° *ordine ha necessariamente l'invariante assoluto reale, vale a dire è projettiva ad una cubica reale.* Per dimostrare questa proposizione e

---

(*) Poichè le iperconiche passanti per 6 punti del piano formano in generale una rete (n. 39), possiamo dedurre immediatamente le proposizioni seguenti da cui riescon definiti i fili cubici generali mediante la sola nozione delle catene semplici. *Il luogo di un punto dal quale* 6 *punti dati del piano son projettati mediante sei rette di una catena semplice è in generale un filo cubico; ed i punti comuni alle* ∞^1 *catene semplici di rette che così si ottengono costituiscono a lor volta un filo cubico, che riesce individuato dal passaggio pei* 6 *punti dati, e che sta con l'altro in una stessa curva del* 3° *ordine. Questa è il luogo descritto da due punti dai quali quei* 6 *– e quindi tutti i punti del filo cubico che li contiene - son projettati mediante due gruppi antiprojettivi di rette.* Ecc, ecc. — Queste proposizioni si connettono poi strettamente (v. n. 54) ad altre dell'ordinaria geometria projettiva relative alle coppie di punti di due piani da cui due date sestuple di punti son projettate mediante gruppi *projettivi* di rette (v. ad es. Sturm, *Das Problem der Projectivität u. s. w.*, *Math. Ann.*, I, pag. 541), ecc.

Digitized by Google

collegare la natura di γ alla natura dei fili cubici che essa contiene, consideriamo un punto qualunque P del filo Π e le 4 tangenti a, b, c, d che da esso si possono condurre a toccare altrove, in A, B, C, D, la cubica γ. Quelle tangenti saranno distinte se questa curva non ha punti doppi. Nel fascio di rette di centro P abbiamo un'antinvoluzione (in cui degenera un'antipolarità della rete) che projetta la corrispondenza Ω fra i punti di γ; sì che due rette omologhe di quell'antinvoluzione segano ancora γ secondo due coppie di punti le quali si corrispondono in Ω. Quindi i punti A, B, C, D dovranno corrispondersi fra loro rispetto ad Ω; ciò che può avvenire in tre modi diversi, cioè: 1° senza che alcuno di essi sia unito per Ω, sicchè ad esempio A, B e C, D saranno due coppie di punti omologhi rispetto ad Ω; 2° essendo A, B, C, D quattro punti uniti di Ω; 3° essendo due di essi, A, B ad es., punti uniti, e gli altri due C, D punti omologhi rispetto ad Ω. Nei primi due casi l'antinvoluzione considerata del fascio P mostra che il gruppo di rette $abcd$ sarà antiprojettivo (al gruppo corrispondente, $badc$ nel 1° caso, $abcd$ nel 2°, cioè) a se stesso, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà reale. Nel 3° caso essa mostra che il gruppo $abcd$ sarà antiprojettivo ad $abdc$, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà (coniugato al suo inverso, cioè) un numero complesso avente per modulo l'unità. Dunque *la cubica γ fa parte o di quella specie di cubiche per cui il birapporto è reale, oppure di quella specie per cui il birapporto ha per modulo l'unità.* Com'è noto queste due specie di cubiche sono appunto quelle per cui l'invariante assoluto (*) è reale; esso è positivo per quelle della 1ª specie, negativo per quelle della 2ª. Le cubiche armoniche appartengono ad ambe le specie; per esse l'invariante s'annulla.

Ora *se la rete d'iperconiche non ha un filo base*, cioè se la corrispondenza Ω su γ non ha punti uniti, dovrà necessariamente presentarsi il caso in cui A, B e C, D son due coppie di punti reciproci, e però *la cubica γ avrà un birapporto reale.* — Se invece esistono punti uniti di Ω, si prenda per A uno di

(*) Qui e nel seguito per *invariante assoluto* della cubica, cioè della quaterna di tangenti condotte a questa da un suo punto, intendiamo quello che, indicando con α uno dei birapporti di questa quaterna, è dato da $\frac{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$, e si esprime in modo noto mediante gl'invarianti g_2, g_3 (od i, j), oppure S, T, della quaterna, o della cubica.

Digitized by Google

essi e si determinino in conseguenza il punto P e poi B, C, D. Supponiamo che anche questi tre vengano a stare nel filo Ω. Allora se immaginiamo un raggio del fascio P il quale si muova descrivendo la catena semplice di rette che costituisce l'iperconica degenere di centro P, i due punti di γ projettati da questo raggio saranno due punti del filo Ω oppure due punti omologhi nella corrispondenza Ω, e passeranno dall'una all'altra relazione appunto quando il raggio mobile passerà per le quattro rette a, b, c, d della catena, su ognuna delle quali quei due punti vengono a coincidere. Ma da ciò segue subito che il filo Ω si compone di due rami continui, staccati fra loro, sì che quella catena di rette è divisa da a, b, c, d in quattro parti, di cui due, per es. ab e cd, projettano doppiamente risp. quei due rami del filo Ω, e le altre due, bc e da, non ne contengono alcun punto. — Se poi supponiamo che solo A, B siano uniti per Ω, mentre C, D siano omologhi, seguendo ancora il movimento continuo di un raggio del fascio P che descrive quella catena semplice, abbiamo che solo nel passaggio per a e b esso comincierà oppure cesserà di projettare due punti del filo Ω: questo si comporrà dunque di un sol ramo. — Concludiamo che *i fili cubici possono comporsi di due rami o di un solo; i fili a due rami stanno su cubiche aventi un birapporto reale, mentre quelli ad un ramo stanno su cubiche il cui birapporto ha per modulo l'unità.* (Cfr. n. 55).

Quando la corrispondenza Ω non ha punti uniti, il filo Π si compone di due rami, luoghi l'uno dei centri delle catene di rette che fan parte della rete, l'altro dei centri delle antinvoluzioni prive di catene fondamentali che pur si trovano in tal caso fra le antipolarità della rete. Così pure quando i punti uniti della corrispondenza Ω formano un filo composto di due rami, anche il filo Π si comporrà di due rami: l'uno di essi è incontrato dalle rette che tagliano il filo Ω in due punti di uno stesso ramo (e per un punto P di questo accade che i punti A, B, C, D che dianzi consideravamo sono uniti per Ω); l'altro invece dalle rette che s'appoggiano ad ambi i rami del filo Ω (e per un suo punto P accade invece che A, B e C, D son due coppie di punti omologhi di Ω).

54. L'analogia evidente fra alcuni dei risultati precedenti (n[i] 49 e seg[i]) e certe proposizioni note relative alle corrispon-

Digitized by Google

denze univoche fra due cubiche piane, alle forme di queste curve, ecc., avrà condotto naturalmente il lettore a considerare il legame che passa fra queste e quelli. Tale legame si può derivare da un concetto generale che riduce in molti casi le questioni relative ad antiprojettività a questioni riguardanti delle projettività: *si facciano seguire tutte le corrispondenze antiprojettive da un' antiprojettività fissa arbitraria, ad esempio dal coniugio, e si avranno così in luogo di esse altrettante corrispondenze projettive.*

Così, per lo studio della rete di antireciprocità (4) (n. 49) determinata dalle antipolarità (1), (2) e (3) di un piano π, si consideri un'anticollineazione **C** fra questo ed un piano π', distinto o sovrapposto a quello, e sia indicando con y e z due punti qualunque di π e π' omologhi rispetto a **C**,

$$\text{(C)} \qquad y_i = \bar{z}_i \ .$$

Come prodotti di quelle antireciprocità (4) per l'anticollineazione **C** si avranno le *reciprocità* fra i piani π, π'

$$(4') \ . \ . \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l z_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l z_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l z_m = 0 \ ,$$

le quali formeranno pure una rete. Ora è ben noto, e si verifica subito, che da una rete di reciprocità fra π e π' risultano determinate in questi due piani due cubiche γ e γ' le quali si posson considerare sia come luoghi delle coppie di punti che son reciproci rispetto a tutte le reciprocità della rete, — il che stabilisce fra i punti di γ e γ' una determinata corrispondenza algebrica univoca **O**, — sia come luoghi delle coppie di punti singolari delle reciprocità degeneri della rete, cioè dei centri dei fasci projettivi che costituiscono queste reciprocità, — e ciò stabilisce fra γ e γ' un' altra corrispondenza univoca **P** tale che da due punti omologhi rispetto a questa i punti che si corrispondono rispetto ad **O** son projettati mediante due fasci projettivi. Per l'attuale rete (4') di reciprocità la cubica γ sarà appunto quella considerata nei n[i] prec[i], avente per equazione la (5). E poichè le antireciprocità (4) si ottengono dalle reciprocità (4') facendole seguire dall'anticollineazione **C** (e da reciprocità degeneri si ottengono in questa guisa delle antireciprocità degeneri), si vede subito che la corrispondenza Ω fra i punti di γ reciproci rispetto alla rete di antireciprocità si può considerare come pro-

Digitized by Google

dotto della corrispondenza **O** fra i punti di γ e γ' che son reciproci rispetto alla rete di reciprocità e della corrispondenza anticollineare **C** fra γ' e γ; e che similmente la corrispondenza Π su γ è il prodotto della **P** fra γ e γ' e della **C**. — Di passaggio, dal fatto che fra γ e γ' esiste una corrispondenza univoca algebrica **O** (oppure **P**) ed in pari tempo un' anticollineazione **C**, deduciamo che gl' invarianti assoluti di queste cubiche sono in pari tempo uguali e coniugati, e quindi reali. (cfr. n. 53).

Basandoci sulle considerazioni ora fatte possiamo proporci di *determinare tutti i fili cubici giacenti su una data cubica piana* γ *d'invariante assoluto reale*, e più precisamente di *determinare tutte le corrispondenze che esistono su* γ *di punti reciproci rispetto a reti di antipolarità* (*corrispondenze* Ω). A tal fine si consideri la cubica γ' che corrisponde a γ in un'anticollineazione **C** fissata ad arbitrio (potendo anche γ' coincidere con γ): le corrispondenze cercate fra i punti di γ si potranno considerare come prodotti di corrispondenze algebriche univoche **O** fra γ e γ' e della corrispondenza anticollineare **C**. Ed abbiamo dalle cose dette una 1ª condizione da imporre ad una tal corrispondenza **O** fra γ e γ': quella di esser la corrispondenza dei punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità. Se essa si verifica, esiste pure, come dicemmo, una corrispondenza **P** fra γ e γ' tale che da due punti omologhi di **P** la **O** è projettata mediante due fasci projettivi. Viceversa se la corrispondenza **O** determina fra γ e γ' una corrispondenza **P** siffatta, tre coppie di fasci projettivi di rette che projettino i punti di γ e γ' omologhi rispetto ad **O** costituiscono tre reciprocità degeneri dalle quali (se scelte in modo da non stare in un fascio) è determinata una rete di reciprocità rispetto a cui due punti di γ e γ' omologhi in **O** sono sempre reciproci. — Quando questa 1ª condizione è soddisfatta, la corrispondenza Ω fra i punti di γ che è prodotto della **O** per la **C** viene ad essere quella dei punti reciproci rispetto ad una rete di antireciprocità. Perchè questa contenga una rete di *antipolarità*, cioè Ω sia appunto della specie voluta, occorrerà ancora che Ω risulti involutoria. E questa condizione sarà anche sufficiente, poichè allora la rete di antireciprocità con ogni antireciprocità degenere (coppia di fasci antiprojettivi che projettano Ω) conterrà pure quella inversa, sicchè in essa vi saranno infiniti fasci di antipolarità.

Digitized by Google

Applicheremo questi concetti successivamente alle cubiche ellittiche ed a quelle razionali (cioè ai due casi in cui l'invariante assoluto è finito od infinito).

55. Sulla cubica ellittica γ ad invariante assoluto reale sia u l'integrale di 1ª specie determinato in modo da annullarsi in un flesso. Se la cubica ha il birapporto reale (cioè l'invariante assoluto positivo), è noto che per parallelogrammo dei periodi di u si può prendere un *rettangolo*, cioè che i periodi fondamentali si possono indicare con ω_1 e $i\omega_2$, essendo ω_1 ed ω_2 reali. Se invece il birapporto della cubica ha per modulo l'unità (cioè se l'invariante assoluto è negativo), si può prendere per parallelogrammo dei periodi un *rombo*, e come periodi fondamentali due numeri complessi coniugati, che nel seguito indicheremo con $\frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)$ e $\frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)$; cosicchè anche in questo 2° caso ω_1 ed $i\omega_2$ saranno due periodi, ma non più fondamentali: nei loro multipli si avranno ancora risp. tutti i periodi reali e tutti quelli imaginari puri. — In ambo i casi, dalle espressioni note delle funzioni ellittiche di u mediante gl'invarianti, oppure anche dalla considerazione della cubica reale, si vede subito che la corrispondenza univoca fra i punti della curva che corrispondono a valori coniugati di u (*), cioè la corrispondenza rappresentata parametricamente da

$$u' \equiv \bar{u} \ , \qquad (\text{mod}^{\text{i}} \text{ periodi})$$

è un'anticollineazione (nel caso della cubica reale il coniugio). Potremo assumerla come anticollineazione ausiliare **C** del n. preced. Allora, poichè la curva γ' coinciderà con γ, dovremo cercare le corrispondenze algebriche univoche fra i punti di γ che soddisfano alle due condizioni ivi trovate per le corrispondenze **O**.

La 1ª di quelle condizioni è soddisfatta da *ogni* corrispon-

(*) Questa corrispondenza è univoca appunto per l'ipotesi fatta che l'invariante assoluto di γ sia reale e che quindi il coniugato di un periodo sia ancora un periodo. Anche altre corrispondenze che ora otterremo su γ sono univoche solo in tali ipotesi. — A proposito di corrispondenze iperalgebriche simmetriche sulle curve ellittiche (*superficie simmetriche* $p=1$) si confrontino gli ultimi paragrafi dell'opuscolo del sig. Klein: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).

Digitized by Google

denza algebrica univoca su γ. Poichè è noto (*) che qualunque sia questa corrispondenza, ne esiste *sempre* su γ un' altra (la corrispondenza dei *centri omologhi di projezione* rispetto a quella) che ha con quella le stesse relazioni che la **P** del n. prec. ha con la **O**. Ora le corrispondenze algebriche univoche *(ordinarie)* fra i punti di γ formano due sistemi infiniti rappresentati risp. da

$$(7) \; \ldots\ldots \qquad u' \equiv -u + C$$

$$(8) \; \ldots\ldots \qquad u' \equiv u + C \;,$$

ove C indica una costante qualunque. Facendo il prodotto di queste corrispondenze per l'anticollineazione ausiliare avremo i due sistemi infiniti di corrispondenze univoche iperalgebriche

$$(9) \; \ldots\ldots \qquad u' \equiv -\bar{u} + C$$

$$(10) \; \ldots\ldots \qquad u' \equiv \bar{u} + C \;.$$

Queste sarebbero già corrispondenze di punti reciproci rispetto a reti di antireciprocità. Ma volendo che siân corrispondenze Ω della natura richiesta, cioè rispetto a reti di antipolarità, si dovrà introdurre la 2ª condizione, cioè che siano involutorie. Poniamo d' or innanzi $C = C_1 + i C_2$, e similmente $u = u_1 + i u_2$, ove le lettere con indici inferiori indicano numeri reali. Uguagliando la corrispondenza (9) alla sua inversa, si vede che essa è involutoria se $C - \bar{C} \equiv 0$, ossia $2 i C_2 \equiv 0$, donde (poichè i periodi imaginari puri sono, per ambe le specie di cubiche, i multipli di $i \omega_2$)

$$i C_2 \equiv 0 \;, \qquad \text{oppure} \qquad i C_2 \equiv \frac{i \omega_2}{2} \;.$$

Similmente si vede che la corrispondenza (10) è involutoria se

$$C_1 \equiv 0 \;, \qquad \text{oppure} \qquad C_1 \equiv \frac{\omega_1}{2} \;.$$

(*) V. il n. 1 della mia Nota: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* nel vol. XXIV di questi Atti; ed anche il lavoro del sig. CASTELNUOVO ivi citato.

Digitized by Google

Concludiamo dunque che le corrispondenze Ω cercate nella cubica ellittica γ son date da

$$(\Omega_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1$$

$$(\Omega_2) \qquad u' \equiv \bar{u} + i\,C_2$$

$$(\Omega_1{}^0) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1 + \frac{i\,\omega_2}{2}$$

$$(\Omega_2{}^0) \qquad u' \equiv \bar{u} + \frac{\omega_1}{2} + i\,C_2\,.$$

Sulla cubica ellittica a birapporto reale si hanno così quattro serie distinte ∞^1 *di corrispondenze* Ω. *Due di esse*, $\Omega_1{}^0$ *e* $\Omega_2{}^0$, *non hanno punti uniti, cioè derivano da reti che non hanno fili cubici base*, poichè ponendo $u' \equiv u$ l'equazione della $\Omega_1{}^0$ diventa

$$2\,u_1 \equiv C_1 + \frac{i\,\omega_2}{2}\,,$$

che è assurdo, non essendovi in questo caso dei periodi i quali abbiano per parte immaginaria $\frac{i\,\omega_2}{2}$; e analogamente per le $\Omega_2{}^0$. Ma pei punti uniti di una Ω_1 otteniamo invece

(11) .... $\qquad 2\,u_1 \equiv C_1\,, \qquad$ (mod. ω_1)

onde

(11′) ... $\qquad u_1 \equiv \frac{C_1}{2}\,, \quad$ oppure $\quad u_1 \equiv \frac{C_1}{2} + \frac{\omega_1}{2}\,; \qquad$ (id.)

e similmente pei punti uniti di una Ω_2

(12) ... $\qquad 2\,u_2 \equiv C_2\,, \qquad$ (mod. ω_2)

(12′) ... $\qquad u_2 \equiv \frac{C_2}{2}\,, \quad$ oppure $\quad u_2 \equiv \frac{C_2}{2} + \frac{\omega_2}{2}\,. \qquad$ (id.)

Dunque *le corrispondenze* Ω_1 *e* Ω_2 *ammettono tutte dei fili cubici di punti uniti, sì che per ogni punto di* γ *passa un filo cubico di ciascuno dei due sistemi* (*). Nel caso attuale *ogni*

(*) La semplicità della rappresentazione analitica che così si è trovata dei fili cubici sulle curve ellittiche del 3° ordine, cioè in sostanza con *le funzioni ellittiche (d'invariante assoluto reale) di argomenti* u *la cui parte reale, o la cui parte imaginaria pura, è costante*, fa presumere che essi devono già esser

Digitized by Google

filo si compone di due rami distinti, corrispondenti alle due equazioni (11'), oppure (12'), poichè uno stesso punto non può corrispondere a due valori di u le cui parti reali differiscano di $\frac{\omega_1}{2}$, o le cui parti imaginarie differiscano di $\frac{i\omega_2}{2}$.

Sulla cubica il cui birapporto ha per modulo l'unità si hanno in generale due soli sistemi ∞^1 *di corrispondenze* Ω, poichè le serie $\Omega_1{}^0$, $\Omega_2{}^0$ coincidono risp. con Ω_1, Ω_2, ottenendosi le loro equazioni dalle equazioni di queste coll' aggiungere ai secondi membri il periodo $\frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)$ (e mutando le costanti reali C_1, C_2). *Entrambi questi sistemi hanno fili cubici di punti uniti* rappresentati ancora dalle (11), (12), ecc. Però in questo caso un punto per cui $u_1 \equiv \frac{C_1}{2}$ (mod. ω_1) si può, aggiungendo quel periodo al suo parametro, ridurre ad avere $u_1 \equiv \frac{C_1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$, sicchè

stati considerati, almeno analiticamente, da lungo tempo. Così è infatti: ciò che vi ha di essenzialmente nuovo nelle cose suesposte è la definizione *geometrica* di quei fili come *intersezioni di iperconiche* e le proprietà diverse che vi si collegano.

Ad esempio il Siebeck (Crelle J., t. 57, p. 359; e t. 59 p. 173) rappresentando una funzione ellittica di u sui punti reali di un piano ottenne su questo due sistemi ortogonali di quartiche bicircolari omofocali, le quali si possono appunto riguardare come immagini dei nostri fili cubici: v. anche Schwarz, Crelle J., t. 77, p. 38 (o *Ges. Math. Abhandlungen*, t. II, p. 260), che di quei sistemi di curve rilevò le proprietà caratteristiche. Ma più particolarmente va qui citato l'Harnack che nella seconda parte della Memoria *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (Math. Ann. IX) rappresenta l'ente ellittico secondo un concetto di Klein, cioè mediante i punti reali delle tangenti complesse di una curva piana reale di 3ª classe, e studia certi due sistemi di ∞^1 curve reali ellittiche del 6° ordine, le quali rappresentano precisamente la serie delle tangenti per cui è costante la parte reale o la parte imaginaria dell'integrale ellittico u, e corrispondono quindi ai nostri due sistemi di fili cubici. — Sia ricorrendo a queste rappresentazioni dell'ente ellittico (dell'integrale u) sulla superficie piana di Riemann o su quella di Klein, sia più in generale con le rappresentazioni su superficie chiuse (simmetriche) qualunque per le quali $p=1$ (v. l'opuscolo del sig. Klein citato precedentemente), le proprietà che sopra si trovano direttamente per le corrispondenze ed i fili cubici di γ, acquistano uno speciale carattere intuitivo, intorno al quale però non possiamo qui trattenerci.

Digitized by Google

le due equazioni (11') si equivalgono, *i fili* (11) *si compongono di un sol ramo;* e similmente i fili (12). (*)

Le due specie di cubiche ellittiche hanno a comune le cubiche armoniche. Ne segue che *sulle cubiche armoniche vi sono sei serie ∞^1 di corrispondenze Ω, di cui due prive di punti uniti, due con fili cubici ad un ramo, e due con fili cubici a due rami.* A ciò si giunge anche se si bada che per una cubica armonica, i cui periodi fondamentali si posson rappresentare con ω (reale) ed $i\omega$ (sicchè il loro parallelogrammo sia un *quadrato*), le corrispondenze univoche algebriche non sono soltanto le (7), (8), ma anche quelle (*singolari*) date da

$$u' \equiv \pm iu + C\ ;$$

partendo da queste si ottengono i due nuovi sistemi di corrispondenze Ω

$$u' \equiv \pm i\bar{u} + C_1(1 \mp i)\ ,$$

che hanno per fili di punti uniti i due sistemi

$$u_1 \mp u_2 \equiv C_1\ .\ (^{**})$$

56. Quando la cubica γ è di 2ª specie abbiamo visto che le due serie Ω_1 e Ω_1^0 si fondono in un sol sistema, e così pure le altre due Ω_2 e Ω_2^0. È opportuno introdurre questa considerazione anche quando γ è di 1ª specie, e riguardare in ogni caso le Ω_1 e Ω_1^0 come formanti un 1° *sistema* di corrispondenze Ω (il quale per la 1ª specie di cubiche si comporrebbe di due tratti Ω_1 e Ω_1^0, e per la 2ª di un tratto solo), e similmente Ω_2 e Ω_2^0 come formanti un 2° *sistema.* Ciò permette di abbreviare alcuni enunciati.

Così se si forma l'equazione della corrispondenza Π relativa ad una delle Ω_1, Ω_1^0 ovvero ad una delle Ω_2, Ω_2^0 (e ciò si fa scrivendo che nella Π si corrispondono i tangenziali di due punti omologhi nella Ω), si trova rispettivamente:

$$(\Pi_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} - 2\,C_1\ ,$$

(*) Questi risultati sono in pieno accordo con quelli del n. 53.

(**) Un altro caso particolare notevole delle cubiche di 2ª specie si ha nella *cubica equianarmonica;* ma di questo lascio l'esame al lettore.

Digitized by Google

ovvero

$$(\Pi_2) \qquad u' \equiv \bar{u} - 2\,i\,C_2 \ ,$$

e si conchiude che *le corrispondenze* Ω *e* Π *sono entrambe del* 1° *od entrambe del* 2° *sistema.*

Così ancora se nelle equazioni delle Ω_1, Ω_1^0 si tien fisso u mentre varia la costante reale C_1, si vede che $2u'_2$ rimarrà costante, ecc. ecc., e si conchiude che *i punti di* γ *che corrispondono ad un punto fisso rispetto alle infinite corrispondenze* Ω *dell'uno dei due sistemi sono i punti di quel filo cubico dell'altro sistema che passa pel punto fisso.* Da questa proposizione risulta più evidente il legame fra la scomposizione di ogni filo cubico in due rami e lo scomporsi di ogni sistema di corrispondenze Ω in due tratti.

Tralasciamo di risolvere altre questioni che si presentano spontanee sulle corrispondenze Ω, come le relazioni di *prodotti* e di *gruppi* che esse hanno fra loro e con le altre corrispondenze univoche, algebriche ed iperalgebriche; la determinazione delle serie finite di corrispondenze (o di fili cubici) di cui ognuna è la Π rispetto alla precedente considerata come Ω (il che coincide colla determinazione dei poligoni semplici che sono simultaneamente iscritti e circoscritti a γ); il numero e la natura delle intersezioni di due fili cubici di diverso sistema (4 in generale, ma 2 nel caso della curva armonica se i due sistemi da cui son presi i fili sono di specie diversa); ecc. ecc. Son tutte cose che dalle equazioni trovate delle corrispondenze e dei fili scaturiscono immediatamente.

57. Solo una questione conviene che trattiamo ancora, affine di rimuovere un'obiezione che altrimenti ci si potrebbe fare. I ragionamenti del n. 54 ci affidano completamente che ognuno dei fili da noi ottenuti sopra γ *sta* su una rete d'iperconiche; ma sarà egli sempre l'*intersezione completa* di questa rete? È facile vedere, basandosi sulla 2ª parte del n. 49, che ciò non sarà nel solo caso che la rete d'iperconiche abbia per base una catena piana, nella quale giacerà allora il filo. Questa catena piana sarà fondamentale per un'antinvoluzione che muta γ in se stessa determinandovi una particolare corrispondenza Ω. La ricerca di tali fili eccezionali (che chiameremo ancora *fili cubici*, quantunque ad essi non si applichi più senz'altro la definizione del

Digitized by Google

n. 51) coincide colla ricerca di quelle fra le corrispondenze Ω che sono anticollineari. Ricorrendo alle equazioni delle Ω e scrivendo che a tre punti u allineati corrispondono tre punti u' allineati, si trova che le antinvoluzioni Ω sono le tre Ω_1 per cui si ha $3\,C_1 \equiv 0$, ossia

$$C_1 = 0\ ,\quad \frac{\omega_1}{3}\ ,\quad \frac{2\,\omega_1}{3}\ ,$$

e le tre Ω_2 per cui $3\,i\,C_2 \equiv 0$, ossia

$$C_2 = 0\ ,\quad \frac{\omega_2}{3}\ ,\quad \frac{2\,\omega_2}{3}\ ,$$

(fra le quali è la $u' \equiv u$ di cui ci siam serviti al n. 55, come anticollineazione ausiliare). Dunque *per una cubica ellittica d'invariante assoluto reale vi sono in generale sei antinvoluzioni che la trasformano in se stessa, cioè sei catene piane che la segano secondo fili cubici: ognuno dei due sistemi di corrispondenze Ω contiene tre antinvoluzioni. Solo la cubica armonica, corrispondentemente ai quattro sistemi Ω che essa ammette. è trasformata in sè da dodici antinvoluzioni, le cui catene piane la segano, sei secondo fili cubici a due rami e sei secondo fili ad un sol ramo.*

Le particolari corrispondenze Ω che ora consideriamo si possono anche caratterizzare come quelle che coincidono con le rispettive Π: ciò si vede subito sì geometricamente che mediante le equazioni. In altri termini uno di questi particolari fili cubici si può caratterizzare dicendo che la retta che congiunge due suoi punti (e che in generale sega ancora γ in un punto del corrispondente filo Π: v. n. 51) lo sega ancora in un terzo punto: quando un filo cubico Ω ammette una tal retta *trisecante*, esso sta in una catena piana (intersezione di due catene semplici di rette contenenti quella trisecante, ecc.: cfr. n° cit.), e *ogni* retta che ne congiunga due punti ne contiene un terzo. Possiamo anche dire che questi fili cubici sono quei fili cubici di γ che contengono dei flessi della cubica. Ognuno di essi ne contiene tre posti in linea retta; in ogni sistema di fili cubici si hanno così 3 particolari fili i quali contengono risp. le 3 terne di flessi poste sui lati di un triangolo sizigetico: in generale si hanno così, corrispondentemente ai due sistemi Ω, due triangoli sizigetici; per la cubica armonica ai quattro sistemi Ω vengono a corrispondere i 4 triangoli sizigetici.

Digitized by Google

Se la cubica γ è reale, una delle catene piane considerate si compone dei punti reali del piano, ed il particolare filo cubico in cui essa taglia γ non è altro che l'ordinaria parte reale di γ: la quale appunto si compone di due rami o di un solo a seconda che la cubica è di 1ª o di 2ª specie (e contiene sempre tre flessi); solo le cubiche reali *armoniche* possono aver le parti reali composte tanto di un ramo quanto di due.

58. Occupiamoci finalmente della determinazione delle corrispondenze Ω e dei relativi fili cubici sopra una cubica piana *razionale* γ. Rifacciamoci alle considerazioni del n. 54 ed alle conclusioni a cui esse ci avevano condotti riguardo alle condizioni a cui il problema si può ridurre. Si tratta anzitutto di vedere quando è che una corrispondenza algebrica univoca fra due cubiche piane razionali γ, γ', cioè una *projettività* fra i punti di queste, si può considerare come corrispondenza di punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità fra i due piani. Trovammo che perciò occorre e basta che, comunque si scelga su γ un punto A, esista su γ' un punto A_1 tale che i fasci di rette che da A e A_1 projettano i punti di γ, γ' omologhi in quella corrispondenza siano projettivi: o, ciò che fa lo stesso, tale che alle coppie di punti di γ allineate con A corrispondano su γ' le coppie di punti allineate con A_1. Ora i due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva (e che *sulla curva* van riguardati come distinti o come coincidenti secondo che quel punto doppio è un *nodo* od una *cuspide*) formano sempre una coppia allineata con A, qualunque sia questo punto: dunque i loro omologhi su γ' devono formare similmente una coppia di punti allineati con A_1, ovunque si trovi questo punto su γ', e però dovranno coincidere in un punto doppio di γ'. Dunque la projettività data fra i punti di γ e γ' deve soddisfare a questa condizione, che *rispetto ad essa ai due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva corrispondano rispettivamente i due punti che cadono nel punto doppio di γ'*: condizione *doppia* se quei punti doppi son nodi, *semplice* se sono cuspidi. — Questa condizione è in pari tempo sufficiente; poichè da una semplice applicazione del principio di corrispondenza segue che le coppie di punti di γ' corrispondenti alle coppie di γ allineate con un punto qualunque A di questa stanno in generale sulle rette di un inviluppo di 2ª classe: ora, se quella condizione è soddisfatta, quest' in-

Digitized by Google

viluppo dovrà scindersi nel fascio delle rette passanti pel punto doppio di γ' ed in un altro fascio di rette A_1, donde ecc. (*).

Applicando ora l'anticollineazione ausiliare C del n. 54 per ritornare da γ' a γ e valendosi delle cose ivi dette otteniamo subito i risultati seguenti. *Sulla cubica γ dotata di un nodo vi sono due sistemi ∞^1 di corrispondenze Ω, e cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punti uniti i due punti della curva che cadono nel nodo, e le antinvoluzioni fra i punti di γ per le quali invece questi due punti sono omologhi: questi due sistemi (fasci armonici) di antinvoluzioni dànno colle loro catene fondamentali due sistemi di fili cubici razionali, tra cui quelli del* 1° *sistema contengono il punto doppio di γ come punto doppio proprio, e quelli del* 2° *lo contengono come punto isolato; ecc. — Sulla cubica γ dotata di cuspide vi è un sistema ∞^2 di corrispondenze Ω, cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punto unito la cuspide: ii fili cubici relativi ad esse sono la rete ∞^2 delle catene semplic di punti di γ che contengono quella cuspide* (**).

E qui, analogamente al n. 57, si presenta la questione di determinare quei fili cubici di γ i quali non sono l'intersezione *completa* di una rete d'iperconiche, ma l'intersezione di γ con

(*) Data una projettività *qualunque* fra due cubiche piane razionali γ, γ', essa vien projettata mediante fasci projettivi di rette dai due punti doppi, ed anche da altri due punti A, A_1 di γ, γ' che si ottengono, A come residua intersezione di γ colla retta che congiunge i due punti di γ corrispondenti al punto doppio di γ', ed A_1 in modo analogo. Ne segue che sempre esiste una corrispondenza birazionale quadratica fra i due piani (quella determinata da quelle due coppie di fasci projettivi), la quale determina fra γ e γ' quella corrispondenza projettiva (e vi sono altri due fasci projettivi di rette coi centri B, B_1 fuori di γ, γ', i quali projettano pure quella corrispondenza, sicchè alle terne di punti di γ allineate con B corrispondono le terne di punti di γ' allineate con B_1): in altri termini vi è sempre un fascio di reciprocità fra i due piani tale che son reciproci rispetto ad esso i punti omologhi della data projettività fra γ e γ'. — I casi che sopra si considerano sono quelli in cui invece che un *fascio* si ha una *rete* di reciprocità, e quindi invece di *una* corrispondenza birazionale fra i due piani se ne hanno infinite.

(**) Si possono verificare analiticamente questi risultati ed ottenerne con facilità degli altri valendosi della rappresentazione parametrica delle curve piane razionali (data ad es. in CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie* p. 586 e 592). Così se la cubica con un nodo si rappresenta in guisa che tre punti qualunque in linea retta abbiano parametri il cui prodotto sia costante i due sistemi ∞^1 di fili cubici sopra considerati si comporranno dei punti per cui è costante l'argomento (a meno di un multiplo di π), ovvero il modulo, del parametro. E se per la cubica con cuspide si sceglie la rappresentazione con parametri $x+iy$ in modo che la condizione di allineamento di tre punti si abbia annullando la somma dei loro parametri, la ∞^2 suddetta di fili cubici si rappresenta coll'equazione $ax+by+c=0$ a coefficienti a, b, c reali.

Digitized by Google

catene piane: e si trova subito che se γ ha un nodo vi sono tre di questi fili nel 1° sistema (passanti risp. pei tre flessi), ed uno nel 2° (contenenti i tre flessi), e che se γ ha una cuspide vi sono ∞^1 tali fili (determinati da catene piane che contengono la cuspide ed il flesso di γ ed il punto comune alle tangenti in essi). Ecc.

Da ultimo osserviamo che anche una catena semplice *qualunque* di punti di una cubica razionale piana (od anche sghemba) γ si potrebbe chiamare (per ragioni che appariranno meglio in un altro lavoro) un *filo cubico;* ma non sarebbe in generale su una *rete* d'iperconiche. Si potrebbe veder facilmente che esso sarebbe invece l'intersezione di γ con un *fascio* d'iperconiche (v. la prima nota a questo n°) (*).

(*) Per vedere ciò ed in pari tempo i principali risultati di questo n° può servire utilmente la considerazione di γ come projezione di una cubica sghemba C (considerazione utile anche per lo studio delle projettività fra due cubiche piane razionali) — Una catena semplice di punti di γ sarà la proiezione di una catena di C: possiamo supporre senza perdita di generalità (ed al solo scopo di abbreviare il discorso) che C sia reale e che quella sua catena sia appunto composta dei punti reali di C. Le catene semplici di rette che contengono la catena considerata di punti di γ si otterranno come sezioni di quelle catene semplici di piani cogli assi passanti pel centro P di proiezione, le quali contengono i punti reali di C. Una tal catena di piani è quella che ha per asse la retta reale su cui sta il punto (imaginario) P e che si compone tutta di piani reali. Se poi una retta imaginaria r passante per P è asse di un'altra catena di piani projettante i punti reali di C, questa catena sarà riferita projettivamente a quella dei piani coniugati, e però le rette reali. intersezioni di piani omologhi di queste due catene, saranno una schiera di generatrici reali di una quadrica rigata. Ognuna di queste rette conterrà un sol punto di C se r è la corda di questa curva che passa per P. Tolto questo caso, la r incontrerà semplicemente C, mentre i piani della catena, cioè le loro rette reali, incontreranno in due punti mobili il filo reale di C. Ora la quadrica reale considerata, dovendo contenere oltre a C la corda di questa curva passante per P, e la sua coniugata, sarà ben determinata; a meno che queste due rette coincidano, cioè che P stia su una corda reale di C, nel qual caso quella quadrica potrà muoversi in un fascio (ed il piano che le è tangente in P darà su C un punto mobile, quello d'appoggio di r, il quale descriverà su C una catena semplice). Da ciò si conclude che la catena semplice di γ sta in generale su tre sole catene semplici di rette (e quindi nel fascio d' iperconiche determinato da due di esse); e soltanto nei casi che i due punti di γ che cadono nel punto doppio stiano in quella catena semplice, ovvero siano armonici rispetto ad essa (casi che corrispondono risp. all'incontrarsi di C e della corda passante per P in due punti reali ovvero in due punti coniugati), avverrà che quelle catene di rette saranno infinite (coi centri formanti una catena semplice di punti di γ).

Digitized by Google

Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli Anfibi anuri;

del Socio Prof. Lorenzo Camerano

Gli Anfibi anuri presentano durante il loro periodo girinale un polimorfismo spiccatissimo. Quasi tutti gli osservatori che si sono occupati dello sviluppo dei girini degli Anfibi anuri hanno constatato questo fatto. Ma se il fare ciò è cosa agevole. il determinare invece quali sono le cause di tale polimorfismo è opera assai difficile.

Due serie di questioni si collegano collo studio del polimorfismo dei girini: 1° quelle che si riferiscono alle azioni dell'ambiente sugli organismi in quanto sono causa di variazioni degli organismi stessi: 2° quelle che si riferiscono al valore dei vari caratteri dei girini nella loro differenziazione sistematica.

Campo eccellente per lo studio del polimorfismo dei girini sono le regioni Alpine propriamente dette, le quali concedono all'osservatore di studiare contemporaneamente, e in uno spazio relativamente limitato, girini sottoposti a condizioni di esistenza notevolmente diverse.

Numerosi Autori si sono occupati di studiare l'azione che le condizioni biologiche esercitano sullo sviluppo ed anche sulla variabilità dei girini degli Anfibi e in particolar modo vennero studiate l'azione della luce, della temperatura, del digiuno, della natura del nutrimento, dell'altezza sul livello del mare, ecc. Ricorderò qui fra gli altri il Fatio. il Flüger, il Wiedersheim, il Brunk, il V. Ebner, l'Hamann, Marie de Chauvin, il Weismann. il Kollmam, Mauro Rusconi, l'Héron Royer, Michele Lessona, il Jung, lo Schnetzler, Kolasy, Knauer, Kessler, Velasco, C. Koch, Bedriaga, D. Barfurth, io stesso (1).

(1) Si consulti per le indicazioni bibliografiche relative all'argomento, L. Camerano, *Ricerche intorno alla vita branchiale degli anfibi*. Mem. Accad.

Digitized by Google

Non è quindi senza una notevole meraviglia che si leggono le seguenti parole in una recentissima Memoria del Prof. A. Moriggia stampata nei Rendiconti della Accademia dei Lincei (vol. VI°, Giugno 1870, pag. 548) col titolo: *Alcune sperienze su girini e rane:* « Siccome i girini sogliono nascere e specialmente svilupparsi col beneficio di calore, di luce e di opportuno alimento, perciò ho creduto non dovesse tornar vano, cercar di conoscere quale e quanta influenza potessero dispiegare cotesti fattori nella cresciuta del corpo e nelle metamorfosi che debbono aver luogo per salire dallo stadio di girino a rana fatta. Cosa possa il digiuno in cotali animaletti già venne in parte scandagliato dallo Spallanzani, felice sperimentatore, che s'incontra quasi su tutte le vie dello sperimentare. »

« Nell'effetto finale io volli far concorrere oltrecchè un digiuno assai prolungato, anche la scarsità della luce, e specialmente il freddo, come altri già fece pei bruchi, crisalidi, insetti. »

In una Nota poi il Moriggia dice ancora ..... « interesserebbe ricercare anche quale parte hanno per sè nel risultamento, il digiuno, l'ombra, il freddo, tentati isolatamente ed a lungo, ecc. ».

Non si riesce proprio a comprendere perchè il Moriggia si sia limitato a pigliar le mosse nei suoi sperimenti dallo Spallanzani e non abbia tenuto conto dei numerosi e svariati lavori recenti degli Autori sopra menzionati.

Già in altri lavori io mi sono occupato dei fenomeni di svernamento e dei fenomeni neotenici facendo osservare che essi sono senza fallo una delle cause del polimorfismo dei girini delle alte Alpi, operando essi unitamente al nutrimento, alla temperatura, alla luce, ecc. Non ritornerò qui sopra questo argomento.

Io desidero ora richiamare l'attenzione degli osservatori, sopra un'altra causa modificatrice della forma dei girini degli Anfibi anuri che io ebbi occasione di studiare nei mesi di Luglio, Agosto e Settembre a Ceresole Reale nei limiti di altitudine sul livello del mare compresi fra i 1500 e i 2800 metri. Si tratta cioè dell'azione modificatrice dell'acqua corrente e dell'acqua sta-

delle Scienze di Torino, Ser. II, vol. XXXV. 1883 — *Intorno alla neotenia* Atti Acc. delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1883 — *Nuove osservazioni intorno alla neotenia*, ibidem, 1884 — *Note di Biologia Alpina. I. Dello sviluppo degli Anfibi anuri sulle Alpi*, Boll. dei Musei di Zool. ed Anat. comparata di Torino n. 30, 1887. — *Ulteriori osservazioni intorno alla neotenia negli Anfibi*, ibidem, n. 56, 1889.

Digitized by Google

gnante sullo sviluppo, sulla mole e sulla forma dei girini della *Rana muta* Laur.

Nel Piano di Ceresole Reale lo sviluppo dei girini si compie in molti luoghi in acque correnti, talvolta con velocità notevole. Le pozze isolate o per meglio dire le pozze nelle quali non vi è un rapido rinnovamento dell'aqua sono relativamente assai scarse.

Le osservazioni vennero compiute nelle località seguenti.

1° Pozza al disotto del Grand Hôtel. — Altezza sul livello del mare metri 1490 circa. — L'acqua è poco profonda ed è corrente con discreta velocità, provenendo da un rigagnolo. — La pozza è in pieno sole ed è piena di vegetazione: il fondo è melmoso.

2° Varie pozze fra le roccie che stanno sopra alla grande cascata dell'Orco. — Altezza sul livello del mare metri 1530 circa. — L'acqua è poco profonda e si può considerare quasi come stagnante, poichè il rinnovamento avviene con grande lentezza: le pozze sono alimentate da scoli d'acqua. Le pozze sono in pieno sole e ricche di Equiseti. — Il fondo è melmoso.

3° Numerosi rigagnoli di irrigazione dei prati del Piano di Ceresole. — Altezza sul livello del mare variabile da 1500 metri a 1600 circa. — L'acqua non è molto profonda ed ha un corso lento — il fondo dei rigagnoli è melmoso ed è ricchissimo di ossido idrato di ferro proveniente dalle acque che ve lo depositano.

4° Piccola pozza di un prato presso la diga che serve per la derivazione dell'acqua dell'Orco. — Altezza sul livello del mare metri 1520 circa. — L'acqua proviene dai rigagnoli dei prati e vi ristagna: il fondo è molto melmoso.

5° Canale d'acqua proveniente dall'Orco per mezzo di una diga, collocato in prossimità della pozza precedente. L'acqua non è molto profonda (metri 0,50 al più); il fondo è sabbioso: la corrente dell'acqua è notevolmente forte: nelle infrattuosità delle sponde vi sono piccoli seni nei quali l'acqua è più tranquilla: le sponde sono in parte erbose: il canale è in pieno sole.

6° Pozza collocata al disopra della borgata la Villa, a metri 1660 circa sul livello del mare. Questa pozza è formata dall'allargarsi di un rigagnolo il quale dà origine nel mezzo della pozza ed una corrente relativamente forte: la profondità massima è di venticinque o trenta centimetri: il fondo è melmoso: le sponde sono erbose; la pozza è in pieno sole.

Nelle località sopradette i girini erano molto numerosi e presentavano le misure indicate negli specchietti seguenti:

Digitized by Google

Ceresole Reale (1) — *Pozza sotto al Grand-Hôtel.* - *Acqua corrente.* - 6 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,038	m. 0,035	m. 0,034	m. 0,032
Id. del corpo dalla bocca all'ano	» 0,015	» 0,013	» 0,014	» 0,013
Id. delle zampe posteriori	rudimenti	» 0,008	» 0,011	» 0,001
Id. della coda	» 0,023	» 0,022	» 0,023	» 0,019
La coda è più lunga del corpo di	» *0,008*	» *0,009*	» *0,009*	» *0,006*

Ceresole Reale (2) — *Pozza sopra la cascata dell'Orco.* - *Acqua stagnante.* - 1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,031	m. 0,028	m. 0,029	m. 0,027	m. 0,020	m. 0,026	m. 0,029
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,013	» 0,013	» 0,013	» 0,012	» 0,009	» 0,013	» 0,013
Id. delle zampe posteriori	» 0,012	» 0,009	» 0,003	» 0,003	rudimenti	» 0,003	» 0,010
Id. della coda	» 0,018	» 0,015	» 0,016	» 0,015	» 0,011	» 0,013	» 0,016
La coda è più lunga del corpo di	» *0,005*	» *0,002*	» *0,003*	» *0,003*	» *0,002* (*a*)	» *0,000*	» *0,003*

Ceresole Reale (3) — *Rigagnoli dei prati del piano.* - *Acqua con lento corso.* - 16 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,030	m. 0,029	m. 0,031	m. 0,031	m. 0,030	m. 0,026	m. 0,029	
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,013	» 0,013	» 0,013	» 0,012	» 0,012	» 0,011	» 0,012	
Id. delle zampe posteriori	» 0,002	» 0,002	» 0,015	» 0,007	» 0,005	» 0,001	» 0,013	
Id. della coda	» 0,019	» 0,016	» 0,018	» 0,019	» 0,018	» 0,015	» 0,016	Lungh. delle zampe anteriori m. 0,005
La coda è più lunga del corpo di	» *0,006*	» *0,003*	» *0,005*	» *0,007*	» *0,006*	» *0,004*	» *0,004*	

Digitized by Google

Ceresole Reale (4) — *Pozza presso la diga dell'Orco. Acqua stagnante.* - 1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,020	m 0,026	m. 0,021
Id. del corpo dal capo all'ano.	» 0,009	» 0,011	» 0,009
Id. delle estremità posteriori	» 0,001	» 0,004	» 0,005 (1)
Id. della coda	» 0,011	» 0,015	» 0,012
La coda è più lunga del corpo di	» *0,002* (*a*)	» *0.004*	» *0,003*

(1) È notevole lo sviluppo delle estremità posteriori relativamente alla piccola mole del corpo.

Ceresole Reale (5) — *Canale d'acqua derivato dall'Orco.* - *Acqua fortemente corrente.*

6 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale.	m. 0,042	m. 0,046	m. 0,036	m. 0,042	m 0,040	m. 0,031	m. 0,035	
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,015	» 0,016	» 0,013	» 0,015	» 0,014	» 0,012	» 0,014	
Id. delle estremità posteriori	» 0,002	» 0,005	» 0,006	» 0,003	» 0,008	» 0,002	» 0,014	Estrem. ant. lungh. m. 0,006
Id. della coda	» 0,027	» 0,030	» 0,023	» 0,027	» 0,026	» 0,019	» 0,029	
La coda è più lunga del corpo di .	» *0,012*	» *0,014*	» *0,010*	» *0,012*	» *0,012*	» *0,007*	» *0,015*	

1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,045	m. 0,043	m. 0,045	m. 0,046	m. 0,040	m. 0,042
Id. del corpo dal capo all'ano .	» 0,016	» 0,015	» 0,016	» 0,015	» 0,015	» 0,015
Id. delle estremità posteriori . .	» 0 008	» 0,003	» 0,009	» 0,010	» 0,004	» 0,009
Id. della coda	» 0,029	» 0,026	» 0,029	» 0,031	» 0,025	» 0,027
La coda è più lunga del corpo di . . .	» *0,013*	» *0,013* (*a*)	» *0,013*	» *0,016*	» *0,010*	» *0,012*

Digitized by Google

Ceresole **Reale** (6) — *Pozza sopra la borgata la Villa. - Acqua corrente.*

19 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,034	m. 0,037	m. 0,034	m 0,034	m. 0,040	m. 0,039	m. 0,041	m. 0,023	m. 0,037
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,012	» 0,014	» 0,012	» 0,014	» 0,015	» 0,013	» 0,017	» 0,009	» 0,013
Id. delle estremità posteriori	» 0,001	» 0,004	» 0,002	» 0,001	» 0,008	» 0,012	» 0,003	rudimenti	» 0,002
Id. della coda	» 0,022	» 0,023	» 0,022	» 0,010	» 0,025	» 0,026	» 0,024	» 0,014	» 0,024
La coda è più lunga del corpo di	» *0,010*	» *0,009*	» *0,010*	» *0,006*	» *0,010*	» *0,013*	» *0,007*	» *0,005*	» *0,011*

2 *Settembre* 1890 (1).

Lunghezza totale	m. 0,025	m. 0,021
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,010	» 0,009
Id. delle estremità posteriori	rudimenti	rudimenti
Id. della coda	» 0,015	» 0,012
La coda è più lunga del corpo di	» *0,005* (*a*)	» *0,003* (*b*)

(1) In quest'epoca i girini erano meno numerosi, una parte essendosi trasformata, ed una parte essendo stata trascinata via dal rigagnolo ingrossato per una lunga pioggia. Nella pozza vi sono girini che presentano ad un dipresso le dimensioni di quelli misurati il 19 agosto. Qui ho segnato solo le dimensioni dei girini più piccoli e di sviluppo meno avanzato.

Digitized by Google

Le condizioni di vita pei girini si possono considerare come sensibilmente le stesse per tutte le pozze sopra menzionate, per quanto riguarda il nutrimento, la luce ed anche la quantità di sole che esse ricevono: essendo collocate si può dire tutte nel mezzo della vallata. La temperatura varia alquanto. Secondo le osservazioni fatte la temperatura media è alquanto superiore nelle pozze (N. 2) collocate sopra la cascata nelle quali si hanno in media due gradi centigradi di più che non nelle altre. La media di temperatura più bassa si ha nel canale proveniente dall'Orco (n. 5).

Nella pozza N. 2, ho osservato $+14^\circ + 15^\circ + 12^\circ$ (verso le ore undici antimeridiane, nelle giornate calde).

Nel canale (N. 5) ho osservato $+14^\circ + 12^\circ + 16^\circ$. Quest'ultima temperatura è del 1° Settembre 1890.

La temperatura delle altre pozze oscilla fra i limiti estremi, massimi e minimi indicati per le due pozze precedenti.

Nelle acque che si trovano al disopra del Piano di Ceresole verso i 2000 e i 2800 metri sul livello del mare io non ho trovato girini.

La temperatura di queste acque è in media inferiore a $+10^\circ$ ed anzi parecchi dei numerosi laghetti che stanno verso il colle del Nivolè o al disotto dei ghiacciai della Levanna, del Carro, ecc. non sono quasi mai totalmente liberi dal ghiaccio.

Le acque che sgorgano da essi sono freddissime e nelle pozze da essi formate non si trovano girini di anfibi anuri. Questo fatto concorda con quelli che io osservai in altre località alpine (1).

Dirò qui di passaggio che in tutta l'alta valle di Ceresole Reale non ho trovato nè girini nè adulti di nessuna specie di Anfibi urodeli.

Ciò premesso io credo che il polimorfismo assai spiccato che si osserva, sopratutto nello sviluppo della coda e della membrana caudale sia dovuto essenzialmente all'essere l'acqua nella quale i girini si sviluppano o stagnante o più o meno fortemente corrente.

Infatti dagli specchietti di misure sopra riferiti facendo una media della maggiore lunghezza della coda paragonata alla lunghezza del corpo (dal capo all'ano) si ottengono i valori seguenti:

---

(1) *Note di Biologia Alpina*, II. Bollett. dei Musei di Zoologia e di Anat. Comp. di Torino, n. 30, 1887.

Digitized by Google

1° Pozza N. 2. (Acqua stagnante) la coda è più lunga del corpo in media di m. 0,0025.

2° Pozza N. 4. (Acqua stagnante). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,003.

3° Pozza N. 3. (Acqua con lento corso). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,005.

4° Pozza N. 1 e N. 6. (Acqua corrente). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,008.

5° Canale d'acqua derivato dall'Orco N. 5 (Acqua fortemente corrente). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,012.

Dagli specchietti sopra riferiti risulta pure che lo sviluppo maggiore o minore della coda non è in correlazione collo sviluppo delle estremità posteriori (1).

Il lento svilupparsi dei girini di *Rana muta* nelle alte regioni alpine in ordine alle loro metamorfosi, e quindi il lungo soggiorno dei girini stessi nell'acqua è condizione eccellente, poichè si possa modificare lo sviluppo della coda. Questa condizione tuttavia si ha egualmente sia nelle pozze con acqua corrente sia in quelle con acqua stagnante e quindi l'azione modificatrice dell'acqua corrente rimane distinta.

Aggiungerò ancora che se teniamo conto della sola lunghezza del corpo (dal capo all'ano) questo è in media un po' più piccolo nei girini che si sviluppano nell'acqua stagnante che non in quelli che si sviluppano nell'acqua corrente, la differenza tuttavia è molto grande che non fra la lunghezza della coda, come si può vedere dagli specchietti sopra riferiti.

In complesso si può dire che i girini sviluppantisi nel canale derivato dall'Orco (2) (3°) in acqua fortemente corrente sono di mole un po' maggiore di quelli sviluppantisi in acque al tutto ferme.

(1) Anche coi girini che si allevano in laboratorio si può dimostrare l'azione modificatrice dell'acqua corrente. Nella primavera testè trascorsa io feci sviluppare numerosi girini di *Bufo vulgaris* in un acquario nel quale l'acqua si rinnovava continuamente dando luogo ad una corrente di cui potevo regolare a volontà la velocità. Sebbene il *Bufo vulgaris* non sia specie troppo conveniente per esperienze di tal fatta, tuttavia io ottenni nello spazio di un mese circa un aumento nella lunghezza della coda paragonata con quella del corpo, di m. 0,002 rispetto ai girini sviluppantisi nelle condizioni normali in acqua stagnante.

(2) Questi girini avevano una velocità di movimenti assai grande e potevano nuotare contro corrente in modo veramente notevole.

Digitized by Google

Si potrebbe ora domandare se queste variazioni possono, per via dell'azione secernente della scelta naturale e dei fenomeni ereditari dar luogo ad una modificazione costante pei girini di una data località, (come ad esempio pel Piano di Ceresole Reale dove prevalgono le acque correnti), tanto che esaminando complessivamente i girini della località stessa, questi presentino uno sviluppo maggiore della coda in confronto con quelli di altre località dove invece prevalgono le acque stagnanti,

Ciò pare non avvenga, poichè in realtà le rane sviluppatesi dai girini che crescono ad esempio nel canale derivato dall'Orco sopra citato è raro il caso vadano realmente a deporre le uova nello stesso canale. Ed in vero è noto come la *Rana muta* compiuta la deposizione delle uova, si allontani molto dalle acque e non vi ritorni che nella primavera successiva. Ora le peregrinazioni estive possono portare le rane in località diverse da quelle nelle quali si sono sviluppate. Sul Piano di Ceresole ciò può accadere facilmente perchè queste due sorta di acque si trovano non raramente vicine le une alle altre. I girini che nasceranno da queste rane si troveranno così molto spesso in condizioni opposte a quelle nelle quali i girini delle rane progenitrici si sono sviluppati.

Ne segue che non è possibile l'accumularsi per molte generazioni successive, di un carattere il quale tenda, per via ereditaria a divenir costante.

La scelta naturale in questo caso, quantunque tenda continuamente (ad esempio fra i girini che si sviluppano in acqua corrente) ad eliminare, per ragioni facili a comprendersi, gli individui più deboli e meno adatti, non riesce a fissare, per dir così, il carattere la di cui formazione venne provocata dalle circostanze esterne.

Così pure in tal caso le circostanze esterne, quantunque siano causa di modificazione negli organismi, tuttavia non sono (non potendo operare a lungo ed in modo uniforme ed anzi eliminandosi a vicenda), in grado di produrre una modificazione costante, di dar origine cioè a *varietà* nel significato tassonomico della parola.

Fatti anologhi a quelli sopra descritti rispetto al piano di Ceresole Reale si osservano anche in altre regioni, sebbene sopra una scala minore. Così ad esempio, ristudiando i girini di *Rana muta* che io raccolsi nell'estate del 1884 nell'alta valle di Andorno sul Biellese, ho ottenuto i dati seguenti:

Digitized by Google

I girini raccolti in pozze con acqua stagnante o di corso lentissimo presentano una lunghezza media della coda superiore a quella del corpo di m. 0,003 o di m, 0,005.

I girini raccolti in pozze alimentate da acqua corrente presentano una lunghezza media dalla coda superiore a quella del corpo di m. 0,007 e di m. 0,009.

A primo aspetto si potrebbe credere che la profondità maggiore dell'acqua nella quale i girini della *Rana muta* si sviluppano possa anch'essa operare analogamente all'acqua corrente, vale a dire provocare un maggior sviluppo della coda, similmente a quanto venne osservato pei girini degli Anfibi urodeli.

A questo riguardo è d'uopo osservare che i girini della *Rana muta* anche nei laghi profondi (Lago della Vecchia, ad esempio 1866 metri sul livello del mare nella Valle di Andorno) si scostano pochissimo dalle rive ed anzi si riducono nelle insenature là dove l'acqua è meno profonda ed il fondo è più melmoso. I girini infatti che io raccolsi in gran numero nel Lago della Vecchia presentano la coda più lunga in media di soli 3 millimetri paragonata alla lunghezza del corpo.

I girini invece raccolti nelle pozze dell' Alpe Rosei (pozza di piccole dimensioni, poco profonda; ma alimentata da una sorgente perenne) hanno una maggior lunghezza della coda di millimetri sette.

Anche nel Piano di Ceresole Reale, come in altre località delle alte Alpi, una parte certamente notevole di girini di *Rana muta* passa l'inverno allo stato di girino (1) poichè al 1° Settembre di quest'anno erano frequenti nelle pozze i girini con sviluppo molto poco inoltrato (vedansi negli specchietti sopra riferiti gli individui *a* pozza (2), *a* pozza (4), *a* pozza (5), *a*, *b* pozza (6).

Aggiungerò che essendosi in principio di Settembre la temperatura abbassata notevolmente, io trovava in tale epoca pochi girini liberamente nuotanti nelle acque mentre molti stavano affondati nel fondo, immobili.

Ora date le condizioni climatologiche del Piano di Ceresole Reale, ben pochi girini possono giungere alla metamorfosi prima del sopraggiungere dell'inverno alpino.

Nei girini di Ceresole Reale ed anche in quelli dell'alta valle

---

(1) L. Camerano, *Note di Biologia alpina*, I. *Dello sviluppo degli anfibi anuri sulle Alpi*. Boll. dei Musei di Zool. e di Anat. Comp. di Torino, n. 30, 1887.

Digitized by Google

di Andorno ho osservato, esaminando un grande numero di esemplari di varie età, che il così detto vestibolo boccale presenta pure un polimorfismo notevole.

Recentemente l'Héron-Royer e Van Bambeke (1) hanno cercato di stabilire differenze tassonomiche fra i girini della *Rana muta* Laur. (*Rana fusca* Roesel) e la *Rana fusca Honorati* Héron Royer (2) nel modo seguente: « Dans la forme de Grenouille rousse du sud-est de la France décrite par l'un de nous sous le nom de *Rana fusca Honorati*, la bouche du têtard se distingue par divers caractères de celle du têtard de *Rana fusca ordinaire*. Ainsi: elle est plus petite que chez *Rana fusca*; les papilles moins longue, moins nombreuses, disposées en un simple rang, ornent la lévre inferieure et remontent un peu sur les côtés de la lévre supérieure. Celle-ci est parfois incurvée en arc, mais à l'éstrémités moins relevées que chez la brune; d'autres fois plus molle, elle est un peu plissée; elle affecte alors des sinuosités sans forme bien arrêtés. Les lames palatines sont laterales et au nombre de quatre, dont deux premières longues et deux inférieures petites, bien nettement égales; chez *Rana fusca*, nous trouvons constamment six lames latérales palatines.

« Les linguales sont au nombre de cinq, dont la première qui est l'inférieure, est petite et mince; elle est médiane, plus courte et de moindre volume que chez *Rana fusca*; le deux suivantes sont aussi médianes et très-peu sinueuses: le deux autres sont latérales et proches du bec (3). »

Nei girini di *Rana muta* del Piano di Ceresole Reale (1600 metri circa sul livello del mare) e del Lago della Vecchia (alta valle di Andorno metri 1866 sul livello del mare), ho trovato promiscuamente nella stessa pozza le due disposizioni del vestibolo boccale sopra indicate: sia per quanto riguarda la forma generale di esso, sia per quanto riguarda il numero delle lamine palatine laterali. (4) Inoltre ho trovato parecchi casi di assimetria, vale a dire: due lamine palatine da una parte e tre lamine palatine

(1) *Le vestibule de la bouche chez les têtards des batraciens anoures d'Europe, sa structure, ses caractères chez le diverses especès* — Archives de Biologie de Van Beneden e Van Bambeke — vol. IX, 1889.

(2) Bull. Acad. Roy. de Belgique — 3 ser. vol. I, 1881.

(3) Op. cit. tav. XVII, fig. 11 e 17.

(4) Seguo per maggior chiarezza la nomenclatura proposta dai due autori sopracitati, quantunque essa sia poco felice.

Digitized by Google

dall'altra. Sono le lamine palatine inferiori quelle che variano più frequentemente in numero ed anche nello sviluppo (1).

Ho osservato pure assai variabile nello sviluppo la lamina linguale inferiore.

Le Rane adulte raccolte sul Piano di Ceresole, presentano, come del resto si suole osservare in generale, nelle alte regioni alpine, una notevole varietà di colorazione ed anche qualche variazione nella lunghezza del tronco rispetto a quelle delle estremità posteriori; ma senza che si possano stabilire varietà o sottospecie con caratteri veramente differenziali.

Da quanto sopra ho esposto credo di poter conchiudere:

1° Che pei girini degli Anfibi anuri una delle cause del polimorfismo, talvolta notevolissimo riguardante sopratutto la coda e la membrana caudale, si deve ricercare nell'azione esercitata dall'acqua corrente.

2° Che tale azione modificatrice è particolarmente aiutata dal fenomeno dello svernamento di molti girini, fenomeno frequente nelle alte regioni alpine dove dà luogo pure talvolta a casi di *neotenia*.

3° Che le modificazioni prodottesi per tali cause, sebbene talvolta molto spiccate, non si fissano come caratteri specifici per la non continuità della causa che le produce.

4° Che nello stabilire i caratteri differenziali dei girini delle varie specie di Anfibi anuri, è d'uopo tener conto di questi fatti per non correr rischio di dare troppa importanza a caratteri di indole transitoria, sviluppatisi per adattamenti speciali di corta durata.

5° Che volendo indicare lo stadio di sviluppo di un girino, vale a dire la distanza a cui esso si trova dalla metamorfosi (sopratutto se si tratta di girini delle alte regioni alpine) è d'uopo tener conto precipuamente dello sviluppo delle estremità posteriori: la mole, la lunghezza della coda, l'ampiezza e la forma della membrana caudale ed anche (fino ad un certo punto) lo sviluppo del vestibolo boccale essendo caratteri troppo facilmente modificabili per l'adattarsi rapido che fa il girino a certe condizioni dell'ambiente nel quale si sviluppa.

(1) Gli stessi Héron Royer e Van Bambeke hanno osservato (op. cit. p. 263) una variazione analoga nelle lamine palatine del girino della *Rana arvalis* Nillson.

Digitized by Google

La legge di Roberts sul quadrilatero articolato;

Nota dell'Ingegnere GIUSEPPE PASTORE,
presentata dal Socio FERRARIS

L'illustre professore S. Roberts, nella Memoria: « *On three-bar motion in plane space* » (*), dimostrò che la curva descritta da un punto invariabilmente congiunto colla biella di un quadrilatero articolato piano può essere descritta con tre quadrilateri articolati diversi.

La dimostrazione che il Roberts dà di questo teorema è essenzialmente analitica. Il Burmester, nel suo recente *Lehrbuch der Kinematik* (**), dimostra il teorema in modo geometrico, partendo dalla teoria del pantografo obliquo di Sylvester. Nella presente Memoria mi sono proposto di darne una dimostrazione diretta, che mi pare abbastanza semplice, e che spero sarà trovata opportuna; ne studio in seguito parecchie conseguenze ed applicazioni. In questa dimostrazione considero alcuni sistemi articolati speciali, poco studiati fin qui, in cui, oltre al membro fisso propriamente detto, vi ha un punto dei membri mobili che rimane fisso; meccanismi che, per brevità di locuzione, chiamo *meccanismi ad un punto fisso.*

I.

1. Si consideri un quadrilatero articolato ABNM (fig. 1), avente per lato fisso AB, e sia P un punto invariabilmente congiunto col tirante o biella MN. Nel movimento del sistema questo

---

(*) *Proceedings of the London mathematical Society.* Vol. VII, 1875, pag. 14. Vedasi pure nello stesso volume dei *Proceedings*, a pag. 136, la Memoria di CAYLEY, *On three-bar motion.*

(**) L. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik.* — Leipzig, 1888. Vol. I, pag. 294.

Digitized by Google

punto descrive una certa linea l, in generale di sesto ordine, perfettamente determinata quando sono determinati il quadrilatero articolato ABNM, ed il triangolo invariabile MNP.

Si costruiscano poscia i due parallelogrammi AMPM′, BNPM″, e sopra i lati M′P, PM″ dei medesimi i triangoli M′PN′, PM″N″, simili al triangolo dato MNP, e disposti rispetto ai lati M′P, PM″ come il triangolo MNP è disposto rispetto al lato MN; si costruisca infine il parallelogrammo N′PN″C.

La legge di Roberts stabilisce:

In ciascuno dei tre quadrilateri articolati:

ABNM, *col lato fisso* AB ,
ACN′M′, » AC ,
BCN″M″, » BC ,

il punto P *descrive la medesima curva* l.

2. La proposizione enunciata si può dimostrare in questo modo. Il movimento del quadrilatero articolato ABNM, fissato sul membro AB, non è *nè impedito, nè modificato*, aggiungendo al meccanismo i bracci AM′, M′P, BM″, M″P, che completano i due parallelogrammi AMPM′, BNPM″, nè quelli che formano i triangoli invariabili M′PN′, PM″N″, nè infine gli altri due lati N′C, N″C, che completano il parallelogrammo N′PN″C. L'intiero sistema articolato a 10 membri che ne risulta, formato dai tre triangoli invariabili simili MNP, M′PN′, PM″N″, articolati fra di loro in P, dai sei bracci che vanno ai punti A, B, C, e dal lato fisso AB, ha un movimento perfettamente determinato, ed il punto P del medesimo descrive la stessa linea l che è descritta dal punto P del quadrilatero primitivo ABNM.

Or bene, io dico che *nel movimento di questo meccanismo complesso il punto* C *rimane fisso*. Dimostrato quanto ora asserisco, è manifesto che le parti ABNM, ACN′M′, BCN″M″ di tale meccanismo si muovono come tre quadrilateri articolati aventi rispettivamente per lato fisso AB, AC, BC, e che, per conseguenza, il punto P descrive la medesima curva l, sia considerato come appartenente a ciascuno di questi tre quadrilateri, sia considerato come facente parte del meccanismo risultante dal loro complesso.

Digitized by Google

Pongo per brevità:

$$\begin{cases} \overline{MN}=a \,, \\ \overline{MP}=\overline{AM'}=b \,, \\ \overline{NP}=\overline{BM''}=c \,, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{M'P}=\overline{AM}=a' \,, \\ \overline{M'N'}=b' \,, \\ \overline{N'P}=\overline{CN''}=c' \,, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{M''P}=\overline{BN}=a'' \,, \\ \overline{PN''}=\overline{N'C}=b'' \,, \\ \overline{M''N''}=c'' \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle PMN=\angle N'M'P=\angle N''PM''=\alpha \,, \\ \angle MNP=\angle N'PM'=\angle N''M''P=\beta \,, \\ \angle MPN=\angle M'N'P=\angle PN''M''=\gamma \,. \end{cases}$$

Si prolunghino i lati AM', BM'' fino ad incontrarsi in X: siccome questi lati sono rispettivamente paralleli ad MP, NP, l'angolo AXB è uguale a γ, e quindi costante. Perciò nel movimento del sistema articolato complesso il punto d'intersezione X si muove sopra di una circonferenza di circolo passante per i due centri fissi A e B.

Questa circonferenza di circolo contiene pure il punto C. Ed invero, segno le rette $M'C$, $M''C$ e considero i triangoli $M'CN'$, $M''CN''$. I loro angoli in N' ed N'', indicati in figura con x, sono uguali fra di loro, giacchè, per costruzione, la figura $N'PN''C$ è un parallelogrammo. Inoltre nei triangoli invariabili simili $M'PN'$, $PM''N''$ si ha:

$$\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''} \,;$$

cosicchè nei triangoli considerati, $M'CN'$, $M''CN''$, i due lati adiacenti agli angoli uguali in N' ed N'' sono proporzionali. Questi due triangoli sono perciò simili, e quindi:

$$\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}=\frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}} \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\angle N'CM'=\angle CM''N''=e \qquad \ldots\ldots (2)$$

Considero ora l'altra coppia di triangoli $AM'C$, $BM''C$. Essi pure sono simili, perchè hanno gli angoli in M' ed M'' uguali fra di loro ed i lati adiacenti a questi angoli proporzionali.

Digitized by Google

Infatti, l'angolo $AM'C$ è esterno rispetto al triangolo $M'O'C$, essendo O' il punto d'incontro delle rette AM', CN'; quindi:

$$\angle AM'C = \angle M'O'C + e.$$

Ora, $\angle M'O'C = \angle MPN''$, perchè i lati del secondo sono paralleli e diretti nello stesso senso rispetto a quelli del primo, cosicchè:

$$\angle M'O'C = \angle MPN'' = \gamma + \delta + \alpha,$$

indicando con δ l'angolo variabile NPM''.

Ma $\gamma + \alpha = 180° - \beta$, e perciò:

$$\angle M'O'C = 180° - \beta + \delta,$$

ed

$$\angle AM'C = 180° - \beta + \delta + e.$$

D'altra parte:

$$\angle BM''C = \angle BM''N'' + e = 360° - (180 - \delta + \beta) + e =$$
$$= 180° - \beta + \delta + e;$$

la quale dice appunto che:

$$\angle AM'C = \angle BM''C.$$

Per la similitudine poi dei triangoli invariabili MNP, $M'PN'$, $PM''N''$, si ha:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''},$$

cosicchè, dalla relazione (1) si ottiene:

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}}.$$

Rimane così stabilito che i triangoli $AM'C$, $BM''C$ sono simili, e, per conseguenza, che:

$$\angle M'AC = \angle M''BC = m \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad \ldots\ldots (4)$$

Digitized by Google

La relazione (3) fa vedere che nel movimento del meccanismo complesso considerato, quando il braccio A M′ viene nella posizione AM'_0 sulla retta A C, il braccio B M″ viene in BM''_0 sulla retta B C, cosicchè il punto C è una delle posizioni prese dal punto X nel movimento del sistema. Questo punto C cade adunque sulla circonferenza fissa percorsa da X, e perciò nel triangolo A B C l'angolo A C B rimane costante ed uguale a γ.

La relazione (4) poi dice che in questo triangolo A B C i lati A C, B C, adiacenti all'angolo γ, sono proporzionali ai lati b, c, adiacenti all'angolo γ del triangolo invariabile M N P.

Dunque il triangolo A B C è simile al triangolo M N P. Esso inoltre ha il lato A B invariabile di lunghezza e di posizione; per conseguenza, come era da dimostrarsi, il suo vertice C rimane fisso (*).

II.

3. Poichè il triangolo A B C è simile al triangolo M N P, il punto C si può ottenere indipendentemente dalle costruzioni successive prima indicate: a togliere ogni ambiguità si noti ancora che questo triangolo A B C deve essere disposto rispetto al lato fisso A B come il triangolo M N P è disposto rispetto alla biella M N. Trovato il punto C rimane determinata la circonferenza di circolo A B C, sulla quale si trova il punto X, e che contiene pure, come si dimostra facilmente, il punto Y intersezione dei lati A M, C N″, ed il punto Z intersezione dei lati B N, C N′: si hanno così varii mezzi di verificare la costruzione.

Su questa medesima circonferenza A B C cadono eziandio i tre nodi o punti doppii, che, in generale, può avere la curva l (**).

(*) Il ROBERTS, osservando che i tre punti A, B, C sono *fuochi singolari* della curva l, cioè intersezioni reali degli assintoti circolari, enuncia la legge in questione nei termini seguenti (Vedi la Memoria citata di Roberts, al capoverso 5):

We conclude, then, that the locus in question can be described in three different ways, by similar traversing triangles moving with an angle on each of two circles about two singular foci as centres, and the angle moving on a circle, is equal to the angle sublended at its centre by the two remaining singular foci.

(**) L. BURMESTER, op. cit. Vol. I, pag. 296. Vedasi pure la Memoria citata di ROBERTS al capoverso 3.

Si dànno però casi speciali in cui la linea l possiede uno o due altri punti doppii non situati sulla circonferenza A B C.

Digitized by Google

4. È manifesto, da quanto precede, che *i tre quadrilateri articolati* ABNM, ACN'M', BCN''M'' *capaci di generare la stessa linea l, hanno i lati proporzionali, benchè non disposti nello stesso ordine.*

Dato perciò uno di questi quadrilateri, si possono ottenere gli altri due con una costruzione assai più semplice di quella indicata nella fig. 1.

Siano dati, ad esempio, i lati a, a', a'' ed $\overline{AB}$ del quadrilatero ABNM, e le distanze b, c del punto P da M ed N. Allora per avere i lati b, b', b'' ed AC del quadrilatero ACN'M' basta costruire quattro segmenti che siano coi primi nel rapporto costante $\frac{b}{a}$; e così per avere i lati c, c', c'' e $\overline{BC}$ del quadrilatero BCN''M'' quattro segmenti che siano coi primi nel rapporto $\frac{c}{a}$.

La costruzione si può fare in varii modi; però, affinchè non si abbia poi difficoltà nello stabilire quale dei segmenti ottenuti è la biella e quale il lato fisso, e per ottenere eziandio, sia in grandezza come in posizione relativa, i triangoli invariabili, conviene disporre la costruzione a questo modo.

Sopra di una retta indefinita (fig. 2) si portino, l'uno di seguito all'altro, uno dei bracci, $\overline{AM} = a'$, la biella, $\overline{MN} = a$, l'altro braccio, $ND = a''$, del quadrilatero dato ABNM, e sopra la biella MN si costruisca il triangolo invariabile MNP. Da A si conduca la retta AE parallela ad MP, e da D la retta DE parallela ad NP; si prolunghino poscia i lati MP, NP, fino ad incontrare in N'', N' le parallele ora segnate, e dal punto P si conduca la parallela M'M'' ad AD. Si porti infine sulla retta AD, a partire da A, un segmento AB uguale al lato fisso dato AB del primo quadrilatero, e da B si segni la parallela BC a DE. Allora, come è manifesto, gli elementi del quadrilatero ACN' M' sono: M'N' biella, M'N'P triangolo invariabile, AM' ed M'E bracci, ed AC lato fisso; e quelli del quadrilatero BCN''M'': M''N'' biella, M''N''P triangolo invariabile, DM'' ed EN'' bracci, e BC lato fisso.

Se il triangolo invariabile MNP è isoscele, oppure equilatero, due o tutti tre i quadrilateri capaci di generare la curva l hanno i lati rispettivamente uguali, però disposti in modo diverso. Se MNP è equilatero, e di più i bracci AM, BN sono uguali ai lati di questo triangolo, i tre quadrilateri sono identici fra di loro.

Digitized by Google

5. Qualsiasi movimento di una figura invariabile, nel proprio piano, si può ottenere facendo rotolare una certa linea (epiciclo), invariabilmente congiunta colla figura, sopra una cert'altra linea (deferente) fissa nel piano del movimento. Il deferente è il luogo geometrico dei centri istantanei di rotazione; l'epiciclo il luogo dei punti della figura mobile, che vengono successivamente a coincidere coi centri istantanei di rotazione.

Ora in ciascuno dei tre quadrilateri A B N M, A C N′ M′, B C N″ M″ (fig. 1) la linea l si può considerare come generata dal vertice P di un triangolo invariabile, di cui il lato opposto si muove coi suoi punti estremi sopra due circonferenze di circolo fisse. Perciò in ognuno dei tre sistemi il centro istantaneo di rotazione per il movimento della biella è il punto d'incontro dei due bracci: così, ad esempio, nel quadrilatero A B N M la biella, nell'istante in cui ha la posizione M N, ruota attorno al punto O intersezione di A M e B N. Per gli altri due quadrilateri gli attuali centri istantanei sono O′ ed O″.

Non vi ha quindi alcuna difficoltà a determinare la linea fissa e la linea rotolante corrispondenti a ciascuno di questi tre movimenti compiani: le tre coppie di linee sono rappresentate in parte, nella fig. 1, e distinte colle lettere f, r; f', r'; f'', r''; le f corrispondono alle linee fisse, le r alle rotolanti. Nel rotolamento di uno qualunque degli epicicli r sul rispettivo deferente f, il punto P, supposto invariabilmente congiunto con r, descrive ancora la linea l.

In un istante qualsiasi del movimento, i punti di contatto di queste tre coppie di linee, cioè i tre centri istantanei di rotazione O, O′, O″, *ed il punto descrivente* P *sono in linea retta.* Ed invero, la normale alla traiettoria descritta da un punto qualunque di un sistema piano, mobile nel proprio piano, è data, in un istante qualsiasi del movimento, dalla congiungente il punto mobile col centro istantaneo di rotazione del sistema nell'istante considerato. Ora, per le attuali posizioni dei tre sistemi i centri istantanei di rotazione sono O, O′, O″, e poichè il punto P, supposto invariabilmente congiunto colla biella di uno qualunque dei tre quadrilateri articolati A B N M, A C N′ M′, B C N″ M″, descrive sempre la medesima linea l, così le tre normali O P, O′ P, O″ P, devono cadere sopra di una medesima linea retta.

6. Nel dimostrare la legge di Roberts ho fatto vedere che i triangoli M′ C N′, M″ C N″ sono simili fra di loro. Or bene, se

Digitized by Google

si segna la retta $M'M''$, il triangolo $M'M''P$ che ne risulta, è simile ai due precedenti, perchè l'angolo $M'PM''$ è uguale ad x, ed i due lati a' ed a'' adiacenti a questo angolo sono nello stesso rapporto dei lati b', b'' e c', c'' adiacenti all'angolo x dei triangoli $M'CN'$, $M''CN''$.

Dalla similitudine dei tre triangoli $M'CN'$, $M''CN''$, $M'M''P$ si ricava la relazione:

$$a' : b' : c' = a'' : b'' : c'' = \overline{M'M''} : \overline{M'C} : \overline{M''C},$$

dalla quale si scorge che il triangolo variabile $M'M''C$ si mantiene costantemente simile al triangolo invariabile MNP.

Ma il ragionamento si può estendere ad altri due gruppi di triangoli Si considerino dapprima i tre triangoli AMN, $AM'N'$, $N'PN$: essi sono simili fra di loro, perchè hanno un angolo uguale, indicato in figura con y, ed i lati adiacenti a questo angolo proporzionali. Dalla loro similitudine se ne deduce che anche il triangolo variabile ANN' rimane simile al triangolo MNP.

La stessa cosa si conchiude per il triangolo variabile MBN'', considerando i tre triangoli BNM, $BM''N''$, MPN'', simili fra di loro, perchè hanno un angolo uguale, z, ed i lati adiacenti a questo angolo proporzionali.

Riassumendo, nel meccanismo ad un punto fisso considerato abbiamo i seguenti quattro triangoli, che rimangono simili ai triangoli invariabili MNP, $M'PN'$, $PM''N''$:

$$ABC,$$

$$M'M''C, \quad ANN', \quad MBN''.$$

7. Nel meccanismo ad un punto fisso della fig. 1 siano:

V la velocità del punto P,

v e v_1, le velocità dei punti M ed N della biella MN,

v' e v'_1, » » M' ed N' » $M'N'$,

v'' e v''_1, » » M'' ed N'' » $M''N''$.

Poichè il triangolo invariabile MNP si muove coi suoi vertici M, N sulle circonferenze A e B, esso ruota istantaneamente

Digitized by Google

attorno al punto d'incontro O dei due raggi A M, B N. Ma nello stesso istante i triangoli M'N'P, M''N''P ruotano rispettivamente attorno ai centri istantanei di rotazione O', O'', cosicchè si ha:

$$\frac{V}{\overline{OP}} = \frac{v}{\overline{OM}} = \frac{v_1}{\overline{ON}},$$

$$\frac{V}{\overline{O'P}} = \frac{v'}{\overline{O'M'}} = \frac{v'_1}{\overline{O'N'}},$$

$$\frac{V}{\overline{O''P}} = \frac{v''}{\overline{O''M''}} = \frac{v''_1}{\overline{O''N''}};$$

da cui si ottiene:

$$V = v\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = v_1\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = v'\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M'}} = v'_1\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'N'}} = v''\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''M''}} = v_1''\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''N''}} \quad (5).$$

Ora, si indichino con:

ω ed ω_1 le velocità angolari dei bracci A M e B N,
ω' ed ω'_1 » » » A M' e C N',
ω'' ed ω''_1 » » » B M'' e C N'';

allora si ha:

$$v = \omega a', \qquad v_1 = \omega_1 a'',$$
$$v' = \omega' b, \qquad v'_1 = \omega'_1 b'',$$
$$v'' = \omega'' c, \qquad v''_1 = \omega''_1 c'.$$

Sostituendo nell'espressione (5) si ottiene:

$$V = \omega a'\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \omega_1 a''\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = \omega' b\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M'}} = \omega'_1 b''\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'N'}} = \omega'' c\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''M''}} =$$

$$= \omega''_1 c'\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''N''}}; \qquad \ldots (6)$$

Digitized by Google

da cui:

$$\left\{\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega \frac{a'}{a''} \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \\
\omega' &= \omega \frac{a'}{b} \frac{\overline{OP}}{\overline{O'P}} \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}}, \\
\omega_1' &= \omega \frac{a'}{b'} \frac{\overline{OP}}{\overline{O'P}} \frac{\overline{O'N'}}{\overline{OM}}, \\
\omega'' &= \omega \frac{a'}{c} \frac{\overline{OP}}{\overline{O''P}} \frac{\overline{O''M''}}{\overline{OM}}, \\
\omega_1'' &= \omega \frac{a'}{c'} \frac{\overline{OP}}{\overline{O''P}} \frac{\overline{O''N''}}{\overline{OM}}.
\end{aligned}\right.$$

Ma dalle due coppie di triangoli simili OMP, OAO′ ed ONP, OBO″ si ricava:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{O'P}} = \frac{b}{\overline{O'M'}}, \qquad \frac{\overline{OP}}{\overline{O''P}} = \frac{c}{\overline{O''M''}}.$$

Di più si noti che i triangoli MNO, M′N′O′, M″N″O″, di cui un lato è la biella di ciascuno dei quadrilateri ed il vertice opposto il corrispondente centro istantaneo di rotazione, sono simili fra di loro, perchè uno dei loro angoli è x e gli altri sono rispettivamente i supplementi di y e di z. Dalla similitudine di questi triangoli si ricava:

$$\frac{\overline{O'N'}}{\overline{O'M'}} = \frac{\overline{ON}}{a}, \qquad \frac{\overline{O''N''}}{\overline{O''M''}} = \frac{\overline{OM}}{a}.$$

Digitized by Google

Sostituendo nelle cinque formole precedenti, otteniamo:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \frac{a'}{a''} \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} , \\ \omega' &= \omega \frac{a'}{\overline{OM}} , \\ \omega_1' &= \omega \frac{a'}{a''} \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} , \\ \omega'' &= \omega \frac{a'}{\overline{OM}} , \\ \omega_1'' &= \omega . \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (7).$$

Da queste relazioni si deducono varie conseguenze:

1°.

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \omega_1'' \\ \omega' &= \omega'' \\ \omega_1 &= \omega_1' \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (8).$$

Cioè: *se si considerano due qualunque dei tre punti* A, B, C, *le sbarre girevoli attorno ad essi che non appartengono al quadrilatero articolato avente per centri fissi questi due punti, si muovono colla medesima velocità angolare.*

Questa proprietà è confermata dalla proprietà geometrica vista nella dimostrazione della legge di Roberts. Poichè i due bracci AM′, BM″, ad esempio, s'incontrano sempre in un punto X situato sulla circonferenza A B C, cioè fanno fra di loro l'angolo costante γ, è manifesto che essi ruotano attorno ai centri fissi A e B come i due lati AX, XB dell'angolo invariabile AXB i lati del quale passano costantemente per A e B: le loro velocità angolari ω' ed ω'' sono perciò uguali fra di loro. Lo stesso si può dire per le altre due coppie di lati.

Digitized by Google

2°.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_1} &= \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} \frac{a''}{a'}, \\ \frac{\omega'}{\omega_1'} &= \frac{a''}{\overline{ON}}, \\ \frac{\omega''}{\omega_1''} &= \frac{a'}{\overline{OM}}. \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots (9).$$

Queste formole fanno vedere che i rapporti $\frac{\omega'}{\omega'_1}$ ed $\frac{\omega''}{\omega''_1}$ fra le velocità angolari nei due quadrilateri $A C N' M'$, $B C N'' M''$ si possono determinare per mezzo degli elementi del solo quadrilatero $ABNM$, senza che sia necessário di procedere alla determinazione di quei due quadrilateri.

Di più esse dimostrano che i rapporti $\frac{\omega'}{\omega'_1}$ ed $\frac{\omega''}{\omega''_1}$ sono indipendenti dai lati b e c del triangolo invariabile MNP; cosicchè se si varia la posizione del punto generatore P rispetto alla biella MN del quadrilatero $ABNM$, gli altri due quadrilateri $A C N' M'$, $B C N'' M''$ variano bensì di lati, ma i rapporti delle velocità angolari dei loro bracci non cambiano.

Dalle formole (9) si deduce ancora la relazione:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega'_1} : \frac{\omega''}{\omega''_1} \qquad \ldots\ldots (10).$$

8. Se il punto descrivente P cade sulla biella, si ha il sistema articolato ad un punto fisso rappresentato nella fig. 3. Esso si ottiene costruendo dapprima i due parallelogrammi $A M' P M$, $B M'' P N$; determinando poscia sul lato $M'P$ del primo, e sul lato PM'' del secondo, i punti N', N'', tali che:

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{N'P}} = \frac{\overline{PN''}}{\overline{N''M''}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}};$$

e costruendo infine il parallelogrammo $P N' C N''$.

Digitized by Google

In questo caso il punto C cade sulla retta AB e ne determina i segmenti AB, CB, tali che:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}};$$

nel movimento del sistema, tenuto fisso il lato AB, questo punto C rimane fisso.

I tre quadrilateri capaci di generare la medesima curva l sono allora:

ABNM, col lato fisso AB,
ACN'M', « AC,
BCN"M", « BC.

Se nel primo il punto descrivente P cade sulla biella, come in figura, negli altri due questo punto cade sul prolungamento della biella. Ciò si deduce anche dal meccanismo generale della fig. 1, osservando che nel caso ora considerato si ha: $\alpha=o$, $\beta=o$, $\gamma=\pi$. Se invece nel primo quadrilatero il punto descrivente P cade sul prolungamento della biella, per esempio dalla parte di N, si ha $\alpha=o$, $\beta=\pi$, $\gamma=o$, e quindi nel quadrilatero ACN'M' il punto P cade sulla biella e nell'altro BCN"M" sul prolungamento della biella.

I quattro triangoli simili ai triangoli invariabili del meccanismo generale in questo caso si riducono a rette. Perciò nel meccanismo ad un punto fisso della fig. 3 abbiamo i seguenti gruppi di punti che rimangono in linea retta:

ABC,
M'M"C, ANN', MBN";

e fra i vari segmenti si ha la relazione:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}=\frac{\overline{M'N'}}{\overline{N'P}}=\frac{\overline{PN''}}{\overline{N''M''}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{M'C}}{\overline{CM''}}=\frac{\overline{AN'}}{\overline{N'N}}=\frac{\overline{MN''}}{\overline{N''B}}.$$

I tre quadrilateri ABNM, ACN'M', BCN"M" hanno ancora i lati proporzionali, benchè non disposti nello stesso ordine. Dato uno di questi quadrilateri si possono perciò ottenere gli altri due

Digitized by Google

con una costruzione derivata da quella della fig. 2. In questo caso però è forse più conveniente procedere senz'altro alla costruzione del meccanismo ad un punto fisso rappresentato nella fig. 3.

9. Si supponga che nel sistema articolato complesso della figura 1 non si fissi che uno dei vertici A, B, C, ad esempio il punto A (fig. 4). Allora, da quanto precede, comunque si deformi questo meccanismo attorno al punto A, il triangolo variabile ABC rimane sempre simile al triangolo invariabile MNP.

Si ottiene per conseguenza un pantografo: ad ogni movimento del punto C corrisponde un movimento simile del punto B. Se C percorre una certa linea λ, B descrive una linea λ' simile a λ: il rapporto costante degli elementi omologhi di queste due linee simili è uguale ad $\overline{AC}:\overline{AB}$, cioè a $b:a$. Esse hanno per punto corrispondente comune il punto fisso A, e *sono girate l'una rispetto all'altra dell'angolo* α Perciò se la linea λ passa per A, anche λ' passa per questo punto. Se, in particolare, C è condotto lungo una retta mn, B si muove lungo la retta $m'n'$ inclinata dell'angolo α alla prima. Il punto C non può allontanarsi dal punto fisso A di una lunghezza maggiore di $\overline{AM'}+\overline{M'N'}+\overline{N'C}$: quando C raggiunge tale distanza i tre lati AM', M'N', N'C sono in linea retta, e si dispongono pure in linea retta i lati AM. MN, NB e BM'', M''N'', N''C: allora il meccanismo prende la forma di un triangolo AC_0B_0.

Anche il sistema articolato della fig. 3 può dar luogo ad un pantografo; in questo caso però lo spostamento angolare delle due figure simili è di 0° o di 180°. Se il punto fisso è C, le due figure sono spostate di 180°; se invece il punto fisso è A o B, lo spostamento angolare è nullo.

10. Questo pantografo generale si può semplificare notevolmente. Si consideri la sola parte del meccanismo che è costituita dal parallelogrammo AMPM' (fig. 5) e dai due triangoli invariabili M'PN', MNP, simili fra di loro, ma diversamente disposti, come indica la figura, rispetto ai lati M'P, MP del parallelogrammo. Comunque si deformi questo sistema articolato attorno al punto fisso A, i tre triangoli AMN, AM'N', N'PN si mantengono sempre simili tra di loro, e tali che:

$$a:b:c=a':b':c'=\overline{AN}:\overline{AN'}:\overline{NN'} ,$$

Digitized by Google

come quando questo sistema appartiene al meccanismo complesso della fig. 1. Il triangolo variabile A N N′ si mantiene perciò sempre simile ai triangoli invariabili M N P, M′ P N′; cosicchè se si fissa uno dei vertici A, N, N′, ad esempio il vertice A del parallelogrammo, si ottiene un altro pantografo, e, precisamente, il pantografo obliquo proposto da Sylvester (*).

Con questo meccanismo più semplice si ottengono i medesimi risultati del precedente: mentre il punto N percorre una linea λ qualsiasi, il punto N′ descrive una linea λ' simile; queste due linee hanno per punto comune corrispondente il punto fisso A e per rapporto di similitudine il rapporto costante $a:b$ od $a':b'$. Esse inoltre sono girate l'una rispetto all'altra dell'angolo α.

Se il punto N è sul lato M P o sui suoi prolungamenti, il punto N′ cade su M′ P o sui suoi prolungamenti, ed i tre punti A, N, N′ cadono in linea retta. Allora il pantografo obliquo di Sylvester si riduce al pantografo comune, come è manifesto dalle figure 6 e 7.

11. Qualsiasi quadrilatero articolato che riceva applicazione o quale *strumento per tracciar curve*, o quale *conduttore rettilineo approssimato*, od in qualsiasi altro modo per la traiettoria descritta da un punto della sua biella, può essere sostituito da due altri quadrilateri, che si determinano colla legge testè dimostrata. In generale questi due nuovi meccanismi hanno disposizione e dimensioni diverse da quelle del meccanismo da cui derivano; cosicchè, dato questo, noi possediamo tre quadrilateri diversi, ma equivalenti per quanto riguarda le traiettorie, e nello studio di una macchina si applicherà quello dei tre meccanismi che meglio corrisponde alle condizioni speciali dell'impianto.

Dal notissimo conduttore rettilineo approssimato di Watt, ad esempio, si deducono due altri conduttori capaci di generare la stessa curva a lunga inflessione che si ottiene dal primo. In questo caso speciale si ricade sopra un meccanismo già noto; sul conduttore di Evans (**); però rimane dimostrata l'equivalenza di due conduttori prima ritenuti distinti: quello di Watt e quello di Evans.

(*) I. I. SYLVESTER, *On the plagiograph aliter the skew pantigraph*. *Nature*, Vol. XII, pag. 168. Vedasi pure nello stesso volume, a pag. 214, lo scritto di I. I. SYLVESTER, *Hystory of the plagiograph*.

(**) L. BURMESTER, op. cit., Vol. I, pag. 635.

Digitized by Google

Una cosa simile succede per l'antiparallelogrammo articolato, che, coll'applicazione della legge di Roberts, si riconosce essere equivalente al quadrilatero isoscele (*).

12. Escirebbe dal campo impostomi l'esame di tutte queste applicazioni, che, del resto furono già ampiamente trattate. Mi fermerò invece sopra di un caso specialissimo, nel quale la legge di Roberts rimane confermata da un'altra legge importantissima della Cinematica moderna, cioè dalla legge della *duplice generazione delle cicliche*, enunciata in tutta la sua generalità da Bellermann nel 1867.

Si supponga (fig. 8) che uno dei centri fissi del quadrilatero ABNM, per esempio, il centro B, si trovi a distanza infinita sopra di una retta NB_∞ perpendicolare alla retta AN, e che la biella MN del quadrilatero sia lunga quanto il braccio finito AM. Allora il punto N percorre la retta AN, ed il quadrilatero articolato si riduce al *manovellismo di spinta isoscele* ANM.

In questo caso la biella MN si muove di moto ellittico, e, per conseguenza:

1°. La linea fissa, cioè il luogo dei centri istantanei di rotazione O, è la circonferenza di circolo f di centro A e raggio $2\overline{AM} = 2\overline{MN}$; la linea rotolante è la circonferenza di circolo r di centro M e raggio $\overline{AM} = \overline{MN}$.

2°. La traiettoria descritta da un punto P congiunto invariabilmente colla biella MN è un'ellisse l, che ha per centro A, per assi le rette xx, yy passanti per i punti d'incontro Q, R della retta PM colla circonferenza rotolante r, e per semiassi le distanze $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$; se il punto P cade sulla rotolante r, l'ellisse si riduce ad una retta passante per A; se P cade in M, l'ellisse si riduce ad una circonferenza di circolo di centro A e raggio AM.

3°. L'ellisse l si può pure supporre generata dal punto P invariabilmente congiunto colla circonferenza rotolante r, mentre questa linea rotola entro alla circonferenza fissa f; essa perciò appartiene alla classe delle *curve cicliche*, linee che nascono appunto quando le due linee, epiciclo e deferente, sono circonferenze di circolo.

Applicando la legge di Roberts a questo quadrilatero speciale, uno dei tre quadrilateri capaci di generare la curva l, il qua-

(*) L. Burmester, op. cit., Vol. I, pag. 310.

Digitized by Google

drilatero $B_\infty C_\infty N''_\infty M''_\infty$ va a distanza infinita, e, per conseguenza, non rimangono che i due quadrilateri $AB_\infty NM$, $AC_\infty N'M'$, che sono entrambi manovellismi di spinta isoscele.

In questo caso, infatti, il meccanismo complesso formato dai tre quadrilateri si riduce al pantografo obliquo di Sylvester $ANMPN'M'$, cosicchè mentre il punto N descrive la retta mn passante per il centro fisso A, il punto N' descrive la retta $m'n'$ passante essa pure per A, ed inclinata alla prima dell'angolo α. Allo stesso risultato si giunge osservando che N' deve ruotare attorno al punto C_∞, e che la retta $C_\infty N'$, essendo parallela a PN''_∞, è inclinata dell'angolo α sulla retta PM''_∞.

L'ellisse l può così essere generata o dal punto P invariabilmente congiunto colla biella MN del manovellismo di spinta isoscele ANM, oppure dal punto P invariabilmente congiunto colla biella M'N' del manovellismo di spinta isoscele AN'M'. Ora, in questo secondo manovellismo la biella M'N' si muove pur essa di moto ellittico, ed ha per deferente la circonferenza di circolo f_1 di centro A e raggio $2\overline{AM'} = 2\overline{M'N'}$, e per epiciclo la circonferenza di circolo r_1 di centro M' e raggio $\overline{AM'} = \overline{M'N'}$. Cosicchè la ciclica l si può generare o col rotolamento di r entro f, oppure col rotolamento di r_1 entro f_1.

Si noti ancora che i centri istantanei di rotazione O, O'. dei due manovellismi ed il punto P sono in linea retta; i triangoli OMP, OAO' sono dunque simili, cosicchè:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AO'}};$$

ma

$$\overline{AM'} = AO' - O'M',$$

e perciò:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{O'M'}}{\overline{O'A}}.$$

Ora, il teorema di Bellermann sulla duplice generazione delle cicliche stabilisce (*):

(*) BELLERMANN. *Epycicloiden und Hypocicloiden.* — Jena 1867. Intorno a questo teorema vedasi pure l'op. cit. di L. BURMESTER, vol. I, a pag. 136, e quella testè pubblicata dal prof. D. TESSARI, *La Cinematica applicata alle macchine.* — Torino 1890, pag. 117.

Digitized by Google

Una ciclica può essere generata mediante due diverse coppie di circonferenze di circolo. Le circonferenze fisse delle due coppie sono concentriche, e la distanza del punto descrivente dal centro di una delle rotolanti è uguale alla distanza dei centri dell'altra coppia di circonferenze. Inoltre se R, R' *sono i raggi dell'epiciclo e del deferente di una coppia*, R_1, R'_1 *quelli dell'epiciclo e del deferente dell'altra, si ha* (per il caso del rotolamento interno) *la relazione:*

$$\frac{R}{R'} = 1 - \frac{R_1}{R'_1}.$$

Applicando questo teorema, si ottiene evidentemente il medesimo risultato ottenuto colla legge di Roberts.

Torino, novembre 1890.

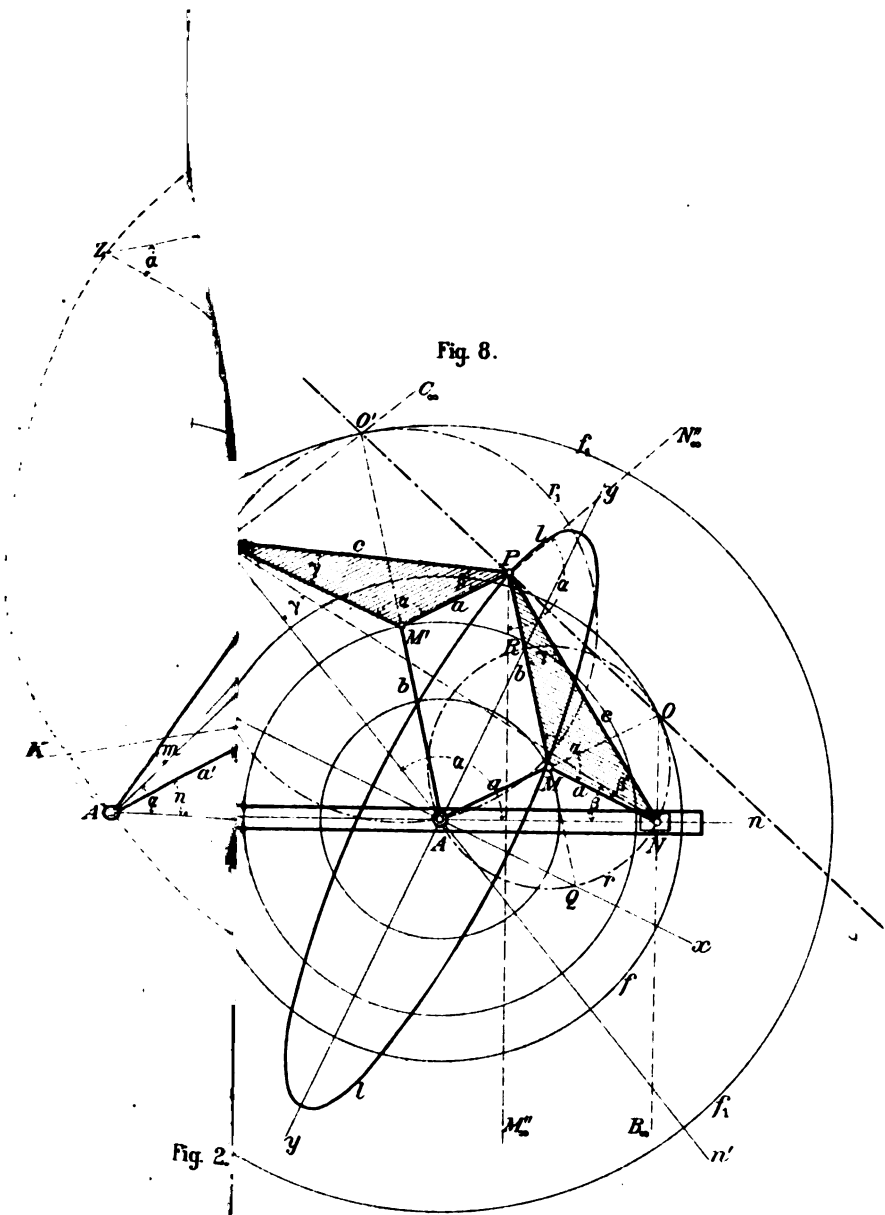
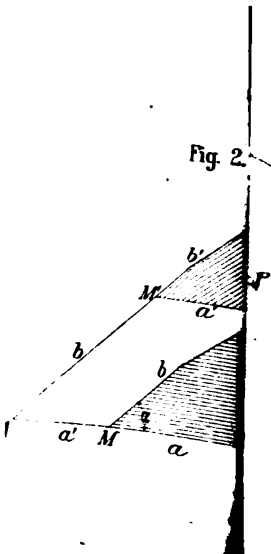
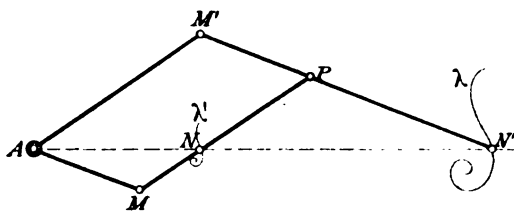
L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

Tav. I.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 23 Novembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

In questo giorno la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche non tenne adunanza per causa delle elezioni politiche.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 1° Luglio al 15 Novembre 1890

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

Donatori

R. Società dell'Austr. merid. (Adelaide).

* Transactions of the R. Society of South Australia; vol. XIII, part. 1, edited by Prof. Ralph Tate. Adelaide, 1890; in-8°.

R. Accademia delle Scienze di Amsterdam.

* Verhandelingen der k. Akademie van Wetenschappen (Afdeelingen-Natuurkunde); Deel XXVII. Amsterdam, 1890; in-4°.

Id.

— Verslagen en Mededeelingen der k. Akad. van Wet. etc. (Afd. Natuurkunde); derde Reeks, Deel VI. Amsterdam, 1889; in-8°.

Id.

— Jarboek van der k. Akad. van Wet. to Amsterdam, voor 1889. Amsterdam, 1 vol. in-8°.

Id.

— Verslagen en Mededeelingen der k. Akademie van Wetenschappen: Afdeeling Natuurkunde; 3 Reeks, VII Deel. Amsterdam, 1890; in-8°.

Staz. enologica sperimentale d'Asti.

* Le Stazioni Sperimentali agrarie italiane; Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, pubblicato sotto gli auspici del Ministero d'Agricoltura, diretto dal Prof. Ing. Mario Zecchini, Direttore della R. Stazione enologica sperimentale di Asti; vol. XVIII, fasc. 5, 6; vol. XIX, fasc. 1, 3, 4. Asti, 1890; in-8° gr.

Digitized by Google

* Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschapp van Kunsten en Wetenschappen; Deel XXVII, 1889, Aflevering IV. Batavia, 1890; in-8°. — Società di Scienze ed Arti di Batavia.

— Tijdschrift voor Indische TAAL, Land-en Volkenkunde etc.; Deel XXXIII, Aflev. 5 en 6. Batavia, 1890; in-8°. — Id.

* American Journal of Mathematics, Simon NEWCOMB editor, Thomas CRAIG Associate Editor; published under the auspices of the Johns HOPKINS University; vol. XII, n. 1, 2, 3, 4. Baltimore, 1889-90; in-4°. — Università J. HOPKINS (Baltimora).

— Index to volumes I - X, 1 fasc. in-4°. — Id.

— American chemical Journal edited by Ira REMSEN, Prof. of Chemistry in the I. HOPKINS University; vol. XI, n. 6, 7. Baltimore, 1889; in-8°. — Id.

— Studies from the biological Laboratory in the J. HOPKINS University; vol. IV, n. 5, 6. Baltimore, 1889; in-8°. — Id.

— Johns HOPKINS University Circulars, etc.; vol. VIII, n. 75, 77. Baltimore, 1889; in-4°. — Id.

* Sitzungsberichte der k. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; I–XXIV, 9 Januar bis 10 April 1890. Berlin; in-8° gr. — R. Accademia delle Scienze di Berlino.

* Jahrbuch über die Fortschrifte der Mathematik begründet von Carl OHRTMANN, etc., herausg. von Max HENOCH und Emil LAMPE; Band XIX. Heft 3. Berlin 1890; in-8°. — La Direzione (Berlino).

Geologische Karte von Preussen und den Thüringischen Staaten in Maafsstabe von: 1 25,000 etc.; 43 Lief., Grad-Abtheilung 33, n. 9, 10, 15, 16. Berlin, 1890; in-fol.° gr. — Berlino.

— Erläuterung zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten; 43 Lief, n. 9. 10, 15, 16. Berlin, 1889; in-8° gr. — Id.

Abhandlungen zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten; Band X, Heft 2: - Das Norddeutsche Unter-Oligocän und seine Mollusken-Fauna; von A. von KOENEN; Lief. II, Conidae, Volutidae, Cypracidae, etc. Berlin, 1890; in-8° gr. — Id.

* Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie 4ª, t. VIII, fasc. 2, 3 e 4; t. IX, fasc. 1 4; t. X, fasc. 1, 2. Bologna, 1887–1890; in-4°. — R. Acc. delle Sc. dell'Istituto di Bologna.

Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna: anni accademici 1887-88 e 1888-89. Bologna, 1889; in-8°. — Id.

Digitized by Google

Società Medico-chirurg. di Bologna. — * Bullettino delle Scienze mediche pubblicato per cura della Società Medico-chirurgica e della Scuola medica di Bologna; serie 7ª, vol. 1, fasc. 7-11. Bologna, 1890; in-8°.

R. Soc. geologica Ungherese (Budapest). — * Jahresbericht der k. Ungarischen geologischen Anstalt für 1888. Budapest, 1890; 1 vol. in-8° gr.

Id. — Mittheilungen aus dem Jahrbuche der k. Ung. geol. Anstalt; IX Band, 1 Heft. Budapest, 1890; in-8° gr.

Id. — Földtani Közlöny (geol. Mittheilungen) etc. vom Dr. Moriz STAUB. Budapest, 1890; in-8° gr.

Società belga di Microscopia (Bruselle). — * Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVI, n. 8-11. Bruxelles, 1890; in-8°.

Soc. malacologica del Belgio (Bruselle). — * Annales de la Société R. malacologique de Belgique; t. XXIII (4ª serie, t. III), année 1888. Bruxelles, 1888; in-8°.

Id. — Procès-verbaux des séances de la Société R. malacologique de Belgique t. XVII, année 1888, pag. LXXIII-CXXIV; t. XVIII, année 1889, pag. I-CXXXII. Bruxelles, 1888-89; in-8°.

Soc. entomologica del Belgio (Bruselle). — * Annales de la Société entomologique de Belgique, t. XXXIII. Bruxelles, 1889; in-8°.

Soc. Scientifica Argentina (Buenos Aires). — * Anales de la Sociedad cientifica Argentina, ecc.; t. XIX, entregas 4-6; t. XXX, entr. 1, 2, 3, 4. Buenos Aires, 1890; in 8°.

Id. — Indice general de las materias contenidas en los Anales de la Sociedad cientifica Argentina; vol. 1 à XXIX, 1876-1889. Buenos Aires, 1890; in-8°.

Id. — Memoria del Presidente (Carlos M. MORALES), correspondiente al XVIII periodo 1889-90, leida en la asamblea del 15 de Iulio de 1890: Supplem. à la entrega 2ª del tomo XXX. Buenos Aires, 1890; 1 fasc. in-8°.

Società Asiatica del Bengala (Calcutta). — * Journal of the Asiatic Society of Bengal; vol. LVII, part. II, n. 5, 1888; vol. LIX, part. II, and Supplement n. 1, 1890. Calcutta, 1890; in-8°.

Id. — Proceedings of the Asiatic Society of Bengal, etc; 1890, n. 1, 2, 3. Calcutta, 1890; in-8°.

Id. — * Records of the geological Survey of India; vol. XXIII, part. II. Calcutta, 1890; in-8° gr.

Museo di Zool. compar. (Cambridge, Mass.). — * Memoirs of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol. XVI, n. 3: Genesis of the *Arietidae*, by Alphons HYATT. Cambridge, 1889; in-4°.

Digitized by Google

* Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol. IX, n. 4: a third Supplement to the fifth volume of the Terrestrial Air-Breathing Mollusks of the United States and adjacent Territories; by W. G. BINNEY: vol. XVI, n. 9 (geological series, vol. II; On Keratophyre from Marblehead Neck, Massachussetts; by John H. SEARS: vol X, n. 2; On the hate of Growth of Corals; by Alexander AGASSIZ. Cambridge, U. S. A., 1890; in-8°. — Museo di Zool. compar. (Cambridge, Mass.).

* Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, Edward C. PICKERING Director; vol. XXI, part. I. — Observations of the New England metereological Society, in the year 1888; vol. 22. — Meteorol. Observ. made on the summit of Pike's Peak, Colorado, etc., Ianuary 1874 to June 1888, etc. Cambridge, 1889; in-4°. — Osserv. astronom. del Coll. HARVARD (Cambridge, Mass.).

— On the Spectrum of ξ Ursae Maioris; by Edward C. PICKERING (from the Americ. Journal of Science; vol. XXXIX, Jan. 1890); 2 pag. in-8°. — Id.

* Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. GOMES TEIXEIRA; vol. IX, n. 5, 6. Coimbra, 1889; in-8°. — La Direzione (Coimbra).

* Actas de la Academia Nacional de Ciencias de la Republica Argentina en Córdoba; t. VI (con un Atlas). Buenos Aires, 1889; in-4°. — Accad. nazionale delle Scienze in Cordova.

* Anales de Oficina meteorológica Argentina por su Director Gualterio G. DAVIS; t. VII. Buenos Aires, 1889; in-4°. — Osserv. Meteor. Argentino (Cordova).

* Bulletin international de l'Académia des Sciences de Cracovie: Comptes-rendus des séances de l'année 1890, Juin, Juillet, Octobre, 1890. Cracovie, 1890; in-8°. — Accad. delle Sc. di Cracovia.

* Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung: Geodätische Arbeiten; Heft VI, VII. Christiania, 1888-90; in-4°. — Commiss. Norv. per la misura del grado in Eur. (Cristiania).

* Annales de l'École polytechnique de Delft; t. V, 3e et 4e livraisons. Leida, 1890; in-4°. — Scuola politecnica di Delft.

* The Scientific Proceedings of the R. Dublin Society; vol. VI (new series), parts 7-9. Dublin, 1889-90; in-8°. — Reale Società di Dublino.

* Transactions of the R. Society of Edinburgh; vol. XXXIII, part 3, for the Session 1886-87: vol. XXXV, parts 1-4, for the Sess. 1887-88; 1888-89; 1889-90. Edinburgh, 1888-90; in-4°. — Società Reale di Edimborgo.

* Proceedings of the R. Society of Edinburgh; vol. XV, Session 1887-88; vol. XVI, Session 1888-89. Edinburgh, 1889-90; in 8°. — Id.

* The Journal of Comparative Medicine and Veterinary Archives, edited by W. A. CONKLIN; vol. XI, n. 6-11. Philadelphia, 1890; in-8°. — La Direzione (Filadelfia).

Digitized by Google

Società filosofica americana (Filadelfia).
* Transactions of the american philosophical Society held at Philadelphia, etc.; vol. XVI, new series, part 3. Philadelphia, 1890; in-4°.

Accad. di Sc. nat. di Filadelfia.
* Proceedings of the Academy of nat. Sciences of Philadelphia; part I, January-March 1890. Philadelphia, 1890; in-8°.

Istituto Wagner (Filadelfia).
* Transactions of the Wagner Free Institute of Science of Philadelphia; vol. III. Philadelphia, 1890; in-8° gr.

Società Senkenbergiana, di Francoforte.
* Bericht über die Senekenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt am Main, 1890. Frankfurt am Main, 1890; in-8°.

Soc. di Fisica e di St. naturale di Ginevra.
* Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève; t. XXX, 2e partie. Genève, 1889-90; in-4°.

Società Olandese delle Scienze (Harlem).
* Archives Nèerlandaises des Sciences exactes et naturelles etc.; t. XXIV, 2e et 3e livraisons. Harlem, 1890; in-8°.

Società di Med. e St. nat. di Jena.
* Ienaische Zeitschrift für Naturwissenschaft herausg. von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; neue Folge Bd. XVII, Heft 2 und 3. Jena, 1890; in-8°.

Società di Sc. fisico-econ. di Konisberga.
* Schriften physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr.; XXX Jahrgang, 1889. Königsberg, 1890; in-4°.

Società geologica del Belgio (Liegi).
* Annales de la Société géologique de Belgique; t. XXX, 2e livrais., t. XVI, 1e livrais. Liège, 1889; in-8°.

R. Soc. Sassone (Lipsia).
* Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XVI, n. 1, 2. Leipzig, 1890; in-8° gr.

Id.
— Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft zu Leipzig; mathem. phys. Classe, 1890, I. Leipzig, 1890; in-8°.

R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).
* Iahresbericht der Fürstlich Iablonowskischen Gesellschaft. Leipzig, im Marz 1890; 1 fasc. in-8°.

J. V Carus (Lipsia).
* Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. I. Victor Carus in Leipzig; XIII Jahrg, n. 337-347. Leipzig, 1890; in-8°.

Commissione dei Lavori geol. del Portogallo (Lisbona).
* Description de la Faune jurassique du Portugal: — Embranchement des Échinodermes, par L. de Loriol; 1 fasc. (Échinides réguliers ou Endocycliques). Lisbonne, 1890; in-4°.

Società geologica di Londra.
* The quarterly Journal of the geological Society of London; vol. XLVI, n. 183. London, 1890, in-8°.

Digitized by Google

* **Journal of the** R. Microscopical Society of London; 1890, parts 3, 4, 5. London; in-8°. — Soc. Microscopica di Londra.

* Proceedings of the R. Society of London; vol. XLVII, n. 290, 291; vol. XLVIII, n. 292, 294. London, 1890; in-8°. — Reale Società di Londra.

* The Transaction of the Linnean Society of London; 2 series (Zoology), vol. V, part 4. London, 1890; in-4°. — Società Linneana di Londra.

— The Journal of the Linn. Soc. of London, etc. (Zoology), vol. XX, n. 122-123; vol. XXI, n. 133-135; vol. XXIII, n. 141-144. London, 1889; in-8°. — Id.

— (Botany), vol. XXV, n. 171-172; vol. XXVI, n. 174; vol. XVII, n. 181-182. London, 1889-90; in-8°. — Id.

— Proceedings of the Linnean Society of London, etc.; from November 1887 to June 1888. London, 1890; in-8°. — Id.

— List of the Linnean Society of London, etc.; January, 1890. London, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

* Memoirs of the R. astronomical Society of London; vol. XLIX, part 2, 1887-89. London, 1890; in-4°. — R. Società astron. di Londra.

Monthly Notices of the R astronomical Society; vol. L, n. 7, 8. London, 1890; in-8°. — Id.

* Transactions of the Visconsin-Academy of Sciences, Arts and Letters, vol. VII, 1883-87. Madison, Visconsin; 1889; in-8°. — Acc. di Visconsin di Sc., Lett. ed Arti (Madison Vis.).

Transaction of the Manchester geological Society, etc; vol. XX, parts 18 21. Manchester, 1890; in-8°. — Soc. geologica di Manchester.

* Memorias de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate »; t. III, cuad n 7 8, 9, 10 11, 12. México, 1890; in-8°. — Società scientifica « Ant. Alzate » (Messico).

* Atti della Società italiana di Scienze naturali; vol XXXIII, fasc. 1, fogli 1-7 Milano, 1890; in-8°. — Società Italiana di Scienze nat. (Milano).

* Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano. n. XXXVI: — Determinazione della differenza di longitudine tra gli Osservatorii astronomici di Milano e di Torino mediante osservazioni fatte nel 1885 da M. Rajna, terzo Astronomo dell'Osserv. di Milano, e da F. Porro, Astronomo dell'Osserv. di Torino, già Assistente dell'Osserv. di Milano, calcolate e discusse da F. Porro. Milano, 1890; in-4°. — R. Osservatorio di Brera in Milano.

* Atti della fondazione Scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi; vol. IX che abbraccia l'anno 1889. Milano, 1890; in-8°. — Fondazione scien. Cagnola (Milano).

Digitized by Google

Società dei Naturalisti di Modena. — * Atti della Società dei Naturalisti di Modena; serie 3ª, vol. IX, anno XXIV, fasc. 1. Modena, 1890; in-8°.

R. Acc. bavarese delle Scienze (Monaco). — * Abhandlungen der matematisch-physicalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften; XVII Band, 1 Abth., 1889; in-4°.

Id. — Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Classe der k. bay. Akademie der Wissenschaften zu München; 1888, Heft III; 1889, Heft I-II, III. München, 1889; in-8°.

Reale Società del Canadà (Montreal). — * Proceedings and Transaction of the R. Society of Canada for the year 1889; vol. VII. Montreal, 1890; in-8°.

Società imperiale dei Naturalisti di Mosca. — * Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou, etc.; année 1889, n. 3. Moscou, 1890; in-8°.

Id. — — Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am meteorologischen Observatorium der Landwirthscaftlichen Akademie bei Moskau, etc.; (das Jahr 1889, 1 Halfte). Moskau, 1889: 1 fasc. in forma d'atl. in-8°.

Staz. Zoologica di Napoli. — * Mittheilungen ans der Zoologischen Station zu Neapel zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde; IX Band, 3 Heft. Berlin, 1890; in-8°.

Società Reale di Napoli. — * Rendiconto dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società R. di Napoli); serie 2ª, vol. IV, fasc. 5, 6, 7, 8. Napoli, 1890; in-4°.

R. Accademia Medico-chirurg. di Napoli. — Bollettino della R. Accademia Medico-chirurgica di Napoli, ecc.; anno II, n 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Napoli, 1890; in-8°.

Soc. di Naturalisti di Napoli. — Bollettino della Società di Naturalisti in Napoli; serie 1, vol. IV, fasc. 2. Napoli, 1890; in-8°.

Società di Storia natur di Norimberga. — * Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg; 1889, Abhandlungen VIII, Bd. Bog. 8-13. Nürnberg, 1890; in-8°.

La Direzione (New-Haven). — * The american Journal of Science, editors James D. and Edward S. Dana, etc. 3 ser., vol. XXXIX, n. 231, 232, 233, 234. New Haven, Conn., 1890; in-8°.

Accad. di Sc. nat. di Nuova York. — * Transaction of the New York Academy of Sciences; vol. IX, n. 1, 2. New York, 1890; in-8°.

Id. — — Annals of the New York Academy of Sciences, late Lyceum, of nat. History; vol. V, n. 1, 2, 3. New York, 1889; in-8°.

La Redazione (Padova). — La Nuova Notarisia. — Rassegna trimestrale consacrata allo studio delle alghe, Redattore proprietario G. B. Dott. De-Toni; giugno-ottobre 1890. Padova; in-8°.

Digitized by Google

* **Bullettino della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali, ecc ; t. IV, n. 4. Padova, 1890; in-8°.** — Società Veneto-Trentina (Padova).

* **Rendiconto del Circolo matematico di Palermo; t. IV, fasc. V. Palermo, 1890; in-8° gr.** — Circolo Matem. di Palermo.

Esposizione nazionale 1891 in Palermo. — Programma speciale per la Mostra delle Arti liberali. Palermo, 1890; 1 fasc. in-8°. — Il Com. direttore dell' Esp. naz. (Palermo).

Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti in Palermo; anno XII, 1889, Maggio-Dicembre; anno XIII, Gennaio-Aprile 1890. Palermo 1889-1890; in-8° gr. — Collegio degli Ing.ed Arch. in Palermo.

Œuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique; 2e série, t. VII, VIII Paris, 1889; in-4°. — Ministero dell'Istruz. Pubb. di Francia (Parigi).

* **Annales des Mines, etc.; 8e série, t, XVII, 1e, 2e 3e et 4e livrais. de 1890. Paris, 1890; in-8°.** — Scuola naz. delle Miniere (Parigi).

* **Bulletin de la Société géologique de France, etc.; 3e série, t. XVII, n. 9. Paris, 1889; in-8°.** — Società geologica di Francia (Parigi).

* **Journal de l'École polytechnique, etc.; LIX cahier. Paris, 1889; in-4°.** — Scuola politecn. (Parigi).

* **Mémoires de la Société zoologique de France pour l'année 1889; t. II. Paris, 1889; in-8°.** — Soc. Zoologica di Francia (Parigi).

— **Bulletin de la Société zoologique de France pour l'année 1890; t. XV, n. 2. Paris, 1890; 1.** — Id.

Compte-rendu des séances du Congrès international de Zoologie, publié par Raphaël Blancard. Paris. 1890; 1 vol. in-8°. — Id.

* **Bulletin de la Société philomatique de Paris, etc.; 8e série, t. II, n. 1, 2 et 3. Paris, 1890; in-8°.** — Soc. filomatica di Parigi

Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc.; publiées par A. Gougoenheim; t. XVI, n. 6-10. Paris, 1890; in-8°. — La Direzione (Parigi).

Bulletin des publications nouvelles de la Librairie Gauthier-Villars et fils; année 1890, 1er et 2e trimestre. Paris, 1890; in-8°. — Gauthier-Villars (Parigi).

Histoire des plantes. — Monographie des *Asclépiadacées, Convolvulacées* et *Boraginacées;* par A. Baillon, etc.; pag. 221-402. Paris, 1890; in-8°. — Parigi.

Digitized by Google

Soc. fisico-chim. dell' Università di Pietroborgo. Journal de la Société physico-chimique russe à l'Université de St.-Pétersbourg; t. XXII, n. 5-6. St.-Pétersbourg, 1890; in-8°.

Comit. geologico di Pietroborgo. * Mémoires du Comité géologique de la Russie; vol. IX, n. 1; vol. XI, n. 1. St.-Pétersbourg, 1890; in-4°.

Id. — Bulletin du Comité géologique, etc; VIII, n. 6-8. St.-Pétersbourg. 1889; in-8°.

Osservatorio di Rio Janeiro. * Revista do Observatorio — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno V, n. 5, 6, 7, 8. Rio de Janeiro, 1890; in-8°.

R. Accademia de' Lincei (Roma). * Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ecc.; vol. VI, fasc. 11, 12; e Indice del vol., 1° semestre; vol. VI, 2° sem. 1890, n. 1-9. Roma, 1890; in-8° gr.

R. Com. geolog. d' Italia (Roma). * Bollettino del R. Comitato geologico d' Italia; 3ª, serie vol. I, n. 5-11. Roma, 1890; in-8°.

Società degli Spettr. ital. (Roma). Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani raccolte e pubblicate per cura di Pietro TACCHINI; vol. XIX, disp. 6-8. Roma, 1890; in-4°.

La Direzione (Roma). * Rivista di Artiglieria e Genio; vol. III, Luglio, Agosto, Settembre; vol. IV Novembre. Roma, 1890; in-8°.

R. Uffizio geolog. (Roma). R. Ufficio geologico — Memorie descrittive della Carta geologica d' Italia; vol. V. — Descrizione geologico-mineraria della zona argentifera del Sarrabus (Sardegna): di C. DE CASTRO, Ing. nel R. Corpo delle Miniere. Roma, 1890; in-8°. gr.

Id. — Carta geol. miner. del Sarrabus (Sardegna), nella scala di 1 a 50,000, redatta da C. DE CASTRO, annessa al vol. V delle Memorie descritt. della Carta geol. d'Italia. Roma, 1890; in-8° gr.

Società dei Viticolt. ital. (Roma). Bollettino della Società generale dei Viticoltori italiani; anno V, n. 11-20, 21, 22. Roma, 1890; in-8° gr.

Società italiana delle Scienze (Roma). * Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze; serie 3ª, t. VII. Napoli, 1890; in-4°.

Il Municipio di Roma. * Bullettino della Commissione Speciale d'Igiene del Municipio di Roma, ecc.; anno XI, fasc. 4-6. Roma, 1890; in-8°.

Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei (Roma). * Atti dell'Accademia pontificia de'Nuovi Lincei, ecc.; anno XLII, Sess. IVª del 19 maggio; Vª del 14 aprile; VIª del 19 maggio; VIIª del 16 giugno 1889: Iª del 15 dicembre 1889; IIª del 19 gennaio 1890. Roma, 1889-90; in-4°.

Digitized by Google

Verhandlungen des deutschen Wissenschaftlichen Vereines zu Santiago; II Band, 2 Heft. Santiago, 1890; in-8°. — Società tedesca delle Scienze in Santiago.

* Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena; serie 4ª, vol. II, fasc. 5-6. Siena, 1890; in-8°. — R. Accademia de' Fisiocritici di Siena.

Palaeontographica — Beitraege zur Naturgeschichte der Vorzeit; herausg. von Karl A. von Zittel, etc; XXVII Band, 1 bis 4 Lief. Stuttgart, 1890; in-4°. — Stoccarda. * *

* Transaction of the Seismological Society of Japan; vol. XIII, part. 2. Jokoama, 1890; in-8°. — Soc. sismologica del Giappone di Tokio.

* Bollettino del Club alpino italiano, per l'anno 1889, pubblicato per cura del Consiglio direttivo; vol. XXIII, n. 56. Torino, 1890; in-8°. — Il Club alp. ital. (Torino).

Rivista mensile del Club Alpino italiano; vol. IX, n. 6-11. Torino, 1890 in-8°. — Id.

* Atti della Società degli Ingegneri e degli Architetti di Torino; anno XXIII, 1889, n 29 della serie completa degli Atti. Torino, 1889; in-4°. — Società degl' Ingegneri e degli Architetti di Torino.

* Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, ecc.; anno LIII, n. 4-10. Torino, 1890; in 8°. — R. Acc. di Medic. di Torino.

Città di Torino — Ufficio d'Igiene — Rendiconto per l'anno 1888, e sunto del 1889. Torino, 1890; 1 vol. in-4°. — Municipio di Torino.

Bollettino medico-statistico dell' Ufficio d' Igiene della Città di Torino; anno XVIII, n. 37 — anno XIX, n. 4-9; 12-26-37. Torino 1889-90; in-4°. — Id.

Consiglio Comunale di Torino; 1889-90, n. V, XII, XIV e XV. Torino, 1890; in-4°. — Id.

* Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, ecc.; serie 2ª, vol. X, n. 6-10. Torino, 1890; in-4°. — Società meteor. italiana (Torino).

* Notarisia — Commentarium phycologicum; Rivista trimestrale consacrata allo studio delle alghe, ecc., Redattore David Levi-Morenos, Dott. in Scienze naturali; anno V, n. 19, 20. Venezia, 1890; in-8°. — La Direzione (Venezia).

* Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt; XL Band, 1 und 2 Heft. Wien, 1890; in-8°, gr. — Società geologica di Vienna.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien; 1890, n. 6-13; in-8° gr. — Id.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, etc.; XL Band, 2 und 3 Quartal. Wien, 1890; in-8°. — Vienna. * *

Digitized by Google

R. Società delle Scienze di Upsala. — * Nova Acta Regiae Societatis Scientiarium Upsaliensis; seriei tertiae, vol. XIV, fasc. 1. Upsaliae, MDCCCXC; in-4°.

Id. — — Catalogue méthodique des *Acta* et *Nova Acta Regiae Soc. Scientiarum Upsaliensis*; 1744-1889, etc. Upsaliae, 1 fasc. in-4°.

Osserv. meteor. dell'Università di Upsala. — * Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal; vol. XXI, année 1889. Upsal, 1889-90; in-4°.

Governo degli St.Un.d'Am. (Washington). — Bulletin of the United States national Museum; n. 33-37. Washington, 1889; in-8°.

Id. — Seventh annual Report of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior; 1885-86; by J. W. Powel Director. Washington, 1888; 1 vol. in-4°.

Id. — Proceedings of the United States national Museum; vol. X, 1887; vol. XI 1888. Washington, 1888-89; in-8°.

Osserv. Navale degli Stati Uniti (Washington). — * Washington Observations, 1884: Appendix I: - Catalogue of Stars observed at the United States Naval Observatory, during the years 1845 to 1877, etc. Washington, 1889; in-4°.

Id. — — Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observ. for the year ending June 30 1889. Washington, 1889; in-8°.

Società fisico-medica di Würzburg. — * Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; neue Folge, XXIV Band, n. 5. Würzburg, 1890; in-8°.

Id — — Sitzungs-Berichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; Jahrg. 1890; n. 1-5; in-8°.

L'Autore. — Dott. Rodolfo Bettazzi, Prof. nel R. Liceo di Pisa — Teoria delle grandezze (opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei). Pisa, 1890, pag. 180; in-4°

L'A. — Aperçu sur le Micro-graphophone de Gianni Bettini, Lieutenant de Cavalerie de l'Armée italienne. New York, 1890; 1 fasc. in-4°.

L'A. — Davide Carazzi — La breccia ossifera del Monte Rocchetta (Golfo di Spezia). Roma, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'A. — Manuale diagnostico-terapeutico generale medico-chirurgico compilato a sistema moderno, ecc., per cura del Dott. Crescenzo Conca. Napoli, 1890; 1 vol. in-16°.

Gli Autori. — Revue géologique Suisse pour l'année 1889, par Ernest Favre et Hans Schardt; XX, Genève, 1890; in-8°.

L'A. — A text book of Physiology; by M. Foster, Prof. of Physiology in the University of Cambridge; parts I-III. London, 1888-90; in-8°.

Digitized by Google

Chemische Analyse der Soolquelle « Louise » im « Bad Oranienplatz » (Louisenufer 22). Filiale vom Admiralsgarten-Bad zu Berlin; von Dr. C. Remigius Fresenius, unter Mitwirkung von Prof. Dr. H. Fresenius. Wiesbaden, 1889; 1 fasc. in-8°. — Gli Autori.

— Chemische Analyse der Soolquelle « Paul I » in der Badeanstalt « Soolquelle Paul I » (Paulstrasse 6), Filiale von Admiralsgarten-Bad zu Berlin; von Dr. C. R. Fresenius, etc. Wiesbaden, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Chemische Analyse der Soolquelle « Martha » in der Badeanstalt « Soolquelle Martha » (Friedrichstrasse 8), filiale vom Admiralsgarten-Bad zu Berlin; von Dr C. R. Fresenius, etc. Wiesbaden, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Chemische Analyse der Soolquelle « Bonifacius » in der Badeanstalt « Soolquelle Bonifacius » (Lützowstrasse), filiale vom Admiralsgarten-Bad zu Berlin; von Dr. C. R. Fresenius, etc. Wiesbaden, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Chemische Analyse der Antonien - Quelle zu Warmbrunn in Schlesien; von Dr. C. R. Fresenius, etc. Wiesbaden, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

On chronology and the construction of the Calendar with special regard to the chinese computation of time compared with the european; by Dr. H. Fritsche. St.-Petersburg, 1886; 1 fasc. litogr. in-8°. — L'Autore.

The Study of the Roman Law; Inaugural Address by Enry Goudy, Prof. of civil law in the University of Edinburg. Edinburg, 1890; 1 fasc. in 8° picc. — L'A.

A Kölliker — Uber die erste Entwicklung der Nervi olfactorii (aus den *Sitzungsberichte der Würzburger Phys.-med. Gesellschaft*, Juli 1890; 1 fasc. in-8°. — L'A.

S. Laura — Medicina esatta terapeutica dosimetrica; anno VIII, n. 6-9-10. Torino, 1890; in-8°. — S. Laura.

A. Mogni — Sulle oscillazioni del pendolo, avuto riguardo alla rotazione della terra; 2ª ediz. Jesi, 1890; in-8°. — L'A.

Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen und der Thiere; herausgegeben von Jac. Moleschott; XIV Band, 3 Heft. Giessen, 1890; in-8°. — Il Socio Senatore Jac. Moleschott.

Alcune esperienze su girini e rane; Nota del Socio Aliprando Moriggia (Estr. dai *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*; vol. VI, 1° sem., fasc. 12; 1 fasc. in-8° gr. — L'Autore.

Étude expérimentale sur un mouvement curieux des ovoïdes et des ellipsoïdes, par Félix Leconte, Prof. à Gand. Genève, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Une exploration en Italie par Léopold Orgels: — Italia farà da sè — Le commerce — L'Agriculture — L'Industrie — Le Pétrole en Italie — Questions ouvrières. Gand, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Digitized by Google

L'Autore. Osservazioni astrofisiche solari eseguite nel R. Osservatorio di Palermo: — Statistica delle macchie e delle facole nell'anno 1887: Nota di A. Riccò (Estr. dalle *Mem. della Soc. degli Spettroscopisti italiani*; vol. XVI, 1887); 1 fasc. in-4°.

Id. — Sui giorni di sole privo di macchie nell'anno 1889; Nota di A. Riccò (Estr. dalle *Mem. della Soc. degli Spettr. italiani* vol. XIX, 1890); 4 fasc. in-4°.

Id. Osservazioni astrofisiche solari eseguite nel R. Osservatorio di Palermo: Statistica delle macchie nell'anno 1888: Nota di A. Riccò (Estr. dalle *Mem. della Soc. degli Spettr. ital.*, vol. XVIII, 1889); 1 fasc. in-4°.

L'A. Exhibitions of curves produced by the vibration of straight wires; by Dr. Edward Sang. Edinburgh, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — List of trigonometrical and astronomical calculations, in manuscript; by Edward Sang. Edinburgh, 1890; 3 pag. in-4°.

L'A. Le ligniti italiane, loro modo di utilizzarne con profitto nelle cave e nelle industrie, e di poterle sostituire totalmente al carbon fossile: Memoria popolare dell'Avv. Orazio Sapori. Siena, 1890; 1 fasc. in-4°.

L'A. Le altezze barometriche a Napoli ed all' Osservatorio vesuviano: Nota del Prof. E. Semmola. Napoli, 1890; 1 fasc. in-4°.

L'A. Contribuzioni allo studio dei graniti della Bassa Valsesia; Memoria del Socio Giovanni Strüever (Estr. dai *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1889); 1 fasc. in-8° gr.

L'A. L'essenza reale delle quantità ora dette immaginarie, la rappresentazione diretta delle quantità complesse, e la legge di continuità in Geometria; per Vecchi Stanislao, Prof. nella R. Università di Parma. Parma, 1890; 1 fasc. in-4°.

Id. Giuseppe Vicenti. — Biografia del Prof. Cav. Antonio Michela, seguita da alcune considerazioni relative alla invenzione del suo sistema fonografico universale a mano, e da una monografia sulla sua macchina stenografica. Ivrea, 1887; 1 fasc. in-8°.

L'A. — L' insegnamento del sistema fonografico universale a mano *A. Michela* negli Istituti Scientifici governativi, per G. Vicenti. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'A. Die Rückbildung der Thymus; von W. Waldeyer (Separet-abdr. zu Sitz: der k. Preussen Akademie der Wiss. zu Berlin, XXV, 8 Maj 1890) 1 fasc. in-8° gr.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.

5978 (350) 17 1-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP 2ª, 1890-91

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Novembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, NACCARI, SPEZIA, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Si legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio BASSO presenta in dono, per parte dei rispettivi autori, un lavoro del Corrispondente Prof. Augusto RIGHI *Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche* (2ª Memoria), e due Note del marchese Antonio DE-GREGORIO, su argomenti di geologia.

Le letture e le comunicazioni si succedono nell'ordine seguente:

« *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica:* Nota del Corrispondente Prof. Eugenio BERTINI, della R Università di Pavia, presentata dal Socio SEGRE per incarico dell'Autore;

« Altra addizione alla Nota « *Sui determinanti di determinanti* » del Socio D'OVIDIO;

« *Sulle specie europee del genere Chrysotoxum* MEIG. », Studio del sig. Dott. E. GIGLIO-TOS, presentato dal Socio CAMERANO.

Il Socio CAMERANO presenta una Memoria del sig. Filippo CANTAMESSA, col titolo « *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti ed il Mastodon (Tetrolophodon) arvernensis:* Osteografia ed osservazioni ». Questo lavoro essendo destinato ai volumi delle *Memorie*, viene dal Presidente affidato ad una Commissione perchè lo esamini e ne riferisca alla Classe in una prossima seduta.

Digitized by Google

Infine lo stesso Socio CAMERANO, condeputato col Socio SPEZIA, legge una sua Relazione sopra « *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria* » descritti dal Dott. Federico SACCO, Prof. di Paleontologia nella Università di Torino, parte VIII, *Galeoolidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae.*

La Classe accoglie le conclusioni della Commissione, e, ammesso alla lettura il lavoro del Dott. SACCO, ne delibera l'inserzione nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

LETTURE

Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica;

Nota del Corrispondente Prof. EUGENIO BERTINI, presentata dal Socio C. SEGRE

Nelle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Questi Atti, Vol XXIV), assai pregevoli per novità di metodo e di risultati, il Dott. Guido Castelnuovo risolve un importante problema della geometria sopra una curva algebrica; determina cioè il limite massimo del genere p, noti i numeri n, r di una serie g_n^r giacente sulla curva. E s'intende per serie g_n^r (riferendosi ad una curva piana) una serie di gruppi di n punti, r volte infinita, segnata sulla curva stessa da un qualsivoglia sistema lineare di curve (che può sempre essere sostituito da un sistema lineare di curve aggiunte (*)).

Le proprietà che conducono il Castelnuovo alla detta determinazione, hanno già interesse per sè e possono essere utilmente generalizzate. Tale generalizzazione è l'oggetto del § 2 del presente lavoro: e di essa sono fatte due applicazioni. Una, quella del § 3, è la stessa suddetta determinazione del limite superiore di p, ottenuta qui in modo forse più semplice e più chiaro: l'altra è l'estensione agli iperspazi di alcuni teoremi dimostrati da Noether nella sua bella Memoria: *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Memorie dell'Accademia delle Scienze di Berlino, 1882).

(*) Cfr. NOETHER nei *Math. Ann.*, t. XXIII, pag. 348. Veggasi anche la Memoria fondamentale di BRILL e NOETHER nel t. VII dei *Math. Ann.*

Digitized by Google

§ 1.

Proposizioni preliminari.

1. Una serie g_n^r sopra una curva C (irriduttibile) possegga la proprietà che i gruppi aventi un punto *arbitrario* (*) comune abbiano necessariamente altri $\rho - 1$ punti comuni. Allora è facile dimostrare che esiste sopra C una serie γ semplicemente infinita (razionale o non) di gruppi di ρ punti, tale che ogni gruppo di g_n^r consta di k gruppi ($n = k\rho$) di γ.

2. Escluso il caso precedente, *non può avvenire che i gruppi di una serie g_n^r aventi s punti arbitrari comuni* $(1 < s < r)$ *abbiano necessariamente altri σ punti comuni* $(0 < \sigma < n - s)$. Cioè non può avvenire, considerando una curva piana C, che una curva φ del sistema lineare ∞^r che dà g_n^r, la quale passi per s punti arbitrarii, passi necessariamente per altri σ punti. Suppongasi che ciò sia e che sia s il più piccolo numero, per il quale ciò avviene. Le φ per $s - 2$ punti arbitrarii formano un sistema Σ lineare ∞^{r-s+2}, cioè almeno ∞^2; e inoltre quelle di esse che passano per un punto arbitrario, essendo s minimo, non passano necessariamente per altri punti. Una rete generica di Σ può adunque servire ad una trasformazione birazionale della C. La curva C' trasformata gode della proprietà che le φ' del sistema Σ' trasformato di Σ, le quali passano per due suoi punti, passano necessariamente per altri σ punti che sono con quelli in linea retta, perchè ogni retta costituisce con una parte fissa una curva φ', e per l'ipotesi fatta sulla curva primitiva C. Ora si dimostrerà che la curva C' non esiste.

Sia X un punto arbitrario di C' e φ'^* una curva di Σ' che tocca C' in X: *dovrà φ'^* toccare C' in ogni altro punto comune.* Infatti sia Y un altro punto comune. Le φ' passanti semplicemente per X, Y costituiscono un sistema lineare Δ (almeno ∞^1) di cui altri σ punti base sono sulla retta XY. Sia Z uno

(*) Qui e in seguito, *arbitrario* significa scelto in modo assolutamente generale.

Digitized by Google

di essi (*) e X' un altro punto arbitrario. Anche le φ' per i punti X', Z appartengono ad un sistema lineare Δ' della stessa infinità di Δ e di cui sulla retta X'Z sono altri σ punti base Y'... Se (Z restando fisso) X' si avvicina indefinitamente ad X, i punti base di Δ' devono tendere ai punti base di Δ, Y' ad Y... e quindi segue che la curva φ'^* che, quando X è successivo ad X', appartiene ad amendue i sistemi, deve toccare C in Y, come asserimmo. Ma se ogni curva di Σ' tangente in un punto arbitrario X deve toccare C' in ogni altro punto (variabile), ciò dovrebbe accadere (per nuova considerazione al limite) anche di quella curva di Σ' costituita dalla tangente in X e da una parte fissa, il che non può essere.

3. Ne discende immediatamente che *in una serie* g_n^r, *che non presenta il caso del n° 1, r punti, comunque presi, di un gruppo arbitrario individuano il gruppo, cioè appartengono a quel solo gruppo.* Perchè se in *ogni* gruppo G di g_n^r esistesse un gruppo Γ di $s+\sigma$ punti tale che i gruppi di g_n^r per s punti passassero necessariamente per gli altri σ, i gruppi Γ costituirebbero una $\infty^{r-(r-s)}=\infty^s$: e quindi i gruppi di g_n^r per s punti *arbitrarii* passerebbero per altri σ punti (**).

(*) Il sistema Δ è indifferentemente determinato dai punti X, Y ovvero X, Z, essendo σ minimo.

(**) Un'altra dimostrazione delle proprietà dei n. 2, 3, favoritami per iscritto dal CASTELNUOVO e della quale sono una interpretazione nel piano la prima parte del n. 2 e il n. 3, è la seguente:

Per l'ipotesi fatta che i gruppi di g_n^r aventi un punto comune non hanno necessariamente altri punti comuni, si può riferire univocamente alla curva C una curva C' di ordine n di uno spazio (ad r dimensioni) S_r, gli spazi S_{r-1} di questo segnando sopra C' la serie g_n^r corrispondente a quella. Se in ogni S_r esistessero r punti di C' giacenti in un S_{r-2}, gli spazi S_{r-2} r— secanti sarebbero ∞^{r-1} ed avverrebbe che ogni spazio determinato da $r-1$ punti arbitrari di C' segherebbe ancora questa curva in un altro punto. Sia (come nel n. 2) s il minimo numero di punti arbitrari, pei quali avviene che l' S_{s-1} da essi determinato contenga altri σ punti. Se $s>2$, da un S_{s-3} passante per $s-2$ punti arbitrari di C' si projetti C' sopra uno spazio S_{r-s+2}; la projezione, per essere s minimo, è univoca e la curva projezione C'' è tale che ogni sua corda è almeno trisecante. Se $r-s+2>3$, si projetti C'' nello spazio ordinario da punti esterni e si avrà una curva C''', sghemba, di cui ogni corda è almeno trisecante. Tale curva non esiste. Perchè, se X, Y sono due punti qualunque di C''' e Z un terzo punto che XY ha sopra C''', questa

Digitized by Google

§ 2.

Serie speciali complete nascenti da una serie data, di cui k gruppi giacciono in una curva aggiunta di ordine $m-3$.

4. Sia C una curva piana d'ordine m: e facciamo l'ipotesi che k gruppi $G', G'', \dots G^{(k)}$ di una serie speciale completa $g_n^{r_1}$ esistano sopra una curva aggiunta φ_{m-3}. Supponiamo $r_1 \geq 2$ ed escludiamo il caso particolare del n° 1. Allora sussistono le seguenti proprietà.

Sia R il resto dei k gruppi dato dalla considerata φ_{m-3}. Per il teorema di Riemann-Roch (che s'indicherà in seguito brevemente con R-R), le φ_{m-3} per R, $G'', G''', \dots G^{(k)}$ (ad es.) segnano la serie $g_n^{r_1}$: onde per R, per un gruppo qualunque di questa serie e per $G'', G''', \dots G^{(k)}$ passa una φ_{m-3}. Ripetendo il ragionamento, si conclude che k *gruppi qualunque di* $g_n^{r_1}$ *sono dati da una* φ_{m-3} *per* R; cioè *costituiscono un gruppo di una serie speciale completa* $g_{nk}^{r_k}$ *che si ottiene variando* φ_{m-3} *per* R. Parimenti $k-1$ gruppi qualunque di $g_n^{r_1}$ sono dati da una φ_{m-3} per R e per un altro gruppo, cioè formano un gruppo di una serie speciale completa $g_{n(k-1)}^{r_{k-1}}$ contenuta nella $g_{nk}^{r_k}$: ecc. Si hanno così k serie speciali complete $g_{ni}^{r_i}$ $(i=1, 2, \dots, k)$, di cui ciascuna contiene tutte le precedenti.

5. Sia μ_i il numero delle condizioni indipendenti a cui deve soddisfare una φ_{m-3} che passa già per $i-1$ gruppi $G', G'', \dots, G^{(i-1)}$ affine di passare per un i^{esimo} gruppo $G^{(i)}$. Per il teorema R-R è $\mu_1 = n - r_1$ e manifestamente $\mu_i \leq \mu_1$, cioè $n - \mu_i \geq r_1$. Ma troveremo in seguito una maggiore limitazione (n. 9).

Qui osserviamo che i gruppi $G', G'', \dots, G^{(i-1)}$ costituiscono un gruppo di $g_{n(i-1)}^{r_{i-1}}$ e quindi il passare φ_{m-3} per essi dà

curva è da Z projettata doppiamente mediante un cono al quale appartiene XY, e nel piano tangente lungo questa generatrice al cono giacciono le tangenti a C''' in X, Y. Adunque due tangenti qualunque di C''' si incontrano e quindi (C''' non essendo piana) passano tutte per un punto, il che non può essere (altrimenti lo stesso accadrebbe di una sua projezione piana).

Digitized by Google

precisamente (per il teorema R-R) $n(i-1)-r_{i-1}$ condizioni. Analogamente sono $n\,i-r_i$ le condizioni a cui deve soddisfare una φ_{m-3} che passi per $G', G'', \ldots, G^{(i)}$. Adunque deve essere

$$n\,i-r_i=\mu_i+n\,(i-1)-r_{i-1}$$

cioè

$$(1) \ldots\ldots \quad \mu_i=n+r_{i-1}-r_i\,, \quad (i=1, 2, \ldots k)$$

ove si porrà, per $i=1$, $r_0=0$. La formola precedente dimostra che μ è *costante* qualsiansi i dati $i-1$ gruppi e l'i^{esimo}.

Sommando le (1) si ha

$$(2) \ldots\ldots \quad r_i=n\,i-(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i)$$

che segue direttamente dall' osservare che $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i$ esprime il numero delle condizioni indipendenti per una φ_{m-3} contenente i gruppi di $g_n^{r_1}$, cioè contenente un gruppo di $g_{ni}^{r_i}$ e quindi (teorema R-R) è eguale ad $n\,i-r_i$.

6. Ora si noti che una φ_{m-3} passante per $\mu_1=n-r_1$ punti *comunque scelti* di un gruppo *arbitrario* G della serie $g_n^{r_1}$ soddisfa sempre in conseguenza a μ_1 condizioni indipendenti e quindi passa necessariamente per tutto il gruppo G; cioè non può accadere che il passaggio di una φ_{m-3} per certi μ_1-1 punti di G produca il passaggio per un altro punto di G. In vero, se ciò accadesse, quei μ_1 punti formerebbero (teorema R-R) un gruppo di una serie speciale $g^1_{\mu_1}$, la quale sarebbe segata dalle φ_{m-3} passanti per gli $n-\mu_1$ punti residui di G ed inoltre per un gruppo della serie residua di $g_n^{r_1}$: donde segue che ogni gruppo della $g^1_{\mu_1}$ cogli $n-\mu_1$ punti nominati formerebbe un gruppo di $g_n^{r_1}$. Si avrebbero dunque in questa serie ∞^1 gruppi aventi $n-\mu_1=r_1$ punti comuni, i quali starebbero nel gruppo arbitrario G: il che non può essere (n. 3).

Un teorema più generale, riguardante le φ_{m-3} che contengono $i-1$ gruppi dati ed inoltre μ_i punti di un gruppo arbitrario della $g_n^{r_1}$ può forse dimostrarsi con analoghe considerazioni. Qui basta osservare che in un gruppo arbitrario di quella serie si posson sempre scegliere μ_i punti tali che presentino altrettante condizioni indipendenti alle φ_{m-3} che passano per gli $i-1$ gruppi dati

Digitized by Google

della $g_n^{r_1}$ e che si assoggettano inoltre a passare per quei μ_i punti (poichè, se una tal scelta non fosse possibile, il passaggio di quelle φ_{m-3} per *tutto* il primo gruppo darebbe meno di μ_i condizioni indipendenti).

7. Abbiansi due gruppi G′, G″ di $g_n^{r_1}$ aventi $r_1 - 1$ punti *arbitrari* comuni P e dicansi P′, P″ rispettivamente i residui $n - r_1 + 1$ punti di ciascun gruppo. Se G′, G″ si considerano come posizioni limiti di due gruppi distinti, si ottengono φ_{m-3} passanti per i punti P′, per i punti P″ e tangenti nei punti P alla curva fondamentale C. Dico che *ogni* φ_{m-3} *passante per i punti* P′, P″ *è necessariamente tangente nei punti* P *a* C. Giacchè, ricordando il teorema R-R, la φ_{m-3} passa per G′ (contenendone $n - r_1 + 1$ punti) e dà un resto R tale che tutte le φ_{m-3} per R segnano sopra C la serie $g_n^{r_1}$. Ma ad R appartengono i punti P″ e quindi queste φ_{m-3} passano per tutto il gruppo G″, cioè G″ fa parte di R. Una φ_{m-3} variabile per R dà un gruppo variabile G di $g_n^{r_1}$ e, quando G cade in G′, essa cade nella suddetta φ_{m-3}: questa tocca adunque nei punti P, come doveva dimostrarsi

Si noti che in questa dimostrazione, come nelle seguenti, è essenzialmente applicata la proprietà del n° 6: onde, come già avvertimmo, resta escluso il caso particolare del n° 1.

8. La precedente proprietà si estende facilmente, si ha cioè che *se i gruppi di* $g_n^{r_1}$ *hanno* $r_1 - 1$ (*o meno*) *punti comuni arbitrari, ciascuna* φ_{m-3} *passante per i residui punti di ogni gruppo ha con* C *in ciascuno di quei punti comuni un contatto* i^{punto}.

9. Dalla proprietà del n° 7 discendono importanti limitazioni.

Premettasi che deve essere

$$(3) \ldots\ldots \qquad \mu_i > r_1 - 1 ;$$

perchè, se fosse $\mu_i \leq r_1 - 1$, ricordando il significato di μ_i, una φ_{m-3} per $i-1$ gruppi qualunque di $g_n^{r_1}$ dovrebbe contenere ogni altro gruppo che avesse, con uno di quelli, $r_1 - 1$ punti comuni, il che è assurdo.

Ora sieno $G', G'', \ldots, G^{(i-2)}$ gruppi arbitrari di $g_n^{r_1}$ e $G^{(i-1)}, G^{(i)}$ due altri aventi $r_1 - 1$ punti comuni arbitrarii; segue dal n° 7 che la serie residua della $g_{ni}^{r_i}$ è data tanto dalle φ_{m-3} passanti

per i gruppi arbitrarii di $g_n^{r_1}$ quanto dalle φ_{m-3} per $G', G'', \ldots G^{(i-2)}, G^{(i-1)}, G^{(i)}$. Quelle soddisfano precisamente, per il significato delle μ, a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i$ condizioni, e queste, al più, a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ condizioni. Ciò si dimostra notando che una φ_{m-3} per $G', G'', \ldots, G^{(i-2)}$ e per μ_{i-1} punti di $G^{(i-1)}$ contiene questo gruppo per intero e allora basta che passi per $\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ punti di $G^{(i)}$ perchè ne contenga μ_{i-1} e quindi certamente $G^{(i)}$ per intero. Si ha dunque

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1),$$

ossia

$$(4) \ldots\ldots \qquad \mu_i \leq \mu_{i-1} - (r_1 - 1),$$

che, per $i = 1$, deve sostituirsi colla $\mu_1 = n - r_1$.

Dalle (3), (4) segue immediatamente

$$(5) \ldots\ldots \qquad \mu_{i-1} > 2(r_1 - 1):$$

dalla (4) si ricavano, sommando, le

$$(6) \ldots\ldots \qquad \mu_i \leq n - r_1 - (i-1)(r_1 - 1):$$

e da queste, pure sommando, le

$$(7) \ldots \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \leq i(n - r_1) - \frac{i(i-1)}{2}(r_1 - 1)$$

$(i = 1, 2, \ldots k)$.

Il confronto delle (2), (7) dà *un limite inferiore per l'infinità r_i della serie $g_{ni}^{r_i}$*; cioè

$$(8) \ldots\ldots \qquad r_i \geq i r_1 + \frac{i(i-1)}{2}(r_1 - 1);$$

e il confronto delle (5), (6), nella seconda delle quali si ponga $i - 1$ al posto di i, per $i = k$, dà *un limite superiore per il numero k delle serie $g_{ni}^{r_i}$*; cioè

$$(9) \ldots\ldots \qquad k < \frac{n - r_1}{r_1 - 1}.$$

Digitized by Google

Infine si può notare che dalle (1), (4) si ottiene

$$r_i - r_{i-1} \geq r_{i-1} - r_{i-2} + r_1 - 1 \ .$$

10. Una condizione necessaria e sufficiente per le proprietà esposte è chiaramente la

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k < p \ .$$

Se i — 1 *gruppi di* $g_n^{r_1}$ *sono sopra una* φ_{m-3}, *è condizione sufficiente affinchè* i *gruppi sieno sopra una* φ_{m-3} *che si abbia*

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\,\mu_{i-1} - (r_1 - 1) < p \ .$$

Infatti una φ_{m-3} che passi già per $i-2$ gruppi arbitrarii e quindi soddisfacente già a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2}$ condizioni, può condursi per altri due gruppi aventi $r_1 - 1$ punti comuni, facendola passare per μ_{i-1} punti di uno e per $\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ punti (non comuni) dell'altro, e tale φ_{m-3} esiste per la relazione ammessa. E allora si trova facilmente (cfr. n° 7) che i gruppi arbitrari sono sopra una φ_{m-3}.

Colla ripetuta applicazione della proposizione precedente si giunge al teorema di Castelnuovo (l. c. n[i] 24, 25): cioè *se sussistono le*

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1) < p$$

per $i=2$ *e poi per* $i=3$, *e così via via fino ad* $i=k$, *la serie speciale* $g_n^{r_1}$ *gode della proprietà che k suoi gruppi qualunque stanno sopra una* φ_{m-3}, ossia valgono le proprietà dette nel presente paragrafo.

§ 3.

Limite superiore di p per una data g_n^r.

11. Esistano k gruppi di una $g_n^{r_1}$ completa sopra una φ_{m-3} ($k \geq 1$, cioè sia la serie almeno speciale) e non ne esistano $k+1$ gruppi. Mantenute le denominazioni del § 2, sussisteranno tutte le relazioni ivi dimostrate. Inoltre dovrà essere

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r_1 - 1) \geq p \ ,$$

Digitized by Google

giacchè, se fosse $<p$, sarebbero (n. 10) $k+1$ i gruppi giacenti sopra una φ_{m-3}. La precedente e la (7), per $i=k$, dànno

$$p \leq k(n-r_1) - \frac{k(k-1)}{2}(r_1-1) + \mu_k - (r_1-1)$$

cioè, per la (6), ove si ponga $i=k$,

$$p \leq k(n-r_1) - \frac{k(k-1)}{2}(r_1-1) + n - r_1 - k(r_1-1)$$

o anche

$$(10) \ldots\ldots \qquad p \leq (k+1)\left(n - r_1 - k\frac{r_1-1}{2}\right)$$

ove, per la (9), k è un numero intero minore di $\frac{n-r_1}{r_1-1}$. Ma osservisi che si può prendere per k il massimo intero inferiore ad $\frac{n-r_1}{r_1-1}$ (o, ciò che è lo stesso, il minimo intero non inferiore ad $\frac{n-r_1}{r_1-1}-1$), perchè allora il 2° membro della (10) assume un valore maggiore di quello che ottiene attribuendo a k un valore più piccolo, come è facile verificare (*).

Il limite ora trovato vale anche per una serie g_n^r completa non speciale, nel qual caso $p=n-r$. Invero se $n<2r$ si ha $\frac{n-r}{r-1} \leq 1$ e però $k=0$ e la (10) dà $n-r$ per limite di p, cioè ne dà il valore esatto. Che se $n \geq 2r$, onde $\frac{n-r}{r-1} > 1$, siccome per $k=0$ la (10) sussiste, sussisterà *a fortiori*, per la osserva-

---

(*) Il CASTELNUOVO ha già osservato che il 2° membro della (10) diventa massimo per $k+1=\frac{n-r_1}{r_1-1}+\frac{1}{2}$ cioè per $k=\frac{n-r_1}{r_1-1}-\frac{1}{2}$. Ma, per lo scopo suddetto, basta notare che, se $\frac{n-r_1}{r_1-1}-\omega$ è intero ($1 \geq \omega > 0$) e si prende un valore inferiore $\frac{n-r}{r_1-1}-\omega'$, ove $\omega'=\omega+\delta$ (δ intero >0), indicando con Δ_ω, $\Delta_{\omega'}$ i corrispondenti valori del 2° membro della (10) per quei valori di k, si ha $\Delta - \Delta_{\omega'} = \frac{r_1-1}{2}(\omega-\omega' \quad 1-\omega-\omega') = -\frac{r_1-1}{2}\delta(1-2\omega-\delta)$, e però $\Delta_\omega > \Delta_{\omega'}$.

Digitized by Google

zione già fatta, per k massimo intero minore di $\frac{n-r}{r-1}$: ma in questo caso il limite non è raggiunto.

Infine il detto limite vale per una serie $g_n{}^r$ (speciale o no) anche non completa. Perchè, se dicasi $g_n{}^{r_1}$ la serie completa in cui g_n^r è contenuta, dalla (10) segue, essendo $r_1 > r$,

$$p \leq (k+1)\left(n-r-k\frac{r-1}{2}\right)$$

ove $k < \frac{n-r_1}{r_1-1} < \frac{n-r}{r-1}$ e si può prendere per k, come dianzi, il massimo intero inferiore ad $\frac{n-r}{r-1}$.

Concludiamo adunque il teorema di Castelnuovo: — *Se sopra una curva di genere* p *esiste una serie qualunque* $g_n{}^r$ *(tale soltanto che i gruppi della serie che hanno un punto arbitrario comune non abbiano necessariamente altri punti comuni) si ha*

$$p \leq (k+1)\left(n-r-k\frac{r-1}{2}\right),$$

ove k è il massimo intero inferiore ad $\frac{n-r}{r-1}$.

Vedemmo già che il limite, se $n < 2r$, è raggiunto. Se $n \geq 2r$ si può pure affermare lo stesso (per $g_n{}^r$ speciali) applicando una formola di Segre, ecc. (Vedi Castelnuovo, l. c. n. 27).

§ 4.

Altra applicazione alle curve piane projezioni di curve speciali di S_r (*).

12. Indichi $g_m{}^2$ la serie segnata sopra una curva piana C di ordine m e genere p dalle rette del piano. Se $g_m{}^2$ non è com-

(*) Per i concetti e le denominazioni adoperati in questo paragrafo, vedasi Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (*Math. Ann.*, t. XIX); Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques.* (*Math. Ann.*, t. XXX, e XXXIV); Castelnuovo, l. c,

Digitized by Google

pleta (il che accade certamente se $m-2>p$), si avrà una serie g_m^r ($r\geq 3$) completa che la contiene e che per ciò non può presentare il caso particolare del n° 1. In virtù di questa serie. alla curva C corrisponde univocamente una curva C' normale di uno spazio ad r dimensioni S_r; ed è chiaramente C' la projezione di C (o di una curva omografica a C) dallo spazio S_{r-3} sostegno della rete degli S_{r-1} corrispondente alla g_m^2.

13. Se g_m^2 è speciale e non completa, la serie completa g_m^r nella quale essa è contenuta è pure speciale (onde $m-r+1\leq p$) e C è la projezione di una C' speciale di S_r. Allora una curva aggiunta φ_{m-3} per un gruppo di g_m^2 deve spezzarsi nella retta contenente quel gruppo e in una curva aggiunta φ_{m-4}. Dicasi μ l'ordine minimo di una curva aggiunta φ_μ e pongasi $\mu=m-3-k$, ($k\geq 1$). La curva φ_μ e k rette del piano costituiscono una φ_{m-3} passante per k gruppi di g_m^r. Valgono quindi tutte le proprietà del § 2 (essendo ora $n=m$, $r_1=r$). In particolare dalla (9) si ha

$$k<\frac{m-r}{r-1}$$

e quindi

$$\mu>m-3\frac{m-r}{r-1}.$$

Adunque *se una curva* C, *d'ordine* m, *è projezione di una curva speciale dello stesso ordine di* S_r, *si ha per l'ordine minimo* μ *di una curva aggiunta di* C *la limitazione*

$$m-3>\mu>m-3-\frac{m-r}{r-1} \quad (*).$$

14. Inoltre, conservando le indicazioni del § 2, si avrà una serie (speciale completa) $g_{mi}^{r_i}$ ($i\leq k$), a cui appartiene ogni gruppo formato di i gruppi di g_m^r. La serie residua (secondo il teorema

(*) Se $r=3$ si ha $\mu>\frac{m-3}{2}$, cioè $\mu\geq\frac{m-2}{2}$: il che è noto (e dimostrato nel caso che la curva possegga soltanto punti doppi). Cfr. (ad esempio) NOETHER, *Raumcurven*, § 1, n. 4, (ove l'ordine minimo è $n-1$), e KÜPPER nei *Math. Ann.*, t. XXXI, pag. 294.

Digitized by Google

R-R) della $g_{mi}^{r_i}$ è una serie $g_{2p-2-mi}^{p-1-mi+r_i}$, la quale può ottenersi colle φ_{m-3} passanti per i gruppi di g_m^r, ad esempio per i gruppi di g_m^2. Ciò facendo, la detta φ_{m-3} si spezza nella i rette contenenti gli i gruppi e in una curva aggiunta residua φ_{m-3-i}. Questa curva segna adunque la detta serie residua e però varia in una $\infty^{p-1-mi+r_i}$. Ma, se indichiamo con δ il numero dei vincoli fra le condizioni che esprimono i passaggi di una curva aggiunta φ_{m-3-i} pei punti multipli di C (cioè il numero di queste condizioni che sono conseguenza delle rimanenti), l'infinità delle φ_{m-3-i} è data anche dal numero $\frac{(i+1)(i+2)}{2}+p-mi+\delta-2$.
Per conseguenza abbiamo

$$p-1-mi+r_i=\frac{(i+1)(i+2)}{2}+p-mi+\delta-2$$

ossia

$$\delta=r_i-\frac{i(i+3)}{2}.$$

Se $i=1$, si ha $\delta=r-2$: cioè sono $r-2$ i vincoli per una φ_{m-4}. Reciprocamente se ciò ha luogo, cioè se le curve aggiunte φ_{m-4} di una data curva costituiscono un sistema lineare $\infty^{p-m+r-1}$ (onde deve essere $m-r+1\leq p$), si ha su quella curva una serie $g_{2p-2-m}^{p-m+r-1}$, di cui la residua è una serie g_m^r, alla quale appartiene la g_m^2 data dalle rette del piano: e però ecc.

Se $i>1$, applicando la (8), si trova

$$\delta\geq ir+\frac{i(i-1)}{2}(r-1)-\frac{i(i+3)}{2},$$

cioè

$$\delta\geq(r-2)\frac{i(i+1)}{2}.$$

Concludiamo che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva piana* C, *di ordine* m, *sia la projezione di una curva speciale normale di* S_r *è che per la curva aggiunta di ordine* m — 4 *di* C *sieno* r — 2 *i vincoli fra le condizioni espresse dai passaggi per i punti multipli di* C ($p\geq m-r+1$). *E, se ciò accade, per ogni altra curva aggiunta di ordine*

Digitized by Google

$m-3-i$ (*quando esista*) *il numero dei detti vincoli è almeno* $(r-2)\,\frac{i(i+1)}{2}$ (*).

Invece per una curva aggiunta di ordine $\geq m-3$ le condizioni espresse dai passaggi per i punti multipli sono sempre indipendenti (se la curva fondamentale è irriduttibile).

15. La curva aggiunta di ordine minimo di C sia di ordine $m-3-k$ e sia Γ la curva normale speciale di S_r che ha per projezione C. Pongasi che per Γ passi una ∞^h di varietà (ad $r-1$ dimensioni) di ordine $i \leq k$. Si trova per h un limite inferiore nel modo seguente.

Tutte le varietà dello stesso ordine i segnano sopra Γ una serie $\binom{i+r}{r}-h-2$ volte infinita, ciascun gruppo essendo composto di mi punti. Ad essa appartengono i gruppi formati di i gruppi qualunque di $g_m{}^r$ (che è la serie data sopra Γ dagli S_{r-1}): ed anzi è chiaro che $\binom{i+r}{r}-h-1$ indipendenti di quei gruppi la determinano. Ne risulta che la detta serie è contenuta nella $g_{mi}^{r_i}$ e però si ha

$$r_i \geq \binom{i+r}{r}-h-2 \ .$$

Ma $r_i < p-1$, essendo $g_{mi}^{r_i}$ serie speciale: e quindi, introducendo anche la limitazione di p data dal n. 10, si ha

$$h \geq \binom{i+r}{r}-(\varkappa+1)\left(m-r-\varkappa\frac{r-1}{2}\right)-1 \, ,$$

ove $\varkappa$ è il massimo intero inferiore ad $\frac{m-r}{r-1}$ (e, per il n. 13, $k \leq \varkappa$).

Ad es., se $k=\varkappa$, $r=3$, si ottiene, per $i=\varkappa$,

$$h \geq \frac{1}{6}(\varkappa+1)\left[(\varkappa+2)(\varkappa+3r)-m\right].$$

Arenzano (Riviera Ligure) — Ottobre 1890.

(*) Anche questo teorema, se $r=3$, è noto (e dimostrato per la sola prima parte in modo analogo al precedente). Cfr. NOETHER, *Raumcurven*, (teor. I, II, del § 3) e KÜPPER, l. c., pag. 295.

Digitized by Google

Altra addizione alla Nota « Sui determinanti di determinanti »

per ENRICO D'OVIDIO

Il sig. Em. BARBIER, in una comunicazione all'Académie des Sciences (*«Sur une formule de Lagrange déjà généralisée par Cauchy. Nouvelle généralisation. Note de* M. Em. BARBIER — *Comptes-rendus*, 25 Giugno 1883, t. 96, p. 1845 ») recò tre esempi di un teorema, che disse aver divinato più che inventato, e che non enunciò. Or quel teorema non è altro se non il primo che trovasi dimostrato nella mia Nota « *Sui determinanti di determinanti* » (*Atti dell'Acc. di Torino*, v. XI, 11 Giugno 1876), e che già si trovava nella Memoria dello SPOTTISWOODE: « *Elementary theorems relating to determinants* » (*Giorn. di Crelle-Borchardt*, v. 51, 1856), come notai nella « *Addizione* » alla Nota citata (ibid., 25 Marzo 1877). Veramente, dal modo come il BARBIER scrive certi esponenti, parrebbe ch'egli non possedesse il teorema se non in casi particolari.

Il teorema era pure già stato dato come nuovo dal sig. FRANKE (*Giorn. di Borchardt*, 1863, t. LXI, p. 350: « *Ueber Determinanten ans Unterdeterminanten* »), e può enunciarsi così:

Dato un determinante $A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1\lambda} \\ . & . & . \\ a_{\lambda 1} & . & a_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$ *d'ordine* λ, *e preso l'intero* μ *fra* 0 *e* λ, *il determinante* A_μ *d'ordine* $\binom{\lambda}{\mu}$, *che ha per elementi i minori di ordine* $\lambda-\mu$ *in* A, *è eguale alla potenza* $\binom{\lambda-1}{\mu}^{ma}$ *di* A.

Dal che segue: *il determinante* $A_{\lambda-\mu}$ *d'ordine* $\binom{\lambda}{\mu}$, *che ha per elementi i minori d'ordine* μ *in* A, *è la potenza* $\binom{\lambda-1}{\mu-1}^{ma}$ *di* A.

A questo teorema si può aggiungere un altro, del quale il BARBIER indica solo un caso particolare della prima parte:

Digitized by Google

Il determinante, che ha per elementi i prodotti di due elementi omologhi di A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$, *è multiplo di* A, *quando le linee di* A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$ *sono ordinate in modo che gli elementi di almeno una linea di* A_μ *abbiano per omologhi in* $A_{\lambda-\mu}$ *i loro minori complementari in* A; *invece è nullo quando gli elementi di ciascuna linea di* A_μ *hanno per omologhi in* $A_{\lambda-\mu}$ *i minori complementari di una linea parallela.*

Infatti, se le linee che si considerano sono le orizzontali, basta aggiungere nel nuovo determinante ad una verticale le altre, per ridurre quella verticale ad avere almeno un elemento eguale a A e gli altri nulli nella 1ª ipotesi, tutti gli elementi nulli nella 2ª ipotesi.

In una successiva comunicazione (« *Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint* », ibid., 9 Luglio 1883, t. 97, p. 82) il sig. BARBIER recò un esempio della relazione

$$A_\mu A_{\lambda-\mu} = A^{\binom{\lambda}{\mu}},$$

la quale evidentemente è contenuta nel primo teorema (ed anzi è stata adoperata per dimostrarlo). Essa fu data da CAUCHY (*Journ. de l'Ecole politechnique*, cah. XVII, p. 102).

Nella stessa comunicazione il BARBIER diede due esempî (il 2° con qualche inesattezza) di un altro teorema, che nemmeno enunciò, e che è il seguente:

Ordinati gli elementi di A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$ *in modo che due elementi omologhi siano sempre due minori complementari in* A, *un minore qualsiasi di* A_μ *è eguale a quel minore di* $A_{\lambda-\mu}$ *che è complementare del proprio omologo, moltiplicato per* A *elevato all'esponente* $\nu - \binom{\lambda-1}{\mu-1}$, *ove* ν *indica l'ordine del detto minore di* A_μ.

Questo teorema è del FRANKE (l. c.). Esso si dimostra imitando il procedimento che suol tenersi nel caso particolare $\mu = 1$, che è notissimo e dovuto a Jacobi; e cioè: il minore scelto in A_μ si rende di ordine $\binom{\lambda}{\mu}$ introducendovi nuove orizzontali e verticali convenienti, indi si moltiplica per $A_{\lambda-\mu}$, e si vede che il prodotto si riduce a A^ν moltiplicato per quel minore di $A_{\lambda-\mu}$ di cui parla l'enunciato; onde il teorema.

Digitized by Google

Il signor Picquet pubblicò nei *Comptes-rendus* (1878, t. LXXXVI, p. 310) una Nota « *Sur les déterminants dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné* », e poco dopo nel *Journal de l'École Polytechnique* (cahier 45, t. XXVIII, 1878) una Memoria dal titolo: « *Analyse combinatoire des déterminants* » posteriore anch'essa alle citate mie Note, delle quali tuttavia l'autore mostra di non aver avuta cognizione. In questi lavori, che certamente il sig. Barbier ignorava, sono esposti i varî teoremi che ho dianzi enunciati (tranne il 2°), e ne sono indicati gli scopritori: Cauchy, Sylvester, Franke. Ivi è anche ritrovato il teorema che costituisce il § III della mia prima Nota, e che non pare sia stato da altri prima avvertito.

Accanto ad esso merita esser notato il seguente, che credo del Picquet:

In un determinante B *d'ordine* n *si assegnino* λ *orizzontali ed altrettante verticali, e sia* $B_{\lambda\lambda}$ *il determinante degli elementi comuni alle rimanenti orizzontali e verticali di* B. *Posto* $\mu > \lambda$, *si assumano come elementi di un nuovo determinante di ordine* $\binom{n}{\mu}-\binom{n-\lambda}{\mu-\lambda}$ *i minori ottenuti da* B *prendendo gli elementi comuni a* μ *verticali di* B *fra le quali nessuna o al più* $\mu-1$ *siano scelte fra quelle* λ *assegnate. Il nuovo determinante sarà eguale a*

$$B_{\lambda\lambda}^{\binom{n-\lambda-1}{\mu-\lambda}}\, B^{\binom{n-1}{\mu-1}-\binom{n-\lambda}{\mu-\lambda}}\,.$$

Il sig. Picquet dà poi altre proprietà, relative ai determinanti formati con elementi di due dati determinanti. Ma non fa cenno dei teoremi contenuti nella 2ª mia Nota.

Ho stimato non inutile analizzare le due comunicazioni del sig. Barbier e quelle del sig. Picquet, sia per rischiararle e rimetter le cose a posto, sia per l'occasione che mi offrivano di completare le due citate mie Note, nelle quali si trovano anche altri teoremi generali sui minori dei determinanti del tipo di A_μ.

Torino, 30 novembre 1890.

Digitized by Google

Le specie europee del genere CHRYSOTOXUM Meig.

Studio del Dott. E. GIGLIO-TOS;
presentato dal Socio CAMERANO

Sebbene il Loew nel 1841, e più tardi poi nel 1856 abbia pubblicato due lavori assai pregevoli intorno al genere *Crysotoxum* Meig., la determinazione delle specie di questo genere presentasi ancora molto intricata e difficile specialmente per gli errori di sinonimia in cui incorre il Loew stesso e per la insufficienza delle diagnosi delle specie.

Nella collezione di Ditteri del Bellardi ho potuto avere più di duecentocinquanta individui di tal genere comprendente quasi tutte le specie europee finora descritte, eccettuato *C. parmense* Rond. e *C. sibiricum* LOEW della Siberia che io credo di non comprendere nelle specie europee, contrariamente al parere del Loew. Con tal copioso materiale ho creduto utile di fare una nuova revisione del genere, aggiungendo alle già note, cinque altre nuove specie.

La maggior parte degli esemplari nominati sono Piemontesi, altri di Santa Radegunda in Stiria; ma è notevole ciò, che tutte le specie dell'Europa finora conosciute sono nel Piemonte rappresentate.

Gen. **CHRYSOTOXUM** MEIG.

in Illiger's Magazin II, 259 (1803).

Musca Linn. (2) p. 979-253; (7) p. 404-III.
Conops Scop. (1) p. 351.
Syrphus Fabr. (3) p. 762-172; (5) p. 421-175; (8) p. 278-232.
Musca Degeer (4) p. 99-3.
Mulio Fabr. (11) p. 183-41 - Fallén (12) p. 4 (nón *Milesia* Fabr.).

Digitized by Google

Chrysotoxum Meig. (13) p. 166-XCVI - Macq. (14) p. 196; (15) p. 489-6; Curtis (16) 653; Loew (17,23); Schummel (18); Zetterstedt (19) p. 633-64; Rond. (20) p. 194; (24) p. 197-32; Walker (21) p. 263-XV; Schiner (25) p. 252-166.

Antennis capite transverso circiter aeque longis, articulis tribus in tubercolo impositis: tertio oblungo, compresso, arista dorsuali nuda, prope basim inserta. Oculis plerumque hirtis, saltem in mare. Facie sub-recta supra epistomium tuberculata. Proboscide carnosa, palpis brevissimis. Scutello inerme, thorace piloso vel pubescente saltem in mare. Abdomine lato, vel ovato, vel sub lineare, flavo fasciato. Alis vena quarta longitudinali extrinsecus manifeste sinuosa; transversa exteriore contra apicem primae longitudinalis sita, quinta ad apicem, quartae conjuncta contra apicem tertiae: spuria ordinaria integra et perfecta, non interrupta. Pedibus non incrassatis.

Il *capo* è alquanto più largo del torace, emisferico. La *faccia* gialla più o meno rossiccia è tubercolata di sopra dell'epistomio con tre striscie nere o nericcie di cui due vanno dal margine antero inferiore degli occhi all'apertura boccale ed una dalla base delle antenne all'epistomio. La *proboscide* è in generale nera, carnosa e dilatata all'estremità, i *palpi* brevissimi, triarticolati ed inseriti a metà della proboscide, esternamente quasi sempre invisibili. L'*apertura boccale* è ovale, assai larga ed il labbro superiore intaccato. Le *antenne* inserite sopra un tubercolo frontale sono triarticolate: il terzo articolo a forma allungata in generale a punta più o meno acuta porta inserita quasi presso alla sua base dal lato esterno uno stilo nudo, filiforme. Gli *occhi* sono grandi, reniformi, irti quasi sempre di peli almeno mei maschi. Gli *ocelli* in numero di tre, di color rossiccio splendente sono disposti sul vertice tra i due occhi in forma di triangolo isoscele framezzo a peli assai lunghi nei maschi. Il *torace* quadrangolare, armato, ha due striscie bianchiccie parallele mediane più o meno lunghe e due gialle ai margini interrotte: sui fianchi ha pure altre due macchie gialle triangolari al di sotto dell'inserzione dell'ali. Lo *scudetto* è inerme, semicircolare. L'*addome* composto di 5 anelli visibili è peloso, glabro o quasi nudo e largo, ovale o quasi lineare, fasciato di giallo più o meno rossiccio in vario modo: così pure il ventre. Le *ali* sono o lim-

Digitized by Google

pide o fosche, col margine anteriore fosco o gialliccio totalmente od in parte, con o senza macchia nereggiante alla regione dello stimma. La 4ª vena longitudinale è più o meno ricurva e si riunisce alla corsale presso all'apice dell'ala; tra questa e la 5ª vena longitudinale esiste una venula spuria, obliqua, continua. I *bilancieri* sono sempre gialli più o meno ferruginosi, non molto grandi. Le *squame* o *calittere*, piccole, sono sempre di color giallo. I *piedi* di color giallo e nero, sebbene assai robusti; non sono tuttavia ingrossati in nessuna delle parti, e le tibie sono alquanto curve.

Caratteri sessuali.

Evidentemente il carattere primario sessuale si è la presenza nel maschio di un apparato copulatore posto all'apice dell'addome nella parte inferiore e capace di essere in parte ritirato nell'interno in modo da non lasciar visibile che la sua estremità. Tale apparato è composto di una parte arrotondata breve per cui sta unito all'addome e di un'altra esterna visibile, fatta di due articoli più o meno lunghi, arcuati, disposti a tenaglia, che servono al maschio per tenersi con efficaccia congiunto alla femmina durante l'accoppiamento. La grandezza e la colorazione sua è variabile molto: in qualche specie è molto grande (*C. arcuatum* Panz. *C. lubricum* mihi); in altre, sebbene sempre visibile, è mediocre: in talune è nero, (*C. elegans* Loew, *vernale* Loew. *festivum* Lin.) in altre giallo, munito o no di qualche breve pelo. Come caratteri sessuali secondari si possono annoverare i seguenti. Le *antenne* sono sempre nella femmina alquanto più lunghe e sottili che nei maschi e talora è alquanto diverso anche il rapporto degli articoli. Gli *occhi* sono sempre nella femmina meno pelosi che nei maschi e nella maggior parte della specie affatto nudi. Mentre nei maschi essi si toccano per quasi tutta l'estensione della linea mediana frontale, nelle femmine sono sempre più o meno distanti, derivandone da ciò che la fronte in quelli è piccolissima e di forma triangolare, bianchiccia o gialliccia nella parte superiore e coperta di peli lunghi neri o fulvi, mentre nelle altre è assai spaziosa a forma trapezoide nera, quasi sempre nuda, con due piccole macchie gialle o bianchiccie ben visibili. Il *torace* e lo *scudetto* di forma nei due sessi uguali differiscono solo nella copertura pelosa. Se questa è assai lunga e fitta nei maschi è meno lunga e fitta nelle femmine; se breve nei primi, manca

Digitized by Google

quasi sempre affatto nelle seconde. *L'addome* è nelle femmine peloso (*C. fasciolatum* Deg., *hortense* Meig) o quasi glabro o affatto nudo: in generale è in esse più oblungo, talvolta però alquanto più largo (*C. vernale* Loew).

Sinonimia. — Il gen. *Milesia* di Fabricio, da quasi tutti i ditterologi finora riferito come sinonimo di questo genere, non è tale giacchè avendolo quell'autore caratterizzato colle parole « *Antennae breves, triarticulatae: articulo ultimo ovato, compresso, setigero* » appare evidente che comprende in esso la specie a terzo articolo antennale non oblungo, ma ovale, o elittico.

Caratteri specifici.

Il carattere specifico della uguaglianza o ineguaglianza nella larghezza delle fascie gialle addominali, mi è parso quello più vistoso che divide nettamente in due gruppi molto ben distinti tutte le specie di questo genere. Così ho creduto pure di prendere per base di una seconda divisione la presenza di fascie che si estendono più o meno verso i margini laterali dell'addome ed anche questa ci permette di distinguere bene in due parti un buon numero di specie. L'avere poi il margine anteriore delle ali nereggiante fin dalla base e quasi fino all'apice è un carattere assai costante e non trova un'eccezione che in una varietà del *C. italicum* Rond.; così dicasi di quello del margine anteriore gialliccio, della presenza o mancanza di macchia nericcia allo stimma, delle vene delle ali a contorni limpidi o foschi, ecc. Corrispondenti a questi caratteri si nota una concomitanza di altri assai vistosi: tali sono la forma del corpo, la lunghezza relativa degli articoli delle antenne, la copertura pelosa del corpo ed anche il disegno stesso dell'addome. Ho voluto poi nelle descrizioni introdurre come elemento caratteristico di una certa importanza oltre alla lunghezza del corpo già sempre usata, anche la larghezza dell'addome presa nel punto dove essa si presenta maggiore cioè al margine posteriore del secondo segmento. Seguendo quindi l'esempio datoci da Loew ho riportato pure per ogni specie i rapporti numerici degli articoli delle antenne corrispondenti sempre ad altri caratteri pure importanti. E finalmente il disegno dell'addome sebbene molto variabile ha tuttavia per così dire un aspetto in complesso così caratteristico per molte specie, da non doversi trascurare e da essere anzi in talune così distintivo da divenire di molta importanza. Perciò ho aggiunto

Digitized by Google

a questo lavoro una tavola con alcuni disegni rappresentanti gli addomi ed i ventri di molte specie, particolarmente di quelle dove le fascie gialle e le proporzioni di larghezza e lunghezza hanno un'importanza notevole: disegni che ho creduto quasi necessari giacchè non ne esistono finora altri, per quanto io sappia, se si eccettuano quelli pessimi di Degeer, e di Meigen, quello di Panzer del *C. arcuatum* e forse qualcun altro.

Chiave analitica.

1	Fascie mediane dei segmenti addominali tutte eguali o quasi fra di loro	2
	Fascie mediane dei segmenti addominali disuguali . . *C. bicinctum* Linn. (1758)	
2	Fascie medie che si dilatano alquanto presso i margini dell'addome o che li raggiungono	3
	Fascie medie non raggiungenti il margine dell'addome	15
3	Margine anteriore delle ali nereggiante	4
	Margine anteriore delle ali giallo o gialliccio	8
4	Addome nei due sessi coperto di peli lunghi e fitti .	5
	Addome nei due sessi glabro o nudo	6
5	Margine anteriore delle ali nereggiante fino all'apice . *C. fasciolatum* Deg. (1776)	
	Margine anteriore delle ali non nereggiante fino alla estremità . . . . . *C. hortense* Meig. (1822)	
6	Addome largo, quasi circolare, depresso *C. Lessonae* mihi	
	Addome stretto, quasi ovale, alquanto carenato . . .	7
7	Margini laterali dell'addome gialli e neri alternatamente *C. italicum* Rond. (1845)	
	Addome tutto circondato di una fascia gialla. . . . *C. cisalpinum* Rond. (1845)	
8	Scudetto bruno o con una una macchia nera, pellucida, poco distinta.	9
	Scudetto giallo o con una macchia nera opaca distinta	12
9	Striscie grigie mediane del torace che raggiungono o quasi il margine posteriore.	10
	Striscie grigie mediane del torace che ne oltrepassano appena la metà.	11

Digitized by Google

10. Terzo articolo delle antenne quasi uguale al primo. . *C. parmense* Rond. (1845)
    Terzo articolo delle antenne più lungo del primo . . *C. arcuatum* Panzer (1796)

11. Organi copulatori maschili molto grandi *C. lubricum* mihi
    Organi copulatori maschili poco grandi *C. Sackeni* mihi

12. Organi copulatori maschili neri *C. elegans* Loew. (1841)
    Organi copulatori maschili gialli 13

13. Fascie addominali non congiunte fra di loro lungo i margini . . . . *C. Bigoti* mihi
    Fascie addominali congiunte tutte o in parte lungo i margini. 14

14. Fascie marginali del 3° e 4° segmento addominali poco larghe. . . . . *C. chrysopolita* Rond. (1845)
    Fascie marginali del 3° e 4° segmento addominali molto larghe. . . . . *C. octomaculatum* Curt. (1838)

15. Ali a macchia stigmaticale nereggiante distinta . . . 16
    Ali a margine anteriore più o meno giallo-fosco, ma senza macchia stimmaticale nera distinta . . . 17

16. Femori a base nera o nereggiante *C. vernale* Loew. (1841)
    Femori totalmente gialli *C. festivum* Linn. (1758)

17. Contorni delle vene delle ali offuscati *C. fuscum* mihi
    Contorni delle vene delle ali limpidi . . . . *C. lineare* Zetters. (1819)

C. fasciolatum DEGEER (4) p. 124; 14 tav. 7, fig. 14,15; LOEW (23) pag. 609-3; SCHINER (25) pag. 253-3.

Mulio fasciolatus FALLÈN (12) SYRPH. 5-1.

C. costale MEG. in MEIGEN (13) pag. 172-7.

C. marginatum MEIG. (13) 171-5; SCHUMMEL (18) ZETTERSTEDT (19) pag. 633, 1; WALKER (21) 266-6.

MAS - *Corporis long. millim. 17-18 - Abdominis latit. millim. 6-7. — Nigrum, pilosulum. Antennis nigris, articulo tertio duobus primis conjunctim longiore, arista fusca. Fronte nigra,*

Digitized by Google

lutescente, pilis longis nigris instructa. Oculis hirtis. Thorace nigro, fusco piloso, maculis lateralibus flavis. Scutello nigricante, pilis longis nigris instructo, margine antico lineola flava transversa. Abdomine nigro flavo pubescente, fasciis quatuor interruptis, duabus marginis postici segmentorum tertio et quarto integris flavis, apice flavo. Ventre nigro, pilosulo, incisuris, maculisque quatuor parvis in tertio et quarto segmento flavis. Pedibus flavo-ferrugineis, femoribus nigricantibus. Alis margine antico nigricante (Tav. Fig. 1 e 2).

Foemina differt: oculis breviter hirtis, fonte nigra, maculis duabus lutescentibus ad marginem oculorum contiguis.

Descrizione. — *Capo* largo poco più del torace. *Proboscide* cornea, dilatata e munita di qualche breve pelo all'estremità, nericcia. *Faccia* di un color giallo più o meno ocraceo; protuberanza epistomica poco sviluppata. Tre macchie nericcie la attraversano: due partendo dai margini infero-laterali degli occhi vanno a terminare sul margine boccale, l'altra più grande e più spiccata parte dalla insenatura anteriore dell'apertura boccale e si estende fino alla protuberanza su cui stanno inserite le antenne, senza però giungere al loro punto di inserzione. *Antenne* nere; proporzione degli articoli: 1 : 1 : 3 a un di presso: stilo lungo quanto il terzo articolo, bruniccio. *Protuberanza antennale* superiormente nera, munita di lunghi peli neri, e di brevi peli gialli alla sua base presso i margini interni degli occhi. *Occhi* neri, irti di peli assai lunghi e neri; margine posteriore biancheggiante. *Torace* nero coperto sopra e sotto di lunghi peli nericci o fulvi: due striscie gialle sui suoi margini laterali, interrotte poi da un tratto nero corrispondente a più di tutto lo spazio di inserzione delle ali. Due piccole linee mediane parallele, avvicinate, grigie, cominciando dal margine anteriore vanno un po' oltre la metà del torace. Una macchia gialla sta a ciascun suo lato immediatamente avanti alla base delle ali. *Scudetto* bruno posteriormente con lunghi peli neri; margine anteriore giallo con lunghi peli gialli. *Addome* nero di forma ovale, largo, molto curvo superiormente, incavato al di sotto, coperto di peli fitti, piuttosto brevi, uniformemente gialli, fuorchè sui fianchi dove spiccano due ciuffi di peli più lunghi, neri. Fascie di color giallo citrino o giallo ocraceo in numero di sei. Quattro decorrono sul mezzo dei segmenti addominali, interrotte lungo la loro linea mediana, si dilatano fortemente verso i margini laterali, ma in

Digitized by Google

generale non li raggiungono: quelle del terzo e quarto segmento si uniscono o quasi colle fascie marginali le quali sono intiere, e si dilatano alquanto a triangolo verso la parte mediana: quella del quinto è separata dall'apice dell'addome giallo da una sottilissima striscia nera in forma di Y. (Fig. 1). *Ventre* nero, coperto di peli neri assai lunghi, colle linee di unione dei segmenti gialli e due macchiette gialle ovali più o meno grandi sul terzo e quarto segmento e talora anche sul quinto (Fig. 2). *Ali* limpide nel loro margine posteriore, fulve nel loro margine anteriore dalla base fino alla metà: nericcie nell'altra metà. Tale striscia fosca non oltrepassa in larghezza la 4ª nervatura longitudinale, la quale è poco curva. *Bilancieri* e *calittere* gialle o giallo-ferruginee. *Piedi* gialli più o meno ferruginei: *anche* nere, *femori* neri o nereggianti dalla loro base fino ad oltre la loro metà, coperti di peli fulvi, assai fitti e lunghi.

Habitat: Svezia, Norvegia, Gran Bretagna, Germania, Austria e Italia. Ne esaminai molti del Piemonte, provenienti tutti dalle regioni alpine fra cui dalla valle Formazza nell' Ossola e dai dintorni di Pesio nelle valli di Cuneo. È comunissimo pure nei dintorni di santa Radegunda nella Stiria. Trovasi nei mesi di luglio, agosto e forse anche settembre.

Sinonimia — Meigen descrisse questa specie col nome di *C. marginatum*, ma d' accordo con Loew io credo che si debba conservare il nome datole dal De Geer, giacchè la descrizione da costui fattane è assai chiara e determinata. La specie descritta da Meigen col nome di *C. fasciolatum* De Geer, differisce da questa per le ali immaculate, e lo scudetto nero contornato di giallo, mentre il De Geer dice chiaramente che « le bord exterieur des ailes a une forte teinte de brun jaunâtre » e che « l'écusson du dos, qui est brun ou roussâtre, est marqué d'un ligne transverse jaune ». Il *Mulio fasciolatus* Fallén corrisponde a questa specie, di cui però non è sinonimo il *Syrphus arcuatus* Panzer come quest' autore riporta. Il *C. costale* Megerle in Meigen differente da questa specie per la statura di poco minore è equivalente al *C. fasciolatum* Deg. trovandomi in ciò d'accordo con Loew e con Schiner. Non sono però d'accordo con questi nel riferire a questa specie il *Sirphus vespiformis* in «*Entomologia systematica*» e *Milesia vespiformis* in «*Systema Anthiatorum*» di Fabricio e di ciò avrò occasione di parlare più avanti per la sinonimia del *C. arcuatum* Panzer.

Digitized by Google

C. hortense MEIGEN (13) pag. 173-8.
C. fasciolatum MEIG. (13) p. 170-4; ZETTERS. (19) p. 631-2.
C. arcuatum WALKER? (21) SYRPH. pag. 265-3; LOEW (23) pag. 609-4; SCHINER (25) p. 253-4.
C. scoticum, *pubescens* CURTIS (16) p. 653-7-8.

MAS - *Corporis longit. millim.* · *11* - *Abdominis latit. 4-5. Nigrum, pilosum. Antennis articulo tertio duobus primis longiore. Oculis hirsutis. Thorace luteo piloso. Scutello nigricante pellucido, pilis longis fusco-flavescentibus instructo, margine antico lineola flava transversa. Abdomine sub-globoso, flavo piloso, fasciis flavis alterne interruptis, apice flavo Femoribus nigricantibus, tibiis flavis, tarsis ferrugineis. Alis margine antico dimidia costa flavo-fuscescente* (Tav. fig. 5)

Foemina differt: oculis breviter albide hirtis, fronte nigra, maculis duabus lutescentibus.

VARIETAS: **nigropilosa,** mihi: *oculis magis hirsutis, thorace scutelloque pilis longis, nigris, alis margine antico nigricante.*

DESCRIZIONE. — Sebbene il carattere della statura debba considerarsi in generale di poca importanza, tuttavia credo che nei casi di maggior differenza non sia da trascurarsi affatto. La specie *C. hortense* Meig. è assai simile al *C. fasciolatum* Deg. ma ne differisce anzitutto per le minori dimensioni, e la differenza in questa circostanza è tale che credo a buon diritto potere formare un carattere specifico non spregevole unito naturalmente a quelli altri di cui ora verrò parlando.

In complesso il corpo si presenta nero e più peloso che non nella specie antecedente. *Capo* alquanto più largo del torace. *Proboscide faccia* e *antenne* come nel *C. fasciolatum* Deg. *Occhi* nei maschi coperti di peli neri lunghi e fitti, che nelle femmine sono più brevi, meno fitti e bianchicci. *Torace* coperto di peli gialli assai lunghi che sono neri nella varietà *nigropilosa* mihi e delle macchie marginali la posteriore alquanto più lunga dell'altra si porta fino al livello dell' inserzione del margine anteriore delle ali: al disotto delle macchie gialle laterali trovasi un'altra piccola macchia dello stesso colore, ovale, mancante nel *C. fasciolatum* Deg. *Scudetto* bruno scuro con una linea sottile gialla sul margine anteriore; in qualche esemplare tutto marginato strettamente di giallo: in ogni caso la macchia nera centrale sempre pellucida e non mai opaca e nettamente distinta.

Digitized by Google

Addome tondeggiante quasi globoso: le fascie mediane dei segmenti raggiungono i suoi margini laterali o quasi e si uniscono talora con quelle marginali. Nel secondo segmento la fascia marginale presentasi come una sottile striscia gialla ai lati che, gradatamente diminuendo, scompare affatto nella parte mediana Inoltre i ciuffi di peli che stanno sui fianchi alla base dell'addome sono gialli e frammischiati solo di qualche pelo bruno nella varietà *nigropilosa*. Le *ali* hanno il margine anteriore giallo più o meno fosco e alquanto nereggiante nella varietà *nigropilosa*, ma tale parte oscura generalmente non si estende in larghezza ed in lunghezza oltre la seconda nervatura longitudinale: in ciò differisce massimamente dal *C. fasciolatum* Deg. In tutto il resto è simile a quest'ultima specie.

HABITAT: Germania, Scandinavia, Italia, Stiria, Gran Brettagna? Non è molto comune. Gli esemplari da me esaminati provengono da santa Radegunda in Stiria, e dalle regioni alpine del Piemonte, fra cui dalla Valle Formazza nell'Ossola, dai dintorni di Pesio e di Valdieri nelle valli di Cuneo. Trovasi nei mesi di luglio, agosto e settembre.

SINONIMIA. — Il *C. fasciolatum* Deg. in Meigen, e di Zetterstedt ed il *C. scoticum* e *pubescens* di Curtis sono da riferirsi a questa specie e forse a quelle variazioni individuali in cui lo scudetto appare nero contornato di giallo, ed il margine anteriore delle ali di color giallo assai poco offuscato. Forse è sinomino pure di questa specie il *C. arcuatum* Walk.; tuttavia non è detto nella sua descrizione se il corpo sia coperto di peli, e questo è uno dei caratteri più salienti. Anche Loew e Schiner riferiscono questa specie al *C. arcuatum* Lin.: avrò occasione di ritornare sopra questa discussione nel descrivere il *C. festivum* Lin.; per ora mi limito ad affermare l'insussistenza di questa sinonimia giacchè Linneo attribuisce al suo *C. arcuatum* quattro fascie addominali e non sette nè otto, l' addome glabro inferiormente con quattro fascie gialle ed i piedi interamente ferruginei.

Non ho potuto poi vedere dove Linneo parli nella sua descrizione dell'addome peloso, come Loew afferma: riporto in prova quanto dice a tal proposito Linneo stesso: « *Abdomen ovatum, nigrum, arcubus quatuor luteis medio interruptis*..... »

Digitized by Google

C. Lessonae n. sp.

Mas. — *Corporis longit. millim. 15-17 Abdominis latit. millim. 5-7. Nigrum, pubescens. Antennis, arista pallida. Oculis tenuiter hirsutis. Thorace flavo pilosulo. Scutello flavo, macula magna media nigricante, pellucida, pilis longis nigris instructo. Abdomine lato, depresso, ovato, fasciis quatuor latis interruptis, duabus integris, apiceque flavis. Ventre, fasciis tribus flavis, latis, arcuatis. Alis margine antico nigricante. Pedibus luteo-ferrugineis, femoribus basi nigris.* (Tav. fig. 3, 4).

Foemina differt: statura minore (millim. 14) abdominis minore latitudine (mill. 4 1/2) fronte maculis duabus albidis, pilis brevibus tantum instructa. Oculis tomentosis. Thorace tenuiter pubescente. Femoribus, pedibusque luteo ferrugineis.

I Varietas: **affinis** mihi, *corporis longit. mill. 13-14; abdominis latit. millim. 4-5. Thorace flavo tomentoso. Scutello flavo, macula media nigricante, parva, pellucida. Abdomine fere glabro, ovato, fasciis mediis segmentorum latis, posticis subtillimis. Femoribus basi nigricantibus vel ferrugineis.*

II Varietas: **hyalipennis** mihi: *simillima varietati* affinis, *distincta tamen abdominis fascis latioribus, alis margine antico luteo non fusco.*

Descrizione. — Questa specie è assai affine al *C. italicum* Rond. sebbene nel suo *facies* generale si presenti molto nettamente distinta da esso. E concorrono specialmente a questa distinzione la maggior mole del corpo, e la larghezza dell'addome relativamente al torace. *Capo* alquanto più largo del torace; *faccia* gialla più o meno ocracea sparsa di qualche pelo fulvo, colle solite striscie nericcie di cui la mediana si tiene alquanto distante dalle radici delle antenne *Fronte* coperta di peli lunghi neri, di color bianco argentino per molti peli brevissimi di tal colore che la coprono; protuberanza antennale nera. *Antenne* nere coll'ultimo articolo terminato a punta gradatamente e collo stilo lungo quanto questo, di color testaceo pallido. Proporzione nei loro articoli: 1 : 1 : 2 $^2/_3$. *Occhi* irti di peli assai fitti ma di colore cenerino; margine posteriore bianco argentino. *Torace* coperto di peli gialli assai lunghi sopra e sotto, colle macchie gialle marginali poco distanti fra di loro e di cui la posteriore è assai più lunga dell'anteriore. Linee grigie mediane assai visibili, larghe e che non vanno molto oltre la metà. Al

Digitized by Google

disotto delle solite macchie laterali del torace due piccole macchie ovali assai distinte. *Scudetto* munito di peli lunghi neri o nereggianti ; nel mezzo una macchia ovale assai grande e pellucida. *Addome* largo, poco arcuato, ovale, leggermente carenato verso la sua parte posteriore, coperto di peli fitti, gialli e corti che vanno allungandosi gradatamente fin sui fianchi. Fascie addominali mediane larghe assai, che raggiungono i margini laterali e si uniscono insieme alle posteriori. Di queste, manca quella del secondo segmento; quella del terzo assai sottile si allarga alquanto verso il mezzo, terminando ad angolo molto ottuso, e quella del quarto ha la forma di triangolo col vertice vicino assai alla linea di interruzione della fascia anteriore. L'estremità anale ha una macchia a triangolo col vertice acutissimo, e riunita assai largamente alla fascia anteriore dello stesso segmento. (Tav. fig. 3). *Ventre* sparso di peli lunghi, rari, gialli; una striscia sottilissima gialla alla base, quindi si succedono alternatamente delle fascie assai larghe nere continue e gialle quasi sempre interrotte lungo la linea mediana (Tav. fig. 4). *Piedi* giallo-ferruginei ; *femori* anteriori e mediani a base nera ed i posteriori neri o nericci fin oltre la metà; tarsi ferruginosi. *Ali* a margine anteriore nericcio come nel *C. fasciolatum* Deg.

La varietà *affinis* (mihi), è la forma veramente di passaggio da questa specie al *C. italicum* Rond. In essa la mole va diminuendo, e l'addome prende una forma più oblunga. I peli degli occhi e del torace sono più rari e più corti, così quelli dello scudetto, che non sono più neri ma gialleggianti. Questo è quasi giallo del tutto e la macchia nera pellucida è assai piccola. Addome quasi glabro. Rarissimi i peli del ventre e limitati alla sua base, la quale è anche più largamente fasciata di giallo. Fascie intiere posteriori dell'addome meno grandi. Femori non neri, ma ferruginosi alla loro base. Nelle femmine poi gli occhi ed il torace sono appena tomentosi, lo scudetto è privo di peli lunghi, l'addome è glabro sopra e sotto e le macchie frontali sono gialleggianti.

La 2ª varietà *hyalipennis* (mihi), è somigliantissima a questa prima, ma tuttavia se ne distingue per le fascie addominali alquanto più larghe e sopratutto poi per le ali a margine giallo e non oscuro, nè fosco.

Sono convinto dell'esistenza reale di questa specie giacchè potei esaminarne parecchi individui e porli a confronto con un

Digitized by Google

numero assai considerevole delle varietà *affinis*, *hyalipennis* e del *C. italicum* Rond.

Habitat: Piemonte. Gli esemplari esaminati provengono dai dintorni delle terme di Valdieri nelle valli di Cuneo: quelli della varietà *affinis* da regioni alpine o prealpine.

C. italicum Rond. (20) p. 196-1; (24) p. 201-2.
C. intermedium Loew. (23) p. 610-5; Schiner (25) 254-5.
C. monticola Schummel (18).
C. graecum Walker (22) p. 219.

Mas. — *Corporis longit. millim. 9-11. Abdominis latit. millim. 4-5. Antennis articulis duobus primis brevibus, subaequalibus, tertio longitudine dupla praecedentium conjunctim. Oculis pubescentibus. Thorace flavo pubescente. Scutello flavo, macula media nigricante pellucida. Abdomine ovato, arcuato fasciis quatuor latis interruptis, duabus integris subtillimis apiceque flavis. Alis margine antico nigricante. Pedibus luteoferrugineis.* (Tav. fig. 6).

Foemina differt: thorace et scutello brevissime pilosis: fronte nigra maculis duabus lateralibus cinereo-sublatuscentibus: oculis, abdomine atque ventre nudis.

Varietas: **gymnophthalma** mihi *statura minore, abdominis fasciis magis attenuatis, oculis nudis etiam in maribus.*

Descrizione. — Credo inutile riferire qui una descrizione più minuta di questa specie. Rondani la descrisse correttamente e ne rilevò in modo particolare i caratteri che la distinguono dal *C. intermedium* Meig. con cui taluni ditterologi l'avevano confusa (26, p. 141), riferendosi in tale descrizione alla diagnosi di questa ultima specie data dal Zetterstedt. In seguito Loew e Schiner nei lavori sopra citati ne diedero, specialmente il primo, una minuta ed accurata descrizione, alla quale credo dover rimandare colui che volesse maggiori particolari intorno a ciò.

La varietà *gymnophthalma* oltre al distinguersi per la statura più piccola, per le antenne più strette quasi lineari, per l'addome più stretto a fascie interrotte sottili e con mancanza quasi assoluta di fascie marginali si differenzia poi principalmente per la mancanza completa di peli sugli occhi non solo nelle femmine, ma anche nei maschi.

Habitat: Italia, Germania, Austria, Francia, Europa meri-

Digitized by Google

dionale fino all'Asia Minore ed alla Siria. Da noi fu trovata da Rondani nell'Italia centrale e nella Meridionale. Tra gli esemplari da me esaminati taluni provengono da Valdieri, altri dai dintorni d'Ivrea nel Canavese, ed uno dall'isola di Cipro. La varietà *gymnophthalma* è del Piemonte.

Sinonimia. — La sinonimia di questa specie diede molto a discutere a parecchi ditterologi, onde penso propizia l'occasione di fare anch'io qualche parola intorno a tal soggetto.

Meigen fece una descrizione di una specie, da lui chiamata *C. intermedium*, unendovi una figura. Riferendoci nella determinazione ai suoi dati descrittivi e figurati, sebbene sieno alquanto incompleti, non possiamo far a meno di essere condotti a riconoscere nel suo *C. intermedium* una specie affinissima al *C. arcuatum* Linn. come vien da lui interpretato od al *C. festivum* Linn. secondo l'interpretazione del Loew. Tanto è vero ciò, che gli autori che vennero in seguito a lui, come Macquart, Curtis, Zetterstedt, Valker e Rondani seguendo la descrizione del Meigen vennero agli stessi risultati finali, e ciò si può molto bene scorgere, dalle descrizioni date da ognuno di essi. Ma nel 1856 il Loew nel suo citato lavoro, pag. 617, 618, dice che avendo potuto avere da Giac. Sturm un maschio determinato da Meigen come *C. intermedium* e portante ancora l'etichetta scritta da questo, potè togliere ogni dubbio che avesse sull'autenticità della specie, ed in base a ciò ne dà la descrizione minuta di cui già dissi, descrizione che concorda perfettamente con quella del *C. italicum* Rond. perciò moltissimo diversifica da quella di Meigen e dalla unita figura. Anzi il Loew stesso fa molto bene risaltare questa diversità. A questo punto due cose sole si possono ammettere: o che Meigen abbia dato, come suppone Loew, una cattiva descrizione ed una pessima figura *(herzlich schlecht figur)* del *C. intermedium*, oppure che uno sbaglio sia successo, per disattenzione o per altro motivo, quando il Meigen scrisse od infilzò nell'ago l'etichetta per l'esemplare inviato poi a Giac. Sturm. Quale delle due è più ammissibile? A parer mio la seconda, giacchè trattasi in tal caso di un errore che può commettere ognuno, mentre è per lo meno inverosimile che Meigen abbia potuto dare di una specie non solo una pessima figura, ma anche una cattiva descrizione. E credo che sia più nel vero la mia supposizione che non quella di Loew. Ciò ammesso la cosa si riduce ad una questione semplice di priorità. Il *C. intermedium* Loew non è

Digitized by Google

il *C. intermedium* Meig.: ma il primo è identico al *C. italicum* Rondani: la descrizione data da questo nel 1845 antecede quella data da Loew nel 1856, dunque si deve conservare a questa specie il nome di *italicum* datole prima da Rondani.

Sono d'accordo del resto con Loew ad ammettere sinonimi di questa specie, il *C. monticola* Schum, ed il *C. graecum* Walk.

C. cisalpinum Rondani (20) p. 197-2; (24) p. 200-1; Loew (23) p. 611-6; Schiner (25) p. 254-5.

Mas. – *Corporis longit. millim. 9-11-Abdominis latit. millim.* 3 $^1/_2$-4. *Nigrum, pubescens. Antennis articulo tertio longitudine subaequali duobus primis coniunctim, arista flavescente. Thorace sub nudo. scutello toto flavo vel interdum macula nigricante, parva, pellucida, pilis longis destituto. Abdomine nudo, fasciis flavis interruptis ad latera confluentibus in fasciam marginalem luteo-sub-fulvam quae totum abdomen circumdat. Alis margine antico flavo rufescente, macula apicali nigricante distincta. Pedibus flavis.* (tav. fig. 7).

Foemina differt: fronte flava, postice nigra et antice nigro marginata, oculis nudis.

Descrizione. — Questa specie è molto nettamente distinta da tutte le altre di questo genere. I caratteri suoi differenziali sono i seguenti. Rapporti degli articoli delle *antenne:* $1:1^1/_3:2^1/_3$. *Torace* quasi nudo e così lo *scudetto* il quale è talora completamente giallo, talora invece con una macchia bruna nel mezzo piccola e poco distinta. *Addome* quasi di larghezza costante dalla sua base fino al margine posteriore del quarto segmento: si restringe poi quasi d'un tratto, e, specialmente dopo il secondo anello, la parte dorsale è foggiata a carena. Fascie gialle del 2° segmento assai largamente interrotte che si dilatano moltissimo ai margini fino ad occupare quasi tutta la larghezza del segmento: le altre alquanto più strette, ma tutte disposte molto obliquamente. Al margine posteriore del 3° segmento vi è talora una linea sottilissima gialla dilatata alquanto nel mezzo: una simile, ma assai più visibile, sul 4° segmento, mentre sul 5° essa si restringe in una macchia triangolare. Tutte queste fascie sono riunite insieme da una fascia gialla assai larga che circonda tutto l'addome dalla base all'ano. *Ventre* nudo a fascie gialle alternate e disposte come nel *C. italicum* Rondani. *Apparato copulatore* maschile nericcio, e talora giallo. *Ali* col margine ante-

Digitized by Google

riore più o meno giallo-ferruginoso; verso il loro apice una macchia nereggiante. Vena 4ª longitudinale assai curva.

HABITAT. Italia, Austria. Secondo il Loew si troverebbe anche in Corsica. Gli esemplari da me esaminati sono delle Alpi Marittime. Non pare una specie molto comune.

C. parmense ROND. (20), p. 198-3; (24) p. 201-3; Loew (23)-p. 613-13.

Vedi la descrizione data da Rondani e da LOEW nelle opere succitate.

HABITAT. Italia.

C. arcuatum PANZER (9) Erst. Jahrg. 2-10.
Musca arcuata Linn.? (2) p. 985-39; (7) p. 440-88 (non Deg.).
C. sylvarum MEIG. (13) p. 171-6; Schummel (18); Loew (23) p. 608-1-Schiner (25)-p. 253-4.
C. scutellatum Macq. (14)-p. 201-4.
C. fasciolatum Rond. (20)-p. 199-5; (24)) p. 202-4.

Corporis longit. millim. 15-16-Abdominis latit. millim. 6-7. Nigrum, pilosulum. Antennis articulo tertio longiore duobus primis conjunctim. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso, tota longitudine griseo-bivittato. Scutello bruneo. Abdomine pubescente, depresso, lato, fasciis sex luteo-fuscis alterne interruptis, apice flavo. Ventre flavo, piloso, fasciis nigris arcuatis. Alis margine antico flavescente. Pedibus flavo-ferrugineis, femoribus basi nigris (tav. fig. 8, 9).

VARIETAS: **impudicum** Loew. (V. descriptionem in opere cit).

DESCRIZIONE. — Sebbene per l'aspetto e per la mole si avvicini assai al *C. fasciolatum* Deg. se ne distingue tuttavia assai nettamente per i seguenti caratteri. Nella *faccia* la striscia nericcia mediana è assai più stretta, e la protuberanza epistomica alquanto più spiccata. Le *antenne* hanno nei loro articoli le seguenti proporzioni: $1:1^1/_3:2$. Nelle femmine le macchie frontali sono d'un grigio cenerino. *Occhi* meno pelosi. *Torace* coperto di peli fulvi e gialli, non molto lunghi; le due linee grigie longitudinali lo percorrono per tutta la sua lunghezza e le macchie gialle marginali e laterali come nelle altre specie. *Scudetto* interamente bruno con peli lunghi fulvi o gialli e talora con un margine sottile giallo. *Addome* depresso, largo, coperto di peli brevi neri sulle

Digitized by Google

fascie nere, gialli sulle gialle, e quelli che stanno sui fianchi dell'addome alla sua base lunghi e gialli. Fascie gialle interrotte molto dilatate ai margini e congiunte con quelle marginali assai sottili: prima fascia assai più largamente interrotta che non le altre (tav. fig. 8). Sul *ventre*, alla base di ogni anello, delle fasce gialle interrotte nel mezzo che si continuano sul lembo posteriore dell' anello antecedente (tav. fig. 9). *Ali* a margine anteriore non nereggiante, ma giallo e talora giallo alquanto fosco compreso nei limiti della 2ª vena longitudinale. *Piedi* gialli e femori neri non oltre alla loro metà.

HABITAT: Austria, Germania, Inghilterra, Francia, Italia. Gli esemplari da me esaminati sono del Piemonte e provengono dalle selve lungo il torrente Sangone presso Torino, dai dintorni di Cuneo e di Susa. È assai comune.

SINONIMIA. — Osservando la figura che il Panzer dà del *Syrphus arcuatus* come sinonimo della *Musca arcuata* Linn. e del *Syrphus arcuatus* Fabr. si è condotti indubbiamente a riconoscere in essa la specie ora descritta, sia per le proporzioni del corpo, sia ancora per le fascie dell'addome, e non il *C. fasciolatum* Deg. come il Fallén crede. Il *C. fasciolatum* di Rondani, come ho potuto convincermi da due esemplari tipi di quest'autore è sinonimo del *C. sylvarum* Meig. come da Loew viene concluso. Non riconosco caratteri abbastanza importanti nel *C. scutellatum* Macq. per distinguerlo da questa specie. Quanto alla sinonimia della *Musca arcuata* Lin. la questione è in tal caso assai complicata. La descrizione datane da Linneo è così imperfetta, e la sinonimia sua è così scorretta che ho creduto bene di annullare affatto il nome Linneano e sostituirlo con quello del Panzer. Ho già detto (V. sinonim. *C. hortense*) perchè non si possa accettare la identità stabilita da Loew tra *C. hortense* Meig. e *Musca arcuata* Linn.; aggiungerò qui che questa potrebbe meglio riferirsi al *C. arcuatum* Panz. per il ventre giallo e per le quattro fascie gialle che vi si trovano, come Linneo accenna, ma anche da questo differenzia per avere i piedi totalmente ferruginosi (*pedes toti ferruginei*). Quanto alla sinonimia stabilita da Linneo colla *Musca arcuata* Deg. essa è affatto erronea trattandosi di una specie molto diversa. Taluni (per es. Schiner (25) - p. 253-4) riferiscono a questa specie il *Syrphus vespiformis* Fabr.: io non sono di quest'avviso giacchè la descrizione che egli ne dà è affatto insufficiente e può applicarsi tanto bene a questa come

Digitized by Google

ad altre specie. Inoltre le sinonimie che Fabricio stesso riferisce a questa specie della *Musca vespiformis* di Linneo e di Degeer che non appartiene neppure al gen. *Chrysotoxum* Meig., ci provano ancora di più l'erroneità di Schiner. Aggiungasi ancora che nel « *Systema Antliatorum* » viene descritta sotto il nome generico *Milesia* che non è sinonimo del gen. *Chrysotoxum* come già ho notato. Lo stesso deve dirsi ancora delle diagnosi date da Fabricio ne' suoi vari lavori del *Syrphus arcuatus* che egli fa sinonimo della *Musca arcuata* di Linneo: esse sono talmente incomplete che per verità si potrebbero applicare a quasi tutte le specie del genere di cui trattiamo.

C. lubricum n. sp.

Mas. - *Corporis longit. mill. 13. Abdominis latit. mill. 4. - Nigrum, pilosulum. Antennis articulo tertio longitudine subaequali duobus primis conjunctim, arista flavescente. Oculis hirtis. Thorace flavo-piloso, scutello nigricante, flavo subtilime limbato, pilis longis flavis instructo. Abdomine oblungo, flavo piloso, fasciis quatuor interruptis latis, duabus integris, apiceque flavis. Ventre flavo pilis longis flavis munito, fasciis nigris. Genitalibus flavis, maximis. Alis margine antico flavescente. Pedibus ferrugineis, femoribus medietate basali nigris. (Tav. fig.* 10, 11*).*

Descrizione — Corpo oblungo, snello. La *faccia* ha la striscia nera mediana assai sottile, acutissima e distante dalla base delle antenne. *Occhi* coperti di brevi peli. Articoli delle antenne: $1 : 1\,{}^{1}/_{4} : 2\,{}^{1}/_{4}$. *Torace* irto di peli assai lunghi gialli, e le due linee grigie mediane poco visibili oltrepassano appena la sua linea di mezzo. *Scudetto* bruno-nericcio pellucido con un orlo gialleggiante sottilissimo e con lunghi peli gialli. *Addome* coperto di peli poco lunghi, gialli con quattro fascie gialle interrotte, quasi diritte che si dilatano verso i margini laterali senza raggiungerli e si congiungono invece o quasi con quelle intiere marginali del 3°, 4° e 5° segmento. Queste sottilissime, quasi diritte, non dilatate nel mezzo; solo quella del 5° segmento alquanto più larga delle altre (tav. fig. 10.) *Ventre* giallo, sparso di peli assai lunghi, solcato da fascie nere diritte poste quasi al margine posteriore di ogni segmento e riunite l'una all'altra anteriormente lungo la linea mediana (tav. fig. 11.) *Apparato copulatore* maschile visibilissimo, giallo, molto grande, forcuto e assai sporgente

Digitized by Google

all'esterno. *Bilancieri* giallo-ferruginosi; *ali* limpide col margine anteriore giallo-fosco sottilmente: quarta vena longitudinale appena sensibilmente curva. *Piedi* giallo-ferruginosi ed i femori neri nella loro metà basale.

HABITAT. Piemonte. Ne esaminai due individui maschi presi nei dintorni di Torino.

C. Sackeni n. sp.

MAS. — *Corporis longit. millim. 14 — Abdominis lat. millim. 5. Nigrum pubescens. Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace flavo-piloso, scutello ferrugineo macula nigra, pellucida, parum distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine ovato, arcuato, glabro, fasciis quatuor flavis interruptis et quatuor integris, ad latera connatis. Ventre flavo, fasciis nigris exilibus. Genitalibus flavis. Alis margine antico flavescente. Pedibus totis flavis (Tav. fig. 12 e 13).*

Foemina invisa.

DESCRIZIONE. — Proporzioni degli articoli delle antenne: 1 : $^5/_6$: 1 $^1/_4$. *Occhi* irti di peli assai fitti e lunghi. *Torace* macchiato come nelle antecedenti specie, coperto di peli lunghi, fitti, gialli. *Scudetto* ferruginoso con una macchia nera pellucida appena visibile. *Addome* quasi glabro, con due soli ciuffetti di peli giallo-bianchicci sui fianchi alla base. Tutti i segmenti hanno due fascie; una mediana anteriore interrotta, l'altra posteriore marginale intiera congiunte largamente fra di loro. Di queste ultime quella del 2° segmento è sottile, ma sempre ben visibile. quella del 3° più larga, quella del 4° larghissima, semicircolare appena disgiunta dall'anteriore da una sottile striscia nera ad arco. così quella del 5°. Tutte queste fascie, fuorchè quelle del 5° segmento. sono libere fra di loro fra un segmento e l'altro. (Tav. fig. 12). *Ventre*, quasi tutto giallo, sparso di peli lunghi alla sua base: tre fascie nere a mezzaluna sul mezzo del secondo, del terzo, e del quarto segmento, e la loro larghezza va diminuendo dalla prima alla terza. Una piccolissima macchia nera sul mezzo della base 4° segmento (fig. 13). Organi copulatori gialli con qualche pelo nericcio. Margine anteriore delle ali e piedi gialli.

HABITAT. Italia (Piemonte - Dintorni di Torino).

Sebbene non ne abbia potuto esaminare che un individuo solo, maschio, ho creduto farne una specie nuova, giacchè è assai bene distinto da tutte le altre. Differisce dal *C. elegans*

Digitized by Google

Loew e dal *C. Bigoti* mihi per la diversa colorazione dello scudetto e per le fascie dell'addome, dal *C. chrysopolita* Rond. e dal *C. octomaculatum* Curtis anche per il colore dello scudetto e perchè le fascie dell'addome non sono congiunte fra di loro ai margini laterali di esso. Aggiungasi ancora la differenza nei rapporti degli articoli antennali, nella forma generale dell'addome, nel disegno del ventre.

C. elegans Loew (17) 1841 pag. 140. (23) pag. 613-12. Zetterstedt (19) pag. 637-5 - Rondani (olim) (20)-p. 200-6; (24) pag. 203-8 - Schiner (25) - p. 256-10.
C. arcuatum Schrank (10)-III - 2407.

MAS. — *Corporis longit. millim. 13-14. Abdominis latit. millim. 4 $^1/_2$-5 $^1/_2$. Nigrum, pilosulum. Facie flava, oculis hirtis, antennis articulis subaequalibus. Thorace fulvo pubescente, scutello flavo macula nigra, opaca, distincta. Abdomine fulvo pilosulo, fasciis quatuor interruptis, duabus integris apiceque flavo-ferrugineis. Ventre fulvo piloso, maculis quatuor flavo-ferrugineis. Genitalibus nigris. Alis margine antico flavo-ferrugineo. Pedibus ferrugineis-femoribus basi nigra. (Tav. fig. 14).*

Faemina differt: Antennis longioribus, oculis nudis, thorace, scutello, abdomine ventreque subnudis.

DESCRIZIONE. — È simile al *C. Sackeni* mihi, per l'aspetto e per la statura e ne differisce per i seguenti caratteri. Corpo alquanto più peloso e di colore in complesso più scuro. Proporzione degli articoli delle *antenne* 1 : 1 : 1 $^1/_5$. *Torace* coperto di peli alquanto lunghi, fulvi: *scudetto* a margine più o meno largo giallo, munito di peli lunghi, fulvi: nel mezzo una macchia opaca, nera, ben distinta. *Addome* di poco più largo, più depresso, alquanto più peloso specialmente sui fianchi presso la base. Fascie di color giallo-ferruginoso, di cui quattro assai largamente interrotte strette, raggiungenti i margini dell'addome. Nel 2° segmento manca la fascia marginale posteriore e nel 3° e 4° segmento sono sottilissime, appena alquanto dilatate ad angolo nel mezzo e congiunte ai margini con quelle interrotte: il 5° segmento ha sul margine posteriore una macchia giallo ferruginosa non grande, congiunta pure colla fascia interrotta (Tav. fig. 14). *Ventre* sparso di peli assai lunghi fulvi: nero nitido, con quattro macchie ovali

Digitized by Google

giallo-ferruginose poste lateralmente alla linea mediana nel 3° e 4° segmento. *Apparato copulatore* maschile nero e assai visibile. Tutti i *femori* neri o nericci alla loro base e alquanto pelosi. La 4ª vena longitudinale delle *ali* alquanto più curvata. Nella femmina le antenne sono più lunghe, gli occhi quasi nudi, il torace pubescente, lo scudetto privo di peli lunghi, l'addome ed il ventre quasi glabri fuorchè sui fianchi presso la base, i femori talora del tutto gialli e nudi.

HABITAT. — Svezia, Inghilterra, Francia, Germania, Italia. Gli esemplari da me esaminati provengono dalle regioni alpine del Piemonte, fra cui da Ceresole.

SINONIMIA. — Rondani che ammise prima questa specie, la considerò poi come varietà del *C. intermedium* Meig. Ora io non sono di quest'avviso, giacchè i caratteri distintivi da quest'ultima specie sono assai notevoli. Il *C. intermedium* di Walker è questa stessa specie, riferendo egli certamente il carattere degli occhi nudi alle femmine e non ai maschi.

C. Bigoti n. sp.

MAS. — *Corporis longit. millim. 12-13-Abdominis latit. millim. 4-5. — Nigrum, pubescens. Antennis, articulis subaequalibus. Oculis subnudis. Thorace flavo piloso, scutello flavo macula media nigra distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine glabro, ovato, fasciis quatuor interruptis, duabus integris apiceque flavis. Ventre nudo, fasciis quatuor flavis. Genitalibus flavis. Pedibus flavescentibus. Alis margine antico tenuiter flavescente.*

Foemina differt: Antennis longioribus, oculis nudis, thorace tenuiter flavo-pubescente, scutello sub-nudo, abdomine ventreque nudis.

DESCRIZIONE. — Sebbene questa specie sia assai somigliante al *C. elegans* Loew, tuttavia i caratteri suoi distintivi sono tali che ho creduto a ragione poterne fare una specie a parte secondo il significato zoologico che oggidì si dà a questa parola. Ecco in quanto differisce dalla specie antecedente. In complesso il corpo appare più slanciato, e quasi nudo a primo aspetto. I rapporti di lunghezza degli articoli delle *antenne* sono: $1 : {}^{4}/_{5} : 1{}^{1}/_{5}$. *Occhi* coperti di peli corti, rari ed appena visibili. *Torace e scudetto* muniti di peli assai lunghi e gialli e oltre alle macchie gialle laterali vi è ancora una piccola macchia dello stesso colore posta tra il limite anteriore della striscia

Digitized by Google

gialla marginale del torace e l'inserzione del primo paio di zampe. Tale macchia resta quasi nascosta sotto al margine bianchiccio postero-laterale degli occhi. *Addome* quasi nudo; sui fianchi alla sua base due ciuffi di peli assai lunghi, gialli. Oltre le solite fascie, interrotte meno largamente qui che non nel *C. elegans* Loew., si hanno ancora le altre marginali. Di queste una si trova sul secondo segmento ed è sottilissima visibile in taluni esemplari solo verso i margini laterali, in tali altri solo nel mezzo. Le altre sono sempre visibili e alquanto più larghe: tutte poi sono congiunte ai margini con quelle interrotte. *Ventre* quasi tutto nudo, a base gialla, a tre fascie gialle alternate con altrettante nere, le quali talora sono congiunte più o meno ampiamente tra di loro lungo la linea mediana. *Organi copulatori* maschili gialli. La 4ª vena longitudinale delle ali alquanto meno curva: margine anteriore di esse giallo-pallido. *Piedi* gialli, così pure i femori, talora tendenti alquanto al bruno, non mai neri.

HABITAT. Piemonte. Gli esemplari esaminati provengono dai dintorni di Ivrea nel Canavese, dai contorni di Pesio nelle Valli di Cuneo, dal Colle del Moncenio, dalle valli di Lanzo, dai dintorni di Torino.

C. chrysopolita ROND. (20) p. 199-4; (24), p. 203-7; (26) p. 141.

MAS. — *Corporis longit. millim. 13-14-Abdominis latit. millim. 5-Nigrum, pubescens. Antennis, articulis sub-aequalibus. Oculis sub-hirtis. Thorace fulvo pubescente: scutello flavo macula nigra distinta, pilis longis fulvis instructo. Abdomine oblungo-ovato, sub-nudo, fasciis segmentorum tertii et sequentium extrinsecus conjunctis marginibus flavis antice et postice: fascia marginali tertii segmenti exiliori, quarti latiori. Alis margine antico late lutescente. Pedibus omnino luteis* (tav. fig. 15).

Foemina differt: antennis longioribus, oculis nudis, thorace abdomineque sub-nudis, fasciis exilioribus.

DESCRIZIONE. — Questa specie è assai simile a quella antecedente. Ne differisce per i seguenti caratteri. Rapporti di lunghezza degli articoli delle antenne $1 : {}^{3}/_{4} : 1\,{}^{1}/_{5}$. *Occhi* alquanto più pubescenti. Fascie dorsali dell'*addome* congiunte fra di loro anteriormente e posteriormente lungo i suoi margini, almeno nei segmenti 3°, 4° e 5°; talora quelle del 2° segmento disgiunte,

Digitized by Google

Quasi sempre (nelle femmine) questo segmento addominale manca di fascia marginale e nei casi in cui è presente (qualche maschio) è solo una linea sottilissima: nel 3° segmento essa è più larga, nel 4° è semicircolare, la larghezza sua sorpassa la metà del segmento ed anteriormente ha una piccola intaccatura ad angolo acuto nel mezzo. (tav. fig. 15). Nelle femmine quest'ultima fascia è talora anch'essa sottile o dilatata a triangolo. *Ventre* alquanto peloso alla sua base, giallo con fascie nere, arcuate ai margini posteriori dei segmenti, unite fra di loro più o meno ampiamente lungo la linea mediana o disgiunte. *Ali* largamente giallo-fosche al margine anteriore ed i *piedi* totalmente gialli.

HABITAT. — Italia, Stiria. Rondani ne ebbe dai dintorni di Parma. Degli esemplari da me esaminati taluni provengono dai dintorni di S. Radegunda in Stiria, altri da località alpine del Piemonte.

SINONIMIA. — Il *C. intermedium* Zett. ed il *C. octomaculatum* Curtis, riferite da Loew e da Schiner come sinonimi di questa specie, ne sono invece assai distinte, come vedremo.

C. octomaculatum CURTIS (16) p. 653-5-LOEW (23) p. 612-11. - SCHINER (25) p. 255-10.

MAS. — *Corporis longit. millim. 12-14- Abdominis latit. millim. 4-5.-Nigrum, pubescens. Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace fusco-flavescente piloso. Scutello flavo macula parva nigra distincta, pilis longis instructo. Abdomine oblungo ovato, sub-nudo, fasciis conjunctis marginibus flavis antice et postice: segmento secundo lineola marginali flava, tertio fascia lata, quarto latissima. Alis margine antico tenuiter lutescente. Pedibus omnino luteis.* (tav. fig. 16).

Foemina differt: Statura paulo minore, oculis nudis, antennis longioribus, thorace scutelloque sub-nudis, abdominis fasciis omnibus latioribus.

DESCRIZIONE. — Questa specie fu identificata col *C. chrysopolita* Rond., giacchè per verità essa le è somigliantissima, non tanto però che non si possa ritenere a parer mio come una specie distinta. Eccone i caratteri differenziali. Rapporti degli articoli delle *antenne*: $1:{}^{3}/_{4}; 1$. *Occhi* più pelosi sebbene brevemente nel maschio; nella femmina affatto nudi. *Torace* coperto di peli assai più fitti e più lunghi di color giallo alquanto fosco; macchia

Digitized by Google

nera dello scudetto alquanto più piccola specialmente nelle femmine. *Adddome* quasi glabro con due ciuffetti di peli lunghi, giallo-bianchicci sui fianchi alla sua base; quasi sempre tutte le fascie dell'addome congiunte fra di loro ai margini, di modo che ha un contorno quasi continuo giallo. Il secondo segmento ha sempre una fascia marginale sebbene sottile, il terzo una più larga nel mezzo e con un'intaccatura ad angolo acuto; quella del quarto è larga, semicircolare e senza intaccatura. Caratteri distintivi maggiori si vedono nelle femmine. In esse le fascie dell'addome sono tutte più larghe. La fascia marginale del 2° segmento addominale è più larga che non nei maschi, quella del 3° oltrepassa in larghezza la metà del segmento, e quella del 4° è larghissima ed è separata da quella interrotta che le sta dinanzi da una sottil linea nera ad arco. Il quinto segmento è nei due sessi quasi completamente giallo e le sue fascie, ampiamente congiunte insieme sui margini posteriori, sono appena separate da una sottilissima linea nera (tav. fig. 16). Tanto nei maschi quanto nelle femmine il margine anteriore delle ali è strettamente di un giallo molto chiaro.

Il Curtis pone questa specie nel gruppo di quelle che hanno gli occhi nudi: ciò è improprio affatto e arguisco che quell'autore abbia fatto la sua descrizione sopra esemplari femmine, come del resto ci comprova ancora la figura da lui datane che è appunto di una femmina.

HABITAT. — Inghilterra, Svezia, Francia, Austria, Italia. Gli esemplari da me esaminati provengono dai dintorni di Torino e di Bra.

C. vernale LOEW (17)-459; (23) p. 612-10; SCHUMMEL (18) p. 118; ZETTESTEDT. (19)-p. 637-6; ROND. (24) p. 204-10 SCHINER (25) p. 255-9.
C. collinum ROND. (24) p. 202-5.

MAS. — *Corporis longit. millim, 12-13- Abdominis latit. millim. 5-6 - Nigrum. Antennis articulis inaequalibus. Oculis sub-hirtis. Thorace flavo pubescente. Scutello flavo, macula nigra distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine lato, arcuato, sub-rotundo, glabro, fasciis quatuor flavis arcuatis interruptis, a lateribus paulo remotis: apice flavo. Ventre subnudo, fasciis duabus flavis interruptis. Genitalibus nigris. Alis margine antico flavo, stigmate nigricante. Pedibus flavis, femoribus anticis et mediis basi nigris* (tav. fig. 17, 18).

Foemina differt: statura interdum majore, abdomine latiore antennis longioribus, oculis nudis, thorace scutelloque sub-nudis, abdomine glabro.

DESCRIZIONE. — S'assomiglia per la colorazione del torace e della faccia alle altre specie da cui differisce poi per i seguenti caratteri. Proporzioni degli articoli delle *antenne* $1:{}^{5}/_{6}:1\,{}^{1}/_{6}$ nei maschi: $1:{}^{3}/_{4}:1\,{}^{1}/_{4}$ nelle femmine. *Occhi* appena irti di peli brevi, rari, bianchicci. *Torace* e *scudetto* coperti di peli non molto lunghi, gialli; nella femmina quasi nudi. *Addome* assai largo, arcuato e di forma quasi tondeggiante; nudo nelle femmine, glabro nei maschi non che due ciuffi di peli giallo-bianchicci sui fianchi alla base. Le quattro fascie gialle interrotte sono di larghezza costante, non raggiungono i margini dell'addome ed anzi ne sono alquanto distanti: talora, specialmente nei maschi, sul margine posteriore del 3° segmento, e quasi sempre su quello del 4° notasi una sottilissima striscia gialla che appena arriva fino ai margini dell'addome, ma non si congiunge colla fascia antecedente. L'estremità del 5° segmento ha una macchia talora sottile, talora alquanto larga semilunare gialla ed isolata (tav. fig. 17). *Ventre* sparso solo alla sua base di qualche pelo; nero, talora giallo alla radice, con due fascie gialle alla base dei segmenti 3° e 4° più o meno largamente interrotte lungo la linea mediana. (tav. fig. 18). *Organi copulatori* maschili neri. *Ali* a margine anteriore assai largamente giallo ed una macchia nereggiante assai distinta presso il termine della 2ª vena longitudinale: la 4ª vena longitudinale alquanto curva. *Piedi* giallo ferruginosi, la base dei femori anteriori e mediani nera, le tibie posteriori talora con una fascia bruna nel mezzo.

HABITAT. — Svezia, Germania, Francia, Austria, Italia fino alla Sicilia. Gli esemplari che esaminai provengono dai dintorni di Torino e di Valdieri, dalla Francia e da Santa Radegunda nella Stiria

SINONIMIA. — Il *C. collinum* Rond. è forse una variazione di questa specie non credendo sufficienti i caratteri dei primi articoli delle antenne *quasi uguali* e dello scudetto *tutto giallo*, per distinguerlo in una specie propria.

C. festivum LIN. *Musca* (2) p. 986-45; (7) p. 444-94; WALKER (21) p. 264-2; LOEW (17) p. 612-9; SCHINER (25) p. 255-9.

Digitized by Google

Conops festivus Scop. (1) p. 355-964.

Syrphus festivus? Fabr. (3) p. 769-34; (5) p. 430-47; (6) p. 339-54; (8) p. 300-82.

Musca arcuata Deg. (4) p. 125-15.

Mulio arcuatus Fabr. (11) p. 184-3. - Fallén (12) p. 5-2.

C. arcuatum Meig. (13) p. 168-2; Macquart (14) p. 199-2; Scummel (18); Fetterstedt (19) p. 636-4; Rondani (20) p. 201-7; (24) p. 203-9.

C. intermedium Meig. (13) p. 169-3.

Mas. — *Corporis longit. millim. 13-15-Abdominis latit. millim. 5-6 - Nigrum. Antennis articulis aequalibus, arista flavescente. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso. Scutello flavo macula nigra distincta, pilis longis nigricantibus instructo. Abdomine glabro, oblongo nigro fasciis quatuor arcuatis interruptis flavis a lateribus paulo remotis, apiceque flavo. Ventre sub-nudo, fasciis duabus flavis interruptis. Alis macula stigmaticali nigricante. Pedibus totis luteo-ferrugineis.* (tav. fig. 19).

Foemina differt: corpore exiliore, nudo, antennis longioribus, oculis nudis, thorace, scutello abdomineque nudis.

Varietas: **tomentosa** mihi. *Oculis sub-hirtis, antennis articulis sub-aequalibus thorace scutelloque pilis brevioribus flavis munitis, statura interdum minore.*

Descrizione. — Sebbene assai simile al *C. vernale* se ne distingue per vari caratteri. Proporzioni degli articoli delle antenne: 1 : 1 : 1 fuorchè nella varietà *tomentosa* in cui sono all'incirca $1 : {}^3/_4 : 1$. L'ultimo articolo è alquanto elissoidale. *Occhi* coperti di peli assai più lunghi e più fitti, fuorchè nella varietà accennata. Peli che coprono il *torace* più lunghi assai, di color fulvo e quelli dello *scudetto* quasi nereggianti. *Addome* glabro anch'esso con due soli ciuffi di peli lunghi bianchicci sui fianchi, con quattro fascie gialle, arcuate interrotte, e l'apice macchiato di giallo a mezzaluna più o meno larga; talora specialmente nei maschi sul margine posteriore del 3° e 4° segmento una linea sottilissima gialla che non raggiunge i margini dell'addome (tav. fig. 19). *Ventre* nero, sparso alla base di peli, con due fascie gialle di cui la seconda largamente interrotta: base gialla. *Piedi* interamente giallo-ferruginosi. *Capo* della femmina interamente nudo.

Digitized by Google

Habitat. — Svezia, Inghilterra, Francia, Germania, Austria, Italia. Molti degli esemplari che esaminai provengono dalle regioni alpine del Piemonte come dai dintorni di Alagna in Valsesia, da quelli di Valdieri nelle valli di Cuneo, da Ceresole in Val dell'Orco: alcuni poi da Santa Radegunda in Stiria.

Sinonimia. — D'accordo con Loew e per le ragioni da lui citate (Vedi 17-p. 615) io credo che la *Musca festiva* descritta da Linneo si riferisca al genere *Chrysotoxum* Meig. e non al gen. *Doros* Meig. Ciò posto tale specie, assai bene descritta dal naturalista svedese, e attribuita poi da Fallén, da Meigen e da molti altri ditterologi al secondo dei due generi ora detti, è da riferirsi ora alla specie descritta da quelli col nome di *C. arcuatum*. La sinonimia stabilita da Linneo col *Conops festivus* Scop. è giusta, ma erronea affatto quella colla *Musca festiva* di Degeer la quale appartiene al gen. *Doros* Meig. La *Musca arcuata* Deg è sinonima della *M. festiva* Lin. e non della *M. arcuata* Lin. come Degeer riferisce. Le diagnosi date da Fabricio del suo *Shyrphus festivus* sono talmente vaghe che possono benissimo addirsi a questa specie, ma è pure erronea la sinonimia da lui citata colla *Musca festiva* Deg. Il *Mulio arcuatus* descritto da Fabricio concorda coi caratteri di questa specie ed è posto in sinonimia col *C. arcuatum* di Meig. il quale evidentemente si riferisce alla *Musca festiva* di Linneo. Viene quindi il dubbio che molto probabilmente il *Syrphus festivus* di Fabricio sia piuttosto anch'esso da riferirsi al gen. *Doros*. Quanto al *C. intermedium* Meig. sono convinto non essere una specie distinta, ma una semplice variazione individuale, in cui il 2°, 3° e 4° segmenti addominali hanno una sottile striscia gialla al loro margine posteriore. la macchia apicale del 5° alquanto più larga, e la chiazza nereggiante stigmaticale delle ali alquanto più larga. Ciò ammesso la descrizione datane dal Meigen concorda pure colla figura annessa.

C. fuscum n. sp.

Mas. — *Corporis longit. millim.* 13-14. *Abdominis latit. millim.* 5. *Nigrum, pilosulum Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso. Scutello flavo, macula nigra parva. Abdomine pubescente, ovato, fasciis quatuor arcuatis, interruptis, flavis, a lateribus paulo remotis, apice flavo. Ventre basi et fasciis duabus flavis interruptis. Alis*

Digitized by Google

macula stigmaticali nulla, venis marginibus fuscis. Pedibus ferrugineis, femoribus omnibus basi nigris.

Foemina differt: antennis longioribus, oculis nudis, corpore nudo, abdomine lato, arcuato, femoribus ima basi nigra.

VARIETAS: **vernaloides** mihi: *alis margine antico fusco lutescente, venis marginibus non fuscis.*

DESCRIZIONE. — Questa specie, la quale sebbene somigliante al *C. vernale* Loew ho creduto di separare in una distinta, ne differenzia per i seguenti caratteri. Rapporti degli articoli delle antenne: 1 : 1 : 1 $^{1}/_{6}$ nei maschi e nelle femmine 1 : $^{4}/_{5}$: 1 $^{2}/_{3}$. *Occhi* irti di peli nericci, numerosi e assai lunghi: quelli del *torace* molto fitti, lunghi, di color fulvo, così quelli dello *scudetto*, nella maggior parte dei casi nereggianti. *Addome* ovale, arcuato, quasi glabro; talvolta oltre alle fascie gialle come nel *C. vernale* anche due linee sottilissime al margine posteriore del 3° e 4° segmento. *Ventre* quasi nudo, con peli lunghi sparsi dalla sua base fin verso la metà circa. *Organi copulatori* maschili neri. *Piedi* ferruginosi; *femori* tutti o ferruginoso-nereggianti o neri dalla loro base fin verso la metà, specialmente i posteriori; tibie di un bel giallo citrino, ferruginosi i tarsi. *Ali* a margine anteriore molto largamente ed intensamente giallo-fosco, in generale tutte offuscate, perchè tutte le vene hanno il loro bordo contornato da una zona assai larga di color giallo fosco.

La varietà *vernaloides*, assai costante, si può dire veramente l'anello di congiunzione del *C. vernale* con questa specie, avendo in comune col primo i caratteri delle ali a vene limpide e dei femori a base nera e col secondo tutti gli altri.

HABITAT. — Piemonte. Si può dire una specie quasi schiettamente alpina: gli esemplari assai numerosi, così della specie, come delle varietà, che ebbi ad esaminare provengono tutti da regioni alpine, molti dai dintorni di Valdieri, altri dal colle del Moncenisio.

C. lineare ZETTERST. (19) p. 639-8; LOEW (17) p. 611-7. SCHINER (25) p. 255-8.
Mulio linearis FALL. (12) Suppl. p. 8.

MAS. — *Corporis longit. millim.* 9-10. *Abdominis latit. millim.* 4:4 $^{1}/_{2}$. *Nigrum, pubescens. Antennis articulis inaequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo pubescente, scutello flavo macula lata, nigra, distincta. Abdomine ovato, glabro, fasciis*

Digitized by Google

quatuor flavis, exilibus, interruptis, a lateribus paulo remotis. Ventre nudo, fasciis duabus flavis interruptis. Alis macula stigmaticali fusca, non nigricante. Pedibus flavis, femoribus basi nigris.

Foemina distincta: antennis longioribus, oculis et toto corpore nudis, abdomine sub-lineare.

Descrizione. — Questa specie dapprima descritta da Zetterstedt ha molta affinità con le tre ultime specie descritte, a cui si assomiglia per i disegni e le macchie del corpo. Tuttavia i caratteri seguenti sono distintivi. Anzitutto statura assai minore e, nelle femmine specialmente, forma del corpo assai snella e sottile. Rapporti degli articoli delle *antenne:* nei maschi $1 : {}^{3}/_{4} : 1\ {}^{1}/_{2}$ e nelle femmine: $1 : {}^{1}/_{2} : 1\ {}^{3}/_{4}$. Peli degli occhi in proporzione assai lunghi e molto fitti, quelli del torace fulvi e quelli dello scudetto assai lunghi e nereggianti. Fascie dell'*addome* sottili, gialle, quasi rettilinee sul mezzo dell'addome, curve verso i margini e distanti alquanto da questi. *Organi copulatori* maschili neri e muniti di qualche pelo. *Ali* con vene a contorni limpidi ed il margine anteriore ferruginoso intenso colla parte stigmaticale non nereggiante ma alquanto più fosca: la 4ª vena longitudinale è alquanto curva. *Piedi* gialli; base dei femori anteriori e medii nera, così talora anche quella dei femori posteriori.

Habitat. — Svezia, Germania, Francia, Ungheria, Stiria, Italia (Piemonte).

C. bicinctum Linn. *Musca* (2) p. 985-38; (7) p. 439-87. Deg. (4) p. 126-16. Schrank (10) III, 2413.
Syrphus bicinctus Fabr. (3) p. 767-21; (5) p. 427-30; (6) p. 337-34; (8) p. 293-54. Panz. (9) 4, 18.
Mulio bicinctus Fabr. (11) p. 183-2; Fallén (12) p. 6, 5.
C. bicinctum Meig (13) p. 168-1. — Macq. (14) p. 198-1; (15) p. 489-1: Zetterst. (19) p. 638-7. — Rondani (20) p. 202-9; (24) p. 205-12 — Valker (21) p. 264-1; Loew (23) p. 613-14; Schiner (25) p. 254-255-6.
C. tricinctum (var.) Rond. (20) p. 201-8; (24) p. 204, 11.

Mas. — *Corporis longit. millim.* 11-12. *Abdominis latit. millim.* 3-4. *Nigrum, pubescens. Antennis articulis inequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo pubescente, scutello nigro, margine postico flavo. Abdomine glabro, sub-lineare, fasciis duabus flavis latis in secundo et quarto segmento. Alis macula*

Digitized by Google

stigmaticali lata nigricante. Pedibus flavis, femoribus nigris. (Tav. fig. 20).

Foemina distincta: antennis longioribus, oculis et toto corpore nudo.

VARIETAS: **tricinctum** Rond: *pedibus flavis.*

DESCRIZIONE. — Questa specie simile alle altre antecedenti per quanto riguarda la colorazione ed i disegni di tutto il corpo, ne differisce essenzialmente per la forma e la colorazione dell'addome. Proporzioni degli articoli delle *antenne*: 1 : $^3/_4$: 1 oppure 1 : $^4/_5$: 1. *Torace* e *occhi* sempre pubescenti nei maschi, nudi nelle femmine. *Addome* nudo nelle femmine, glabro nei maschi; due fascie gialle larghe nel 2° e nel 4° segmento; la prima quasi sempre appena interrotta e rilevata raggiunge sempre i lati dell'addome, la seconda continua o interrotta talvolta è in qualche caso poco distante dai margini laterali. Il 3° segmento addominale ha talora una sottilissima fascia arcuata interrotta che si unisce lateralmente con una linea sottilissima marginale posteriore: talora mancano o sono pochissimo visibili. Il 5° segmento ha pure una fascia sottilissima arcuata interrotta, sempre visibile. *Ventre* nero a base gialla, con una fascia larga gialla alla base del 3° segmento, che si prolunga alquanto sul margine adiacente del 2°. *Piedi* gialli con tarsi ferruginosi e femori quasi interamente neri. *Ali* a margine anteriore fosco con una macchia stigmaticale nereggiante o nera grande, che si estende dalla base della 3ª vena longitudinale fin presso alla estremità della 2ª: in larghezza non oltrepassa la 4ª vena longitudinale.

HABITAT. — Tutta l'Europa ed anche il Nord-America, secondo Loew. Comunissimo. Degli esemplari esaminati da me, 20 provengono da Santa Radegunda in Stiria altri da località alpine del Piemonte.

SINONIMIA. — Avendo avuto occasione di esaminarne 52 esemplari sono convinto che la specie descritta da Rondani col nome di *C. tricinctum* devesi solo considerare come varietà essendo troppo incostanti i caratteri da lui citati come distintivi. La specie d'altronde è variabilissima così per mole, come per colorazione, per disegno del corpo e per proporzione degli articoli delle antenne.

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA.

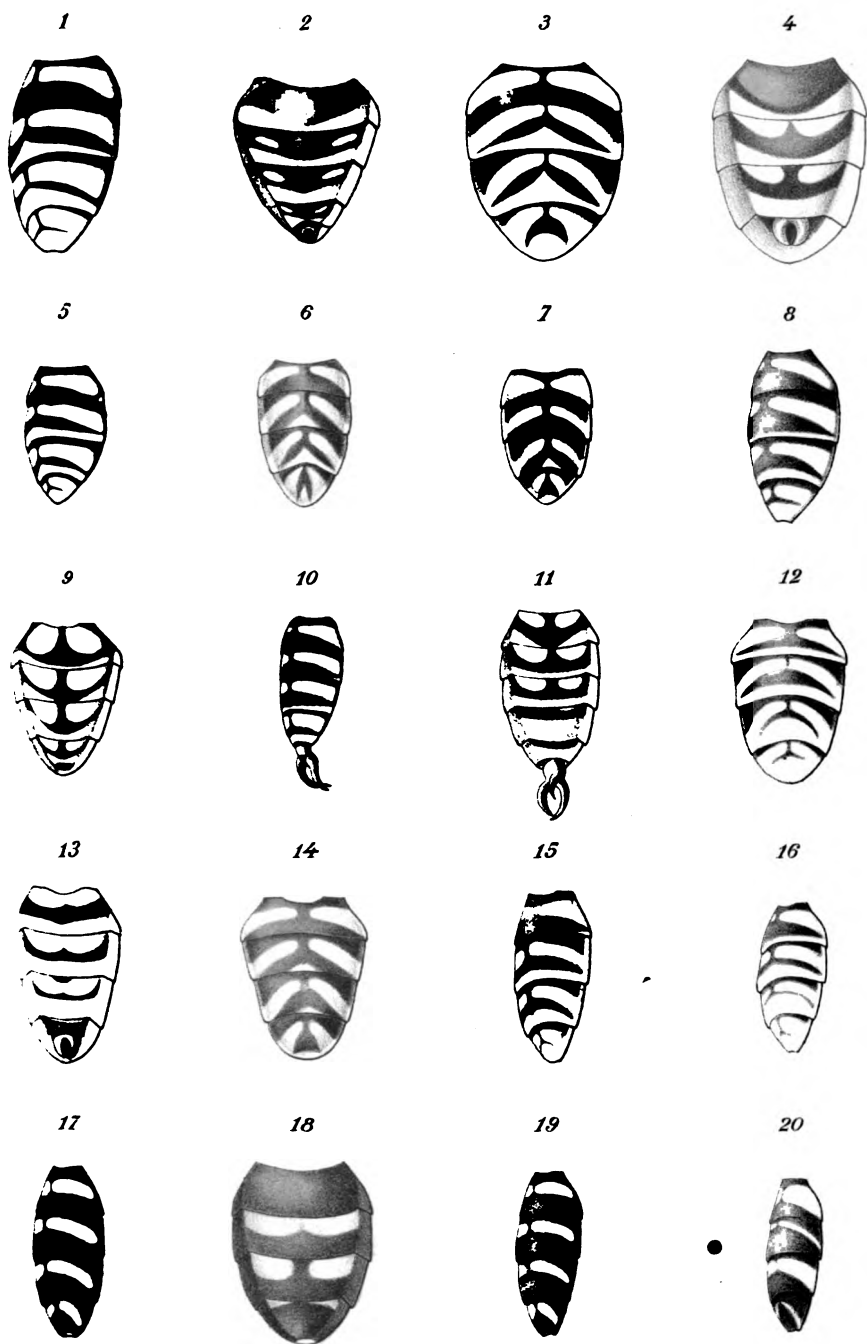
1. Scopoli J. A. *Entomologia carniolica*, Vindobonae, 1763.
2. Caroli a Linné *Systema naturae*. Tom. I, part. II, Holmiae, 1767 (Editio duodecima reformata).
3. Jo. Chr. Fabricii *Systema entomologiae*. Flensburgi et Lipsiae, 1775.
4. Degeer Ch. *Memoires pour servir à l'histoire des insectes*. Tom. VI, Stockholm, 1776.
5. Jo. Chr. Fabricii *Species insectorum*. Tom. II. Hamburgii et Kilonii, 1781.
6. Jo. Chr. Fabricii *Mantissa insectorum*. Tom. I. Hafniae, 1787.
7. Caroli Linnei *Entomologia, faunae suecicae descriptionibus aucta*. Tom. III. Lugduni, 1789.
8. Jo. Chr. Fabricii *Entomologia systematica*. Hafniae. Tom. IV, 1794.
9. Panzer D. Fr. *Faunae insectorum germanicae initia*. Nürnberg, 1796.
10. Schrank. *Fauna Boica*. Nürnberg, 1804.
11. Jo. Chr. Fabricii *Systema Antliatorum*. Brunsvigae, 1805.
12. Fallén C. F. *Diptera Sueciae*. Vol. I. Syrphici.-Lundae. 1814-1827.
13. Meigen Joh. Wil. *Systematische Beschreibung der bekannten europaeischen zweifluegeligen Insekten*. Th. III. Hamm, 1822.
14. Macquart. *Insectes diptères du nord de la France*. Tom. IV. Lille 1829.
15. Macquart. *Histoire naturelle des Insectes*. Tom. I. Paris, 1834.
16. Curtis John. *British entomology*. Vol. III. London, 1823-1840.
17. Loew Herm. *Ueber die Gattung Chrysotoxum*, in Stett. entom. Zeit., 1841, Tom. 2°.
18. Schummel Th. E. *Verzeichniss und Beschreibung der bis jetz in Schlesien gefangenen Zweifluegler der Syrphen Familie* in: Arb. schles. Gesels. f. vaterl. Kultur, 1841.

Digitized by Google

Tav. II.

E. Giglio-Tos dis dal vero.

Lit. Salussolia - Torino

Digitized by Google

19. ZETTERSTEDT JOH. WIL. *Diptera Scandinaviae disposita et descripta*. Tom. I. Lundae, 1842.
20. RONDANI C. *Species italicae generis Chrysotoxi*, ecc.: in Ann. de la Soc. entomol. de France. 2. Ser., Tom. III, 2. trim., 1845.
21. WALKER FR. *Insecta Britannica, Diptera*. Vol. I. London, 1851.
22. — *Insecta Saundersiana*. Vol. I. London, 1856.
23. LOEW HERM. *Die europaeischen Arten der Gattung Chrysotoxum* in: Verh. des zool.-botan. Vereins in Wien. Band VI, Iahr. 1856.
24. RONDANI C. *Dipterologiae italicae prodromus*. Vol. II. Parmae, 1857.
25. SCHINER J. RUD. *Fauna Austriaca. Diptera*. Wien, 1860.
26. RONDANI C. *Diptera italica non vel minus cognita* in: Atti dolla Soc. ital. di scienze naturali Vol. VIII. 1865, Milano.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

1. Addome di *C. fasciolatum* DEG. ♂ (dorso visto di 3/4).
2. » » » ♂ (ventre).
3. » » *C. Lessonae* mihi ♂ (dorso).
4. » » » ♂ (ventre).
5. » » *C. hortense* MEIG. (dorso visto di 3/4).
6. » » *C. italicum* ROND. (dorso).
7. » » *C. cisalpinum* ROND. (dorso).
8. » » *C. arcuatum* PANZ. ♀ (dorso visto di 3/4).
9. » » » » » ♀ (ventre).
10. » » *C. lubricum* mihi ♂ (dorso visto di 3/4).
11. » » » » » ♂ (ventre).
12. » » *C. Sackeni* mihi ♂ (dorso).
13. » » » » » ♂ (ventre).
14. » » *C. elegans* LOEW ♂ (dorso).
15. » » *C. chrysopolita* ROND. ♀ (dorso di 3/4).
16. » » *C. octomaculatum* CURT. ♀ (id.).
17. » » *C. vernale* LOEW ♀ (dorso di 3/4).
18. » » » » » ♀ (ventre).
19. » » *C. festivum* LINN. ♂ (dorso di 3/4).
20. » » *C. bicinctum* LINN. ♂ (dorso di 3/4).

Digitized by Google

RELAZIONE sulla Memoria « *I Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*. PARTE VIII. Galeodoliidae. Doliidae, Ficulidae e Naticidae », del Dott. FEDERICO SACCO.

Nella Memoria che la Classe ci ha incaricato di esaminare. l'Autore continua lo studio dei Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria, studio che iniziato, come è noto, dal compianto collega prof. L. Bellardi venne già in parte proseguito dallo stesso dott. F. Sacco.

La parte VIII presentata ora dal predetto Autore per la stampa nei volumi delle Memorie accademiche, comprende lo studio dei Molluschi delle seguenti quattro famiglie: *Galeodoliidae, Doliidae, Ficulidae, e Naticidae.*

La famiglia delle *Galeodoliidae* viene istituita qui per la prima volta dall'Autore. Questa nuova famiglia comprende il genere *Eudolium* con cinque specie del quale due sono nuove.

La famiglia delle *Doliidae* comprende il genere *Malea.*

La famiglia delle *Ficulidae* comprende due generi: genere Ficula con sette specie delle quali tre sono nuove e il genere *Fulgoroficus* istituito qui per la prima volta dall'Autore come una divisione dell'antico genere *Ficula*. L'Autore forma pure il sottogenere *Fusoficula* per le specie a spira molto alta e fusiforme.

La famiglia delle *Naticidae* comprende tre generi divisi ciascuno in vari sottogeneri e ricchi di numerose forme specifiche. In questa famiglia vengono istituiti parecchi nuovi sottogeneri e vengono descritte come nuove nove specie.

L'Autore descrive poi per quasi tutte le specie studiate numerose varietà e sottovarietà nuove.

Digitized by Google

A tale proposito i sottoscritti notano una tendenza ad un frazionamento, talvolta eccessivo, delle forme nella costituzione delle *sottovarietà*. Le sottovarietà essendo divisioni tassonomiche di valore troppo poco definibile, il costituirne troppe in una data specie, finisce per rendere talvolta incerta la stessa diagnosi specifica. I sottoscritti quindi credono che sarebbe, nella maggior parte dei casi, più conveniente venissero rese un po' più comprensive le diagnosi delle *varietà*.

Per quanto riguarda lo schema delle sinonimie, e delle diagnosi specifiche, l'Autore ha seguito come nelle precedenti Memorie quello adottato dal Bellardi. L'Autore indica inoltre per ciascuna forma la località e l'orizzonte geologico di rinvenimento.

Al lavoro vanno unite due tavole nelle quali sono figurate le forme nuove descritte nel testo.

Il lavoro del dott. Federico Sacco affidato al nostro esame è condotto con molta diligenza e costituisce un ottimo contributo alla conoscenza dei Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria ed è degna continuazione dell'opera intrapresa dal compianto prof. L. Bellardi; perciò i sottoscritti ne propongono la lettura alla Classe, e, qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

LORENZO CAMERANO, *Relatore*.
G. SPEZIA.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 7 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Fabretti, Vice-Presidente dell'Accademia, Flechia, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Pezzi, Ferrero, Carle, Nani, Cognetti, Graf, e Peyron che fa le veci del Segretario, Senatore Gorresio, assente per mal ferma salute.

Si legge l'atto verbale dell'Adunanza del 29 giugno 1890 che è approvato.

È presentato alla Classe da parte del Socio non residente Generale Luigi F. Menabrea, nostro Ambasciatore a Parigi, e a nome del Socio Corrispondente Marchese de Nadaillac, l'opuscolo di quest'ultimo che ha per titoto « *Le péril national* »: Paris, 1890, in-8°: ed in cui il dotto autore tratta una grave questione sociale in rapporto alle ultime statistiche delle nascite in Francia.

Il Socio Giuseppe Carle offre alla Classe, e questa accetta con riconoscenza, il dono della seconda edizione della sua opera « *La vita del diritto ne' suoi rapporti colla scienza sociale* » (Torino 1890), e la traduzione spagnuola, prima edizione, della

Digitized by Google

stessa opera, fatta dai Professori H. GINER de LOS RIOS e G. FLORES LLAMAS, dell'Università di Madrid (Madrid, 1885, in-8°).

Il Socio Cesare NANI da parte del Prof. ZDEKAUER offre la seconda parte dell'opera « *Breve et ordinamenta populi Pistorii anni* MCCLXXXIII » (Milano, 1890). Ne espone brevemente il contenuto, e si sofferma a rilevare i pregi dell'introduzione.

Il Socio Ermanno FERRERO presenta da parte dell'autore Vittorio POGGI, Socio Corrispondente dell'Accademia, la parte seconda della monografia « *Albissola, appunti storici ed artistici* » (Savona, 1890). Egli pone in rilievo anche l'importanza di questa seconda parte, e la sua connessione colla prima, e notando i meriti scientifici del collega, ne annuncia in prova una carica recentemente conferitagli dal Ministero nella direzione degli studi archeologici.

È all'ordine del giorno la commemorazione del compianto Socio Vincenzo PROMIS, della quale la Presidenza aveva incaricato il Socio Antonio MANNO. Questi, che ne fu intimo amico e potè così da vicino apprezzarne le doti dell'animo e della mente, riferisce con parole di affetto e l'ingegno e il nobile carattere tradizionale in famiglia, e gli studi e le opere di lui nella storia e nella numismatica, e le virtù del bibliotecario, e la modestia della vita, ridestando insieme con la memoria di Domenico e Carlo PROMIS vivissimo fra i colleghi il desiderio del figlio e del nipote dei due illustri (*).

Da ultimo il Socio Ermanno FERRERO legge una nota storica del Socio Corrispondente Canonico Carlo VASSALLO intitolata: *Un nuovo documento intorno al poeta Gian Giorgio Alione.*

(*) *La commemorazione del Socio* VINCENZO PROMIS *letta dal Socio* ANTONIO MANNO, *verrà pubblicata nel fascicolo seguente.*

Digitized by Google

LETTURE

Un nuovo documento intorno al poeta astigiano Gian Giorgio Alione;

Nota di CARLO VASSALLO,
presentata dal Socio FERRERO

La pubblicazione di parte delle poesie di G. Giorgio Alione fatta a Parigi dal Brunet nel 1836 e dal Delapierre nel 1852, e l'edizione prima della *Macheronea* e poi di tutte le poesie per P. A. Tosi nella *Biblioteca rara* del Daelli in Milano nel 1865 hanno dato luogo a molti scritti intorno al poeta Astigiano, cui il Biondelli (1), trattando del dialetto milanese parlato in una farsa dell'Alione, disse autore del *più antico monumento superstite della letteratura di quel dialetto*. Ma con tutto ciò poco si aggiunse all'intelligenza de' suoi scritti ed alle notizie della sua vita, perchè, nella mancanza di documenti, fondandosi un po' troppo sulla libera interpretazione di quelle poesie, i critici crearono ipotesi fantastiche, le quali erano ben tosto da altre ipotesi soppiantate.

E così, quanto all'Alione, chi ne faceva un medico, chi un avvocato, chi un notaio, chi un poeta spiantato: tutti per altro lo dicevano vittima della S.ª Inquisizione, benchè io nel 1866 dimostrassi che quella persecuzione era una fiaba. Intanto però vennero in luce alcuni documenti, fra cui il primo del 14 gennaio 1517 gli dava una casa in Asti (2). Io lo trovava presente il 22 maggio dello stesso anno come Credendario al Consiglio

(1) V. *Saggio sui dialetti gallo-italici*, di B. BIONDELLI. Milano, Tip. Bernardoni, 1853, parte I, capo V.

(2) V. Ferdinando GABOTTO e Domenico BARELLA, *La poesia macaronica e la storia del Piemonte sulla fine del secolo XV*. Torino, *La Letteratura*, 1888, p. 79.

Digitized by Google

Generale d'Asti (1). Ora nelle Carte Sotteri esistenti presso la R.ª Deputazione di Storia patria in Torino (Vol. XI, n. LX) mi fu dato incontrare un altro documento che gitta qualche luce sulla persona del poeta, chiamandolo nobile ed accennando a beni da lui e da altri Alioni posseduti in Asti poco lungi da S. Maria Nuova. Trovai ancora nei Verbali del Municipio nominato fra i Credendari in due altri anni l'Alione. Per la qual cosa, pubblicando queste notizie, prenderò occasione di dare altre indicazioni che la conoscenza dei luoghi mi mette in grado di somministrare.

Il documento non è originale ma solo una copia autentica di esso fatta, dall'originale in pergamena, nel 1708 dal notaio Alessandro Scipione De Ambrosijs, e ne vedremo appresso il motivo e l'occasione. L'atto originale in pergamena era stato rogato il 7 aprile 1503 dal notaio Stefano Parona nella chiesa di santa Maria Nuova in Asti. Per esso il nobile *Alione degli Alioni*, cittadino d'Asti, espone di aver tenuto in enfiteusi dal R. Padre D. Sigismondo Simoneta protonotario apostolico una pezza di terra sulle fini d'Asti nel luogo detto *dietro monte Rainero* presso le mura della città; alla qual pezza erano coerenti da due parti il fossato della città, gli eredi del nob. Antonieto Pagano, la via vicinale, il *nob. Gian Giorgio Alione* e gli eredi del *nob. Bernardo Alione*, della misura di giornate otto e mezzo, sebbene nell'instr. del 15 dicembre 1492 Rog. Stefano De Veraxijs essa compaia di nove giornate. Aggiunge ch'egli doveva perciò pagare al predetto P. Sigismondo l'annuo canone di otto ducati d'oro *cum pacto franchitandi pro ducatis centum et sexaginta*. Ora, avendo il predetto Padre lasciato per testamento al Monastero di S.ª Maria Nuova i suoi diritti di direttario, l'Alione, come utilitario, cede, guarentendone l'evizione, al Monastero tutti i suoi diritti per cinquantadue scudi del sole *auri boni et justi ponderis*, dei quali gli sono in rogito pagati quaranta in contanti dal Priore e dal Procuratore del Convento, oltre altri 12 che l'Alione dichiara di aver già prima ricevuti. Interviene anche la nobile Paolina, moglie dell'Alione, alla quale

(1) V. C. Vassallo, *Fabrizio Maramaldo e gli Agostiniani in Asti*. Torino, nel vol. XXVIII della *Miscellanea di Storia italiana*, e separatamente presso G. B. Paravia. Torino 1889 — Docum. I, p. 96.

Digitized by Google

tutti i beni del marito erano stati ipotecati per guarentigia dei suoi diritti dotali; ed anch'essa acconsente al contratto. Che fosse nobile l'Alione non era necessario leggerlo in questo contratto, perchè ciò era stato già stampato nella edizione delle sue opere colla data di Venezia 1560; sebbene il suo cognome siasi in essa storpiato in *Arione* (1). Inoltre il Grassi a p. 208 del 2° volume della sua *Storia d'Asti* annovera gli Alioni fra le famiglie illustri d'Asti, e ne accenna Guglielmo vivente nel 1250.

Il Codice Malabaila (Vol. IV, pag. 124), pubblicato dal Sella e dal Vayra, col documento n. 247 ci conduce indietro fino al 1242. Gli Alioni erano nobili non *de hospitio* ma *de populo* come è notato dal Gorrini nella *Storiografia d'Asti*, ed è confermato dallo stesso Codice Malabaila che ci presenta alcuni membri di quella famiglia come *rectores quatuor societatum* le quali erano popolari. Lo stesso si legge in principio degli

---

(1) Non credo per altro che questo sia errore di stampa, perchè riproduce la pronunzia del popolo d'Asti e dei paesi vicini, dove la *l* si cambia generalmente in *r*, come pure si fa, anzi più ancora, a Mondovì. Così in Asti si dicono *amoron* e *amorin* quelli che a Torino suonano *amolon* e *amolin*, nel senso di bottiglione ed ampollina. E lo stesso Alione, senza esservi costretto dalla rima, scrisse (citerò sempre l'edizione del Daelli, come più comune) a p. 100 del vol. X, *trifora* per *trifola*, e *Nicora Spranga* nella farsa omonima. Parmi anzi che quest'*Arione* aggiunga una prova di più a quelle già addotte dal Promis per dimostrare che l'edizione del 1560, anzichè esser fatta a Venezia il cui nome porta in fronte, sia stata fatta a Trino, cioè in luogo non lontano da Asti, ove era perciò facile conoscerne la pronunzia.

Quest'uso mi conduce a spiegare una parola ancor viva nel volgo astigiano, e che si legge nell'Alione, cioè *dercò* (1° 226, 229, 368), la quale nel piemontese (e la registra il Zalli) si pronunzia *dco*, o come la scrive il Ponza *decò* per *anche*. Come *dco* è preceduto dal segnacaso, così lo ha *dercò*, coll'aggiunta dell'articolo per *del co*, mutando solo la *l* in *r*. Questo genitivo è analogo all'uso toscano, come il Corticelli osserva rispondersi *si*, o *di sì* od anche *del si*, e così pure *no*, *di no* o *del no*, citando il *Decamerone*, G. 4, N. 10; G. 1, N. 6; G. 9, N. 1; G. 1, N. 7.

L'aggiunta del segnacaso si fa anche nel *mach* che il popolo pronunzia *dmach*, e tale parmi anche averlo incontrato nell'Alione nel senso di *soltanto*, e che il Biondelli nota pronunziarsi *domà* nei dialetti lombardi. Questo è il *ma che* di Dante (*Inf.*, IV, 26, *et alibi*):

Non avea pianto ma che di sospiri.

E l'Alione scriveva (vol. I, p. 367) *ma che porta* (purchè ella porti); le quali voci sono identiche col *mas que* degli Spagnuoli e dei Provenzali e derivano tutte dal *magis quam* dei Latini.

Digitized by Google

Statuti d'Asti riformati nel 1379, dove fra i sei *sapientes de populo* appare *Cathalanus Alionus*; e fra i riformatori dei medesimi *Gasparonus Alionus* è messo fra i *Capitulatores de populo.*

Da tale stirpe adunque discendeva G. Giorgio Alione; ma per quanto nobile, egli poteva benissimo essere povero in canna, come da alcuni, sebbene contro verità, fu creduto. Esercitava egli qualche professione? Generalmente si risponde di sì. Ma argomentando solo dalla perizia nelle discipline, della quale egli dà saggio nelle sue poesie, si fabbricarono ipotesi le une colle altre contraddittorie; come avverrebbe a chi facesse a Dante professare tutte le scienze e le arti di cui egli si mostra profondo conoscitore nel sacro poema. Chi lo fa andare agli studi in Francia, chi a Pavia. Certamente egli conosceva bene il francese, poichè in quella lingua compose molte delle sue poesie. Egli si serve del Decamerone, cita Dante ed il Petrarca (2°, 65), parla della regina Ancroia (ib. 72), conosce gli autori latini, Lucano, Tullio e Virgilio (2°, p. 80), Plauto e Terenzio (1°, 15); e tuttavia il Zannoni in un libro importante scrisse che egli sapeva poco il latino, sebbene *masticasse un po' il tedesco* (1). L'Alione insomma, senza essere un dotto, aveva una svariata coltura, che sapeva avvivare con molto brio e frizzi pungenti ed acri maldicenze contro preti e frati; e tutto ciò condito di lingua salace e ridondante di frasi e di parole che Cicerone dubitava si potessero, almeno fra persone educate, esprimere coi loro nomi proprii.

Il Brunet, nella *Notice biographique* premessa alla sua bella edizione di Parigi, lo fa avvocato, e si fonda non solo sulla conoscenza dei procedimenti legali di cui egli dà prova nelle sue farse, ma specialmente sul *Conseglio* burlesco che l'autore dà contro *el fornaro de Primello*, dov'egli si segna *N. Jo. Georgius Alionus consultus* (P. 357); ma il Zannoni (ib. p. 82)

---

(1) V. Giov. Zannoni, *I precursori di Merlin Cocai. Studi e ricerche.* Città di Castello, ed. Lapi, 1888, p. 87..... *il latino non era il suo forte: ne sapeva appena quel poco che tutti allora, più o meno, conoscevano.* Per contro F. Gabotto e Dom. Barella nell'operetta accennata (p. 66) ammettono che egli, quanto al latino, *ne aveva un senso abbastanza raffinato.* Quanto al tedesco, il Zannoni probabilmente allude al basso tedesco, perchè infatti fra le poesie dell'Alione ne abbiamo una in fiammingo.

Digitized by Google

dice non solo *vani ed insufficienti, ma grotteschi gli argomenti addotti dal Brunet e dal Gorrini* per fare dell'Alione *un dottore in legge;* e ciò mi pare un po' troppo, tanto più che il Gabotto ed il Barella (loc. cit., pag. 68) osservano assai bene che egli mostrava anche di conoscere i principali giuristi. Tuttavia questi due autori non conchiudono in quel senso arrestati dai versi mordaci che l'Alione scrisse contro i giudici ed i procuratori (pellucau), ed inclinano a crederlo notaio per aver trovato nella biblioteca del Re in Torino una lista di notai Astigiani del quattrocento, nella quale è segnato un Giorgio Alione (pag. 69). Il che si conferma dalla firma apposta dal poeta al citato *Conseglio*, dove la lettera N. meglio che per *Nobilis* pare si debba interpretare come iniziale di *Notarius*. A questa ipotesi adunque, in mancanza di meglio. per ora si può fare buon viso. Ma così non pare al Zannoni, il quale si fonda principalmente sul *Prologo de lauctore:*

Ne vorrea za chautrui pensas
Che chiel fus poeta ni doctour.

Ma forsechè l'Alione negava sul serio di essere poeta? forsechè in Piemonte per *Dottori* non si intendono i *medici?* In sostanza il Zannoni scrive (p. 83), *che la professione dell'Alione non fu che la poesia: egli visse come in quei tempi fortunosi vivevano i poeti, riducendo a mestiere di bassa corte quella che era stata l'arte grande del secolo* XIV. *Povero di patrimonio...* E per provare la sua asserzione cita l'*Introito* alla farsa del *Bracho e del Milaneiso*, dove, al suo parere. l'Alione, facendo parlare il buffone, allude evidentemente a sè stesso, scrivendo (1° p. 292):

Mi n'eu an regester vigna nè prà,
Ni cà ni teg, ni gran da vender.

Ma la cosa è tutt'altro che evidente, poichè dai pochi documenti che abbiamo possiamo conoscere che il poeta aveva casa e beni in Asti; onde deduciamo che, se non lo si può dire molto ricco, è almeno cosa arbitraria il chiamarlo povero, tanto più che il suo libero modo di scrivere ci fa argomentare in lui una certa agiatezza che gli conferisse una perfetta indipendenza da ogni soggezione.

Questa libertà nello scrivere, secondo la tradizione, fu per lui causa di sventura. E la sventura fu veramente grande, se

Digitized by Google

stiamo al Quadrio, al Mazzucchelli, al Tiraboschi ed al Vallauri, e specialmente al Brunet, il quale rincarò la dose con tal descrizione da impietosire i sassi (1). Secondo costoro adunque il poeta per la sua sfrenata libertà nel mettere in burla e clero e buoni costumi fu processato dall'Inquisizione e tenuto per lunghi anni in carcere a pane ed acqua, e non potè uscirne che facendo umile ammenda de' suoi errori. Ma vi ha una difficoltà ed è che tutto questo racconto non ha altro fondamento che la prefazione del tipografo Virgilio Zangrandi alla sua edizione castigata fatta in Asti nel 1601; la qual prefazione fu integralmente riprodotta dal Daelli nel 1865. Il che mi porse occasione di scrivere nel 1866 due articoli sul *Cittadino* d'Asti, riprodotti poi a parte, dove osservai che il Zangrandi, o chi per esso, scriveva da secentista, e più ancora professava di essersi *messa la maschera e di parlare in nuvoli*, quando nel 1601 restituiva ai concittadini l'Alione *ringiovanito, vestito di nuovo alla moderna, riformato nella vita e nei costumi*. Il che intesero ed espressero poi assai bene nel 1888 a pp. 55-57 del loro libro il Gabotto ed il Barella; poichè, sebbene l'Alione non compaia nell'elenco dei libri proibiti, non è da dimenticarsi che questo elenco fu solo ordinato dal Concilio di Trento, ed eseguito poscia dai Romani Pontefici: ed infatti l'Indice fu pubblicato da P. Pio IV con molte regole, ed a quello ed a queste aggiunse un'appendice P. Clemente VIII, senza contare l'opera dei loro successori Quando adunque al Zangrandi cadde in pensiero di fare una seconda edizione astigiana delle poesie dell'Alione, dovette invocare il Permesso dei Superiori (che appare veramente nel suo volume), e questi lo negarono finchè il libro non fu emendato in quanto conteneva di più ingiurioso contro la Chiesa e gli ecclesiastici (2). Ecco tutto. E ve ne ha quanto basta, perchè il Concilio di Trento e la creazione dell' Indice col divieto di non istampare senza il Permesso dei Superiori bastano a spiegare la prefazione del Zangrandi e tutta la sua allegoria da secentista. Chi vuole ancora sostenere e processo e prigionia parmi debba addurre prove

(1 Vedi la *Notice biographique* del Brunet nell'edizione di Parigi a p. 13, in quella del Daelli a p. 11.

(2) Il che non toglie che l'Alione, secondo l'uso di quei tempi, componesse anche quattro *Louanges* in onore di Maria Vergine, ed un'altra in lode di Santa Caterina, come si vede nel vol. II, p. 94 e segg.

Digitized by Google

anteriori, od almeno non attinte o derivanti da quella prefazione.

Per chiarire meglio la cosa occorre stabilire a un di presso il tempo in cui visse l'autore. Si pose la sua nascita circa l'anno 1460. Infatti egli già poetava nel 1494 nella calata di Carlo VIII. L'ultima data che in ordine di tempo lessi nelle sue poesie è quella del 1515 (2°, p. 85). I documenti lo fanno ancora vivente nel 1517; ed è probabile che egli spirasse ancora le dolci aure vitali nel 1521 quando si fece la prima edizione de' suoi scritti col *Prologo de lauctore;* ma il farlo vivere in carcere a pane ed acqua sino al 1601 come scrisse il Zangrandi, e poi farnelo ancora uscire ad allietare colle sue facezie gli amici, la è cosa che passa ogni verosimiglianza (1).

Gli è vero che il Brunet mostra di separare la data del 1601 dalla sventura dell'Alione, credendo questa avvenuta innanzi (pagina 12 dell'edizione di Parigi, p. 10 dell'edizione di Milano). Ma gli altri non fecero nemmeno questa distinzione, la quale del resto non ha alcun valore, perchè il Zangrandi parla unicamente del 1601, e se questa data è, come è realmente, impossibile, cade tutto il racconto e si risolve in una mera allegoria da secentista.

Dopo avere di ciò scritto, come già dissi, nel *Cittadino* d'Asti fino dal 1866, vi ritornai sopra nel 1878 nell'*Archivio storico italiano* (2); e mi reputava abbastanza felice d'avere incontrato il comune gradimento, quando a pag. 91 dell'opera citata del Zannoni vidi messa in dubbio la mia conclusione. Ma, a dire il vero, credo che questi abbia conosciuto solo indirettamente quanto io scrissi su tale proposito, perchè altrimenti non mi avrebbe fatto dire (loc. cit. in nota), che io non nego che il *poeta sia stato perseguitato e magari privato della libertà.* No, mio signor Professore, io non scrissi mai questo, anzi sostenni che l'Alione *non ebbe mai nulla a fare* cogl'Inquisitori, e visse e morì

(1) F. Gabotto e D. Barella (op. cit.) discutono assai bene in nota alla p. 64 il pro ed il contro intorno al dubbio se l'Alione fosse ancora fra i viventi nel 1521. Io nel mio *F. Maramaldo*, ecc., a p. 35 in nota, scrissi che un *Giorgio Alion era intratto nella Compagnia del Sacratissimo Corpus Domini il* 1 *Junio* 1564, *morto nel* 1685. Ma vi osservai pure che questi sarà stato probabilmente un nipote del poeta.

(2) Vedi Serie IV, C. II, anno 1878, nell'articolo: *Gli Astigiani sotto la dominazione straniera* (1379-1531).

Digitized by Google

tranquillamente in casa sua. Infatti Asti allora, cangiando padrone *dalla state al verno*, aveva ben altro a fare che occuparsi del poeta; e la Chiesa era così combattuta dai nemici esterni che non aveva ancora pensato ad infrenare efficacemente come fece di poi, la maldicenza de' suoi figli e dei tipografi che loro prestavano la mano; tantochè l'abate Gaume nel suo *Ver rongeur* scrisse essere molti ecclesiastici allora caduti in pieno *umanesimo*, ed i Protestanti accusarono, ed accusano tuttora P. Leone X, perchè, ai tempi appunto in cui si rappresentavano in Asti le farse dell'Alione, assistesse in Firenze alla recitazione della *Mandragora* e della *Calandria*, e segnasse un documento in favore dell'Ariosto per guarentirne i diritti d'autore dell'*Orlando furioso*.

Ma gli errori sono, come li chiamava Bacone, idoli, e ci vuol molto a disavvezzarne gli adoratori. Quante volte si è scritto e si scriverà ancora che un altro astigiano di quei tempi, Giovanni Nevizzano, l'autore della famosa *Sylva nuptialis*, dovette fare solenne ammenda delle sue maldicenze innanzi alle Dame di Torino, sebbene mi paia essere stato abbastanza bene dimostrato che anche questa è stata una spiritosa invenzione? Così intorno all' Alione, dopo aver veduto andare in fumo la prefazione del Zangrandi, alcuni insistono ancora nel difenderne il processo e la prigionia; e fra costoro duolmi annoverare il mio giovane collega prof. Delfino Orsi, autore di un libro assai bello: *Il teatro in dialetto piemontese* (1). Ma di ciò non si mostra contento nemmeno il Zannoni in un suo dotto articolo sulla *Coltura* (2); e perciò ha trovato un valente confutatore in Vittorio Rossi (3).

Ma pare che il Zannoni non sia molto felice quando parla del Piemonte, poichè allora cade in molti errori (4).

---

(1) Vedi op. cit. Milano, Tip. C. Civelli, 1890, p. 34.

(2) Vedi *La Coltura*, anno IX, 1890, p. 289.

(3) Vedi il *Giornale della Letteratura italiana* (Anno VI, fasc. 36).

(4) Egli pone Asti a piè delle Alpi (p. 80), come se si trattasse di Saluzzo o Pinerolo. Dice, sulla fede del Brunet, che l'arte della stampa fu introdotta in Asti *soltanto* circa il 1519 da Francesco de Silva (p. 89); il che parmi non si possa più così asseverantemente affermare dopo la pubblicazione dell'opera postuma del Berlan: *L'introduzione della stampa in Savigliano, Saluzzo ed Asti nel secolo XV* (Torino, 1887, Tip. Roux). Cita come autentica in nota alla p. 166 la descrizione dell'assedio di Saluzzo, attribuita a Bernardino Orsello; il che dubito assai possa farsi ancora tranquillamente ai nostri giorni. Vuol

Digitized by Google

Ho lodato finora il bel lavoro dei signori F. Gabotto e D. Barella; ma ciò non m'impedisce di trovare fondate le osservazioni di Bruno Cotronei (1), il quale combatte la loro asserzione, che cioè sotto gli auspici del poeta si fosse dai disciplinanti della *S.ª* ***Annunziata*** d'Asti costituita, ad imagine di quella di Francia e di altre regioni una compagnia *joyeuse* o *des sots*, o *sottie:* sebbene poi il Cotronei, trattando assai bene della sceneggiatura delle farse dell'Alione, cerchi di scemarne il pregio, togliendo loro ogni originalità e facendone tante imitazioni dal francese. Noto ancora che il Cotronei, fondandosi su alcuni passi tutt'altro che chiari dice non solo che *Jan peirorer* è una persona sola coll'Alione, ma aggiunge che forse questo nomignolo era comune a tutta la famiglia dell'autore (p. 12). Il che non mi pare per nulla verosimile, perchè infatti era ed è uso di appiccicarsi nomi faceti fra persone volgari; che questo avvenisse anche al poeta che faceva professione di burlarsi degli altri può ancora passare; ma che tutta una famiglia nobile, agiata e numerosa sia stata in tal modo designata la è cosa che non si può concepire. L'Alione parla sovente di *Jan peirorer*. Veggansi ad es. Vol. I, pag. 62, 188, 222, 243, 254, 279, 295, e lo fa medico o meglio flebotomo aggiungendo avere il medesimo studiato a Parigi; ma è poco probabile che l'autore, il quale suole mettersi poco in mostra, volesse rendersi ridicolo dicendo di avere studiato *ferbottomia* a Parigi, ed accennasse ai *rimedi a cert sue vache*, e così dicasi di altre allusioni inverosimili (p. 279 e 295), massimamente che nel primo di questi passi mette *Jan peirorer* in scena con *Avicenna*, *Ipocras*, *Averrois*, e poi colle donnicciole e coi frati che volevano fare i medicastri.

L'Alione nomina molte persone de' suoi tempi, e specialmente alcuni frati, come fr. Louis, fr. Zan Maria, fr. Agostino, il quale ultimo pare fosse la sua bestia nera. Infatti la parrocchia di S.ª Maria Nuova, sotto cui era posta la sua casa, era retta dai Canonici Lateranensi, i quali erano anch'essi una pro-

---

correggere a p. 167 *injuriam* l'*in duriam* del testo, non conoscendo il significato che questa parola aveva ancora alcuni anni addietro in Torino, dove l'acqua condotta dalla Dora (la *Duria* di Plinio e Claudiano) scorreva a pulire e rinfrescare le vie maggiori, compresa quella che si chiamò *Dora grossa* finchè ha cangiato poco fa il suo nome in quello di *Via Garibaldi.*

(1) V. Bruno Cotronei, *Le farse di G. G. Alione, poeta astigiano della fine del secolo XV.* Reggio-Calabria, 1889, p. 99, *et alibi.*

Digitized by Google

pagine della gran famiglia degli Agostiniani. E colà abitavano anche altri Alioni (1); la qual famiglia appare numerosa da vari documenti, e singolarmente da quello che ora si pubblica, ed anche dal fatto che l'unica volta in cui l'autore scrive quel cognome. cioè nelle due *Cantioni de li disciplinati de Ast*, questo è posto in numero plùrale.

Presso le case degli Alioni esistevano un altro convento di *Agostiniani* (Conventuali) e la confraternita dell'*Annunziata*, dei quali due argomenti parlai in disteso nel già citato mio scritto (*Fabr. Maramaldo e gli Agostiniani in Asti*). E qui appunto nota assai bene il Cotronei che non si possono cangiare quei disciplinanti in una società di persone che recitassero le farse dell'Alione, perchè costoro avrebbero piuttosto rappresentati dei misteri sacri; e del resto pare che l'Alione, benchè poco amico dei frati, tenesse le loro parti, scrivendo in principio della prima *Cantione*, che gli Agostiniani litigarono contro i disciplinanti *non za senza rason*.

Non pare nemmeno che nè nella Confraternita nè nelle case degli Alioni si radunasse una vera accademia, come scrissero l'Aluffi (2) ed il Vallauri (3). Si saranno fatte adunanze di begli umori, questo è probabile; ma da queste ad una vera accademia ci corre un bel tratto; sebbene non si possa negare che la gloriosa Accademia della Crusca abbia avuto origine dalla retrobottega del *Lasca* (lo speziale Grazzini), il quale vi mordeva i pedanti, e mandava a *farsi friggere l'Infarinato* (L. Salviati). e minacciava di cangiare il Ruscelli in una *pozzanghera*.

Comunque sia, troviamo, oltre quella che feci conoscere, cioè nel 1517, due altre volte il poeta registrato fra i *Credendarii* del Consiglio generale d'Asti con intiero il suo nome e cognome. *Jo. Georgius Alionus*, e questo nel 1511, e nel 1515 (4).

(1) Pare adunque che meglio che presso S. Rocco, come si fece, il nome di *Via Alione* dovrebbe trasportarsi tra S.ª Maria Nuova e Monte Rainero.

(2) V. *Memoria letta in occasione del solenne aprimento dell'Accademia Filarmonica scientifico-letteraria della città d'Asti il* 9 *maggio* 1835. — Asti. Tip. Garbiglia, p. 8.

(3) V. *Delle Società letterarie in Piemonte.* Torino, Tip. Favale, 1834 p. 44.

(4) Vedi i verbali municipali nell'Archivio d'Asti: 1511, f. 52, *r;* 1515, f. 99, *v*. — In quei volumi s'incontrano fino dal 1385 *Bernardus Alionus*, *Cathalanus Alionus e Thomas Alionus*. — *Alionus de Alionibus*, che è probabilmente quello del nostro documento, vi appare sovente tra il 1478 ed il 1486. Nell'anno 1478 vediamo notato un *Petrus Alionus*. Ma quello che occorre più sovente (se pure si tratta di una medesima persona) è *Bernardus Alionus*

Digitized by Google

Fra i vicini alle case degli Alioni, come appare dal documento pubblicato dai Signori Gabotto e Barella (p. 79 in nota), erano i Lupi, ad uno dei quali (Baldassare) il poeta indirizzò la sua *Macheronea*, esortandolo, *a nome del padre e del barba*, a farsi *un homum* (p. 150). Anche quella era famiglia numerosa, ed aveva parte importante nei pubblici affari. Nell'atto da me pubblicato (*F. Maramaldo*, ecc., p. 96) insieme con G. Giorgio Alione troviamo fra i Credendari Stefano Lupo ed Henrieto Lupo. Nella mia Nota inserta negli atti della R.ª Accademia delle Scienze su Matteo Prandone (1) s'incontrano a p. 12 *Franciscus Lupus* e *Jo. Gecrgius Lupus;* anzi, secondo altro documento pubblicato nel mio *Maramaldo*, a p. 103 questo *Gio. Giorgio Lupo* è Sindaco, senza parlare di altri (2). Entrambe queste famiglie appaiono sovente nei libri parrocchiali di Santa Maria Nuova, i quali cominciano ai tempi del Concilio di Trento; ma da molto tempo ora sono scomparsi da quei registri, come nessuno di quei cognomi si legge nell'elenco degli elettori d'Asti, sebbene essi ora s'incontrino spesso nell'alto Piemonte. Scomparvero le famiglie colle loro case, anzi col loro borgo che l'Alione designa col nome di *Cavallazzo* o *Cavallone*.

Il poeta accenna sovente a luoghi e persone de' suoi tempi, e perciò i suoi versi devono riuscire in parte più intelligibili in Asti, dove quei nomi o esistono ancora, o sono solo da poco tempo spariti. Sono ancora in piedi, anzi popolate assai le parrocchie di *Sen Pè* e *Sen Pò* (cioè di S. Pietro e S. Paolo; 1°, p. 291), il quale ultimo nome si allungava anche in *San Pol* (p. 259), simile al *Polo* di Dante (*Par.*, XVIII, 136). Tutti sanno che la via di *Sen Quiri* (ib. p. 153) è ora quella che si chiama *Via Cavour*. Il borgo di *S. Marco* era sotto la pre-

dal 1482 al 1539. E credo non si tratti della stessa persona, non solo perchè lo si trova per ispazio troppo lungo di tempo, ma anche perchè nel documento ora in questione appaiono fra altri gli *heredes Nob. Bernardi Alioni.*

(1) *Matteo Prandone difensore d'Asti nel* 1526 *contro Fabrizio Maramaldo.* Nota inserta negli *Atti* della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XXV

(2) Consultando i verbali dell'Archivio Municipale d'Asti, incontrai inoltre tra i Credendari fra gli anni 1471-90 *Felix Lupus*, *Johannonus Lupus* (e questo assai frequentemente), *Jacobonus Lupus*, *Bernardus Lupus*, *Benedictus Lupus*, *Pantaleo Lupus* (anche sovente), *Michelinus Lupus*, *Bernardus Lupus*, *Bernardinus Lupus* negli anni 1492-93; *Segdinus* (Secundinus) *Lupus* nel 1505, *Stefanus Lupus* nel 1506. *Jo. Ludovichus Lupus* nel 1531.

Digitized by Google

sente Madonna del Portone, e lì quasi in faccia, al di là del Borbore, sorgevano gli *Apostoli* (ib.). Io poi ho svelata l'arguzia (vedi p. 20 della nota su Matteo Prandone) del *Grenobis* (1°, 49, 199) per *à notre gré* ad indicare la città di Grenoble da cui dipendeva giudiziariamente Asti, e scopersi nei documenti il significato dell'*andare a Messine* (1° 93, 227, 381-82) (1). E così si dovrà pensare che non senza malizia l'Alione spedisse a *Cornillan* (1°, p. 69) il povero *Zavatino Zovan* a portarvi una lettera del Vicario, sebbene quello non sia nome inventato, perchè *Corniliano* era allora paese dipendente dalla Diocesi d'Asti. A questo modo, per intendere il cenno su Gavi (1°, p. 221) è necessario notare che quel paese era l'emporio del commercio che Asti teneva coi Genovesi, i quali, come scrisse il Grassi, l'avevano ceduto agli Astigiani.

Ma nessuno in Asti ricorda più il borgo del *Cavalacz* (1°. p. 183), o del *Cavalon* (ib. 373), sebbene sia assai utile la conoscenza di quei luoghi per intendere alcuni passi del poeta. Il Grassi (1°, 199), parlando della distruzione di questo e di altri borghi fatta verso il 1530 da Antonio de Leva, dice che per esso si andava alla porta di Monferrato. E così era realmente. Leggendo infatti con un po' d'attenzione la prima *Cantione* citata si vede che fra Zan Maria dovette *per derrer del mure torné a cà da laron* (p. 374); onde si scorge trattarsi di un borgo interno; perchè, lasciando anche che fuori della porta accennata la ripida collina che le sorge di contro avrebbe impedito la formazione di un borgo, fra Zan Maria, se la cosa stesse altrimenti, non avrebbe per tornare a casa dovuto passare *dietro*

---

(1) V. *Fabr. Maramaldo*, ecc., p. 54, *locum infamie in quo habitabant meretrices*. Il nome *de Messinis* è per altro ben più antico, ed ascende a tempi quando non aveva ancora tali inquiline. Poichè fra le prebende canonicali della Cattedrale *ex antiqua fundatione* v'è anche quella di *S. Filippo de Messinis*. E l'antica divisione e denominazione delle prebende fu fatta sotto il vescovo Guidetto, cioè prima del 1219 Onde segue che appunto in quel luogo dovesse sorgere una chiesetta col titolo di *S. Filippo de Messinis*.

In quel libro accennai anche qualche francesismo vigente allora in Asti in fatto di lingua. Qui noto solamente due cose, cioè: 1° che in quanto al francesismo delle opinioni dice assai bene F. Gabotto nel suo scritto: *Francesismo e antifrancesismo in due poeti del quattrocento*, *Panfilo Sassi e Giorgio Alione* (estratto dalla *Rassegna Emiliana*, 1888); 2° che in quanto alla lingua, rileggendo l'Alione vi ho incontrati molti altri francesismi, fra cui quello di *rua* per via ° 360; 2°, 152), che si ode ancora nell'alto Piemonte.

Digitized by Google

il muro, poichè il convento degli Agostiniani Conventuali e la Confraternita dell'Annunziata erano certamente *intra muros* del borgo di Santa Maria Nuova. Il che si prova anche dal nome che rimane a quelle case presso il popolo che le chiama del *Cavallino* (1), sebbene la parte che da S.ª Maria Nuova mira all'antica porta di Monferrato si chiami propriamente *Morinè*, che è corruzione del nome del sovrastante *Monte Rainero*; e la parte che si estende dal quartiere della cavalleria verso la piazza Alfieri sia denominata la *Svizzera* per indicare che in quei dintorni si vive liberamente senza badare gran fatto alle prescrizioni della polizia urbana.

Ma poscia il borgo del *Cavallone* andò cogli altri distrutto per accrescere le fortificazioni d'Asti; e quindi s'intende benissimo, che gli Agostiniani nel 1552 esponessero al Papa, che erano stati demoliti quasi intieramente la chiesa e il convento esistenti *in burgo S.te Marie Nove et non longe a meniis ipsius Civitatis*, e se ne erano usati i materiali *in fabricat. pro parte Castri veteris et pro aliis partibus et propignaculis factis ad defensionem ipsius Civitatis, etc., et in dies minantur paululum ecclesie et domorum extans penitus demoliri* (Vedi il cit. *F. Maramaldo*, ecc. Doc. X, p. 116). Perciò Monsignor A Peruzzi Vescovo di Sarsina nella sua Visita apostolica del 1585 (fol. 108) accennava ancora la chiesa *S. Augustini extra mœnia civitatis in burgo Sanctæ Mariæ collapsa et bellorum iniuria destructa*. Perchè essa chiesa era posta invero *extra mœnia civitatis*, cioè fuori della prima cerchia di mura, ma *intra mœnia* della seconda cerchia la quale cingeva anche il borgo di S.ª Maria Nuova; della quale chiaramente scriveva poi nella sua Visita il 17 febb. 1588 (f. 53, *v.*), Monsignor Panigarola: *parrochia finibus est distincta non familiis, sed extra mœnia non procedit*. Onde avvenne poi che nel 1700 nel *Théâtre des États*

(1) Questo *Cavallino* può essere benissimo una derivazione del *Cavalon;* e ne resta probabilmente anche memoria nella trattoria del *Cavallino bianco* all'ingresso della Via della Cattedrale. Può anche darsi che tal nome provenisse dai cavalli che si presentavano a gara dalle varie confraternite alle corse antiche della festa patronale di San Secondo, come si faceva, anzi si fa ancora a Siena dalle varie *contrade*. Per lo meno conosco documenti, da cui appare che a quelle corse, per mezzo di cavallo e fantino riccamente addobbato e accompagnato, concorrevano le Confraternite della SS. Trinità e dell'Annunziata.

non se ne segnassero più in Asti al n. 31 che poche vestigia col titolo: *Vestigia templi et Cœnobii S. Augustini*. Quindi si capisce come la parrocchia di S. Maria Nuova scemasse assai di numero dopo quella distruzione. Mezzo secolo dopo il Vescovo di Sarsina vi trovava ancora 500 anime (f. 72, *v.*); ma Monsignor Tomati nella sua Visita il 19 apr. 1667 (p. 21) non ve ne rinveniva più che 100, che poi crebbero lentamente sino a 180 sotto Monsignor Milliavacca nel 1695 (V. la sua Visita, p. 157); mentre ora quella parrocchia per le nuove fabbriche fatte verso la Piazza Alfieri conta circa 2000 abitanti.

Nel *Cavallone* adunque sorgeva anche l'antica Confraternita dell'Annunziata attigua a S. Agostino, teatro delle contese fra i disciplinanti e i frati, ed oggetto degli scherzi delle *Cantioni* dell'Alione. Era quella chiesetta secondo il Vescovo di Sarsina (f. 139,r.) *oratorium valde pulchrum fornice sub tecto communitum, et unicum adest altare .. ornatum icona pulchra... aliud altare vidit extra oratorium sub titulo gloriosae Virginis ligneum...* Essa adunque piuttosto che chiesa era detta *oratorium*, e non aveva che un solo altare interno; il che conviene mirabilmente col titolo di *Nuncià petita* datole dall'Alione (ib. pagina 373). Il qual titolo le fu dato probabilmente anche per altro rispetto, per distinguerla cioè dall'*Annunziata grande*, la quale sorse appunto verso il 1500, ed era Monastero delle Canonichesse Lateranensi, rette dai Canonici regolari della parrocchia di S. Maria Nuova (detti poi dall'abito *Rochettini*), i quali le rappresentavano ed operavano in loro favore, *pro nostris monachabus* come si legge nei documenti (1). Ed ho detto *antica* quella chiesa dell'Annunziata, poichè, rovinata anch'essa alla lunga per le stesse cause che quella di Sant'Agostino, fu poi trasferita nel luogo che ora occupa presso la Torre dell'Orologio; perchè *intra muros civitatis*, e perciò luogo più sicuro. Onde Sebastiano Provenzale scriveva verso il 1760, che l'antica Annunziata (la *petita* dell'Alione) *fu fondata nel* 1386 *sotto il Vescovo Francesco nel borgo di S. Maria Nuova poco distante dal quartiere e vicino alla chiesa di S. Agostino vechio ed al prato* (cimitero) *delli Ebrei; e che il* 1 *aprile* 1641 *si deliberò di trasportarla in città sulla piazza della Torre dell'Orologio;*

(1) L'isolato di quel monastero ora accoglie la Pretura, il R. Tribunale, la Corte d'Assisie e l'Archivio notarile.

Digitized by Google

ed ottenuto il consenso del Duca di Savoia e del Municipio d'Asti, *Monsignor Brolia ne benedisse la prima pietra il* 21 *giugno dello stesso anno.*

Possiamo anche con facilità rintracciare il luogo dei beni accennati nel nostro documento, poichè nello stesso volume XI delle Carte Sotteri al n. LX sono con esso insieme cuciti disordinatamente altri fogli, di cui il più antico porta la data del 31 maggio 1671, e l'ultimo del 20 maggio 1716. Vi si parla in tutti di una pezza di terreno, posta *dietro Monte Rainero* dipendente dalla cascina del *Gallarino* propria del Monastero di S. Maria Nuova, dalla qual pezza, che era prima del 1591 di giornate sei, stara uno, tavole 7, era stata dal governo presa, senza dare nè capitale nè interesse, una giornata quando il duca C. Emanuele I eresse il *Forte di S. Pietro.* Negli atti susseguenti si accenna l'occupazione di altra giornata per l'ampliamento delle fortificazioni fatte nel 1705. Laonde, essendosi poi abbattuto il *Forte*, si chiede la restituzione di tutte e due le giornate. Vi si parla ora di *Forte di S. Pietro*, ora del *Fortino*, e pare che talvolta si confondano insieme, talvolta si distinguano. Il *Forte di S. Pietro* nella Carta topografica del 1639 presenta una stella con sei angoli molto acuti; ed in quella del 1700 esso si vede sul cocuzzolo della collina di fronte alla porta del Monferrato o dell'Imperatore, il qual luogo ora appartiene alla signora Galletti nata Grassi. Per contro un po' più abbasso a ponente si trova la cascina del *Fortino*, che fu probabilmente l'ampliazione del *Forte* primitivo, ed ora appartiene alla signora vedova Giovanelli nata Musso.

Vi ha fra quelle carte una dichiarazione dell'Archivista della città Not.° G. Bove in data del 5 luglio 1708, con cui si attesta che il *Forte di S. Pietro con suoi Fossi*, *Tenaglie*, *Parapetti*, *Controscarpe* si ritrovava di giornate cinque, tavole 76, piedi 8; delle quali la maggior parte spettava al signor Agostino Cagna, ed *una giornata al Monastero di S. Maria Nuova*, e ciò oltre *quello gli è stato occupato nelle fortificationi fatte nell'anno* 1705: *p. servitio di S. A. R.* Vi è anche unita una misura triangolata del terreno fatta il 2 luglio 1708 di giornate 3, tav. 62, che è quanto ancor rimaneva al monastero. Ora, se si nota che la copia del documento fatta dal notaio De Ambrosijs porta la stessa data del giorno 2 luglio 1708; che conviene la descrizione dei luoghi; e che tutte queste carte furono cucite

Digitized by Google

insieme sotto lo stesso numero, pare non possa più cader dubbio, che, sebbene la quantità ne sia minore di circa un quarto, si tratti tuttavia del fondo che Alione degli Alioni teneva in enfiteusi, finchè ne cedette ogni diritto di utilitario coll'accennato Instr. del 7 aprile 1503.

In sostanza i frati da prima chiedevano un'indennità per una giornata, poi, nell'abbattimento di quelle fortificazioni, insistevano per essere reintegrati nel possesso di due giornate che erano state loro occupate. Ma c'era un impedimento nella *donatione dei fossi e fortificazioni*, che il Governo aveva fatta al signor Marco Antonio Curione, il quale si teneva fermo nel suo possesso. I frati perciò supplicarono il Re per la restituzione di quel fondo, ed il Re mandò ad esaminare la cosa al *Conseglio dell'artiglieria fabriche e fortificazioni* (in data del 21 febb. 1716). Ed anche a questo *Conseglio* ricorsero perciò gli Agostiniani il 28 marzo dello stesso anno; ed il *Conseglio* con ordine segnato *Solaro della Marg.ta* (1) mandò a chiedersi il parere del primo ingegnere di S. M. Gio. Ignazio Bertola, e questi diede il suo parere favorevole; onde il primo Segretario Viretto prescrisse che quei beni si restituissero coll'intervento del S. Patrimoniale Ascanio Pola e del signor Curione, a condizione per altro che i frati fossero obbligati a pagare il terreno quando venisse a risultare che già ne avessero altra volta ricevuto il prezzo, e salvo sempre il diritto al Governo di rioccuparlo in caso di bisogno. In conseguenza di quest'ordine i frati ricorsero per l'esecuzione all'Intendente e Delegato Carl'Antonio Cauda, il quale mandò a citare il Patrimoniale Pola, e Pietro Maria Sattanino affittavolo del Curione, affinchè comparissero alle ore 11 del 20 maggio per la misura del detto fondo; e la citazione venne rimessa alla moglie di quest'ultimo, il quale tuttavia non comparve. In sua contumacia adunque ed alla presenza del Patrimoniale Pola e del notaio e segretario Boschetti l'agrimensore Pietro Francesco Bron-

(1) Riesce cosa gradita l'incontrare qui il nome dell'ingegnere Bertola, a cui si deve in gran parte la difesa di Torino nel famoso assedio; e così pure quello del *Solaro della Margarita*, cioè di quell'uffiziale che stese il racconto dell'assedio col cenno della morte eroica di P. Micca, pubblicato in facsimile nelle sue dotte ricerche nei volumi della *Miscellanea di Storia italiana* (il facsimile si trova nel vol. XXI) dal barone Antonio Manno, il quale si compiacque di assicurarmi che le due firme del *Solaro della Margarita*, le quali occorrono in questi documenti, sono proprio autentiche.

Digitized by Google

dolo, ad istanza del Padre D. Luigi Pasteris economo dell'abbazia di S.ª Maria Nuova, procedette alla misura ed al piantamento di otto termini, cominciando *in vicinanza della strada et al cospetto della porta dell'Imperatore che si vede chiusa e murata dividente il fondo di d. Rev.ma Abbattia da un campo posseduto dal Sig. Curione et assignato allo stesso in goldita da S. M.* Ed il sesto termine fu piantato *nell' angolo su' la collina di d° Fortino;* onde si vede che il possesso dell'Abbazia, partendo in basso dalla strada, si elevava sino ad arrivare al colmo della collina sotto le antiche fortificazioni.

La regione in cui erano posti questi beni si chiama tuttora del *Fortino*, ed essa si estende appunto dietro *Monte Rainero*, che è uno dei tre colli chiusi nelle mura d'Asti. La qual posizione era di molta importanza, tantochè nel secolo XV ne fu fatto governatore Antonio Astesano, autore del Carme *de Varietate fortunæ*, e segretario ducale del Duca d'Orleans da cui allora dipendeva la città d'Asti (1). Essendo esso alto quasi quanto il Castello Vecchio, e solo da questo diviso dalla piccola *Valbrenta*, era considerato come una delle chiavi della città; e perciò tremarono a ragione i cittadini quando lo videro nel 1650 per sorpresa occupato dagli Spagnuoli, che alfine tuttavia essi riuscirono a cacciare (2). Quindi non è a far le maraviglie che A. Brofferio come astigiano, dimenticandosi che parlava a non Astigiani, dicesse poi nella Camera Subalpina in occasione della guerra di Crimea, che era tanto possibile difendere Sebastopoli dopo l'espugnazione della Torre di Malakoff, quanto il difendere Asti dopo l'occupazione di *Monte Rainero*.

In conclusione, Gio. Giorgio Alione possedeva dei beni dietro Monte Rainero, coerenti a quelli dell'Abbazia: e non lungi da questi, cioè nel borgo di S.ª Maria Nuova, aveva la sua casa, ed ivi pure sorgevano il Convento degli Agostiniani Conventuali, e l'antica Confraternita dell'Annunziata; ed in quel borgo appunto gli amici dell'Alione probabilmente ne rappresentavano le farse.

---

(1) Vedi Maurice FAUCON, *Le Mariage de Louis d'Orléans*, etc. Paris, Imprim. Nationale, 1882, p. 40.

(2) Vedi il più volte citato mio scritto: *F. Maramaldo*, ecc., p. 8.

Digitized by Google

Ecco ora nella sua integrità il documento:

Carte Sotteri — Vol. XI, n° 60 — In carta bollata da denari dodeci.

1503: 7: Aprile.

In nomine Domini. Amen. Anno Nativitatis ejusdem millesimo quingentesimo tertio, Indictione sexta, die septima Aprilis Actum est videlicet in Ecclesia Sanctæ Mariæ Novæ Astensis Præsentibus respectabili J. U. Doctore domino Antonio de Henriotis, ac egregijs Bernardo de Furno, Jacobino Gnasio alias de Raxonino, et Carolo de Castello omnibus Civibus Ast: testibus ad infrascripta vocatis et rogatis quorum præsentia et mei Notarij publici infrascripti. Cum Nobilis Alionus de Alionis Civis Ast tenuerit ad fictum in emphiteusim â R^{do} in X. Patre Apostolico Protonotario domino Sigismondo Simoneta pætiam unam terræ sitam super finibus Ast: ubi dicitur retro Montem raynerium prope muros Civitatis Ast, cui coherent fossatum dictæ Civitatis â duabus partibus, Heredes Nobilis Antonieti Pagani via vicinalis, Nobilis Joannes Georgius Alionus, et heredes Nobilis Bernardi Alioni, et alij siqui sunt, quam ipse Alionus promisit esse per mensuram modia octo cum dimidio, quamvis in dicto Instrumento scriptum reperiatur esse modia novem, de, et pro qua reddebat, et redere tenebatur omni anno præfato domino Sigismondo pro fictu Ducatos octo auri boni, et justi ponderis largos, cum pacto franchitandi pro Ducatis centum et sexaginta auri boni, et justi ponderis prout constat publico Instrumento recepto, et abreviato per Egregium Stephanum de Veraxijs, quondam Notarium publicum Ast; Anno Nativitatis Domini 1492: Indictione decima, die decima quinta Xmbris cumque post prædicta ut Deo placuit decesserit in Curia Romana prædictus dominus Sigismondus prius cum condito suo nuncupativo testamento in quo et per quod inter alia per eum ordinata legavit dicto Monasterio Sanctæ Mariæ Novæ Astensis dirrectum dominium, et proprietatem, ac omnia, et singula ipsius domini Sigismondi iura directa suprascriptæ petiæ terræ ut supra sitæ, et coherentiatæ ut ibidem infrascripti domini Prior, et Sindicus, et negotiorum gestor dicti Monasterij dicebant, et asserebant patrem dominum Sigismondum decessisse, et dictum legatum fecisse dicto Monasterio ecce nunc quod ibidem personaliter constitutus suprascri-

Digitized by Google

ptus Nobilis Alionus de Alionibus nolens amplius stare seu remanere obligatus erga dictum Monasterium ad solvendum annuatim fictum suprascriptum, sed volens utile dominium et omnia, et singula ipsius Alioni iura utilia dictæ petiæ terræ vendere ipsi Monasterio sponte, et ex eius certa scientia, animoque deliberato, ac omni meliori modo via jure, et forma quibus melius fieri possit per se et suos Heredes dedit, vendidit, et tradidit R^do^ domino Patri Nicolo Papiensi Priori, et domino Matheo de Petitis de Ast, Sindico et Procuratori ibidem ambobus præsentibus ac mihi Notario infrascripto uti publicæ personæ officio publico stipulantibus ementibus et recipientibus nomine et vice dicti Monasterij et successorum suorum utile dominium, et omnia, et singula ipsius Alioni jura utilia quæcumque alia, respectu quorumque melioramentorum, quod, et quæ ipse Nobilis Alionus habet, et quæ sibi spectant, et pertinent, spectareque et pertinere potuissent possunt, et possent quoquomodocumque et qualitercumque in et super suprascripta pætia terræ ut supra sita, et coherentiata, quod dictus Alionus promisit esse per mensuram modia octo cum dimidio ut supra ad habendum, et possidendum et quidquid dicto Monasterio et successoribus suis deinceps placuerit proprio faciendum cum omnibus et singulis quæ infra prædictos continentur confines, vel alios si qui forent, accessibusque, ingressibus, et egressibus suis usque in vias publicas, et cum omnibus et singulis quæ dicta pætia terræ ut supra vendita respectu utilis dominij, et quorumque melioramentorum habet supra se intra aut infra se in integrum, omnibusque juribus rationibus et actionibus, usibus et requisitionibus eidem rei ut supra venditæ aut dicto Aliono ex causa vel pro ipsa de modis aliquibus spectantibus, et pertinentibus. Et hoc pro pretio et nomine pretij dictæ rei ut supra venditæ scutorum quinquaginta duorum solis auri boni, et justi ponderis de quibus prædicti dominus Prior, et dominus Matheus Procurator nomine et vice, et de pecunia propria ut ibidem asserebant dicti Monasterij ibidem in præsentia Testium suprascriptorum et mei Notarij infrascripti dederunt tradiderunt, solverunt, et realiter numeraverunt prædicto Alioni venditori ibidem præsenti et recipienti et ad se trahenti, et imbursanti scutos quadraginta solis. in tanta moneta ascendente ad dictam summam dictorum scutorum quadraginta solis qui provenerunt et receperunt et seu exacti fuerunt ex venditione cuiusdam sediminis dicti Monasterij venditi Nicolæ et Michaeli fratribus de Codevilla Civibus Ast: constante

Digitized by Google

publico Instrumento recepto et abreviato per me Notarium infrascriptum Anno et Indictione præsentibus die, et mense in eo contentis, reliquos vero scutos duodecim solis pro resta, et complemento, et integra solutione suprascriptorum scutorum quinquaginta duorum solis prætij suprascripti prædictus Nobilis Alionus fuit confessus et contentus, ac in veritate palam, et publice recognovit se realiter habuisse, et recepisse a prædictis domino Priore, et domino Matheo Procuratore ante rogationem præsentis Instrumenti Renoncians ipse Nobilis Alionus in præmissis omnibus, et singulis ac etc. infrascriptis exceptioni non numeratæ pecuniæ, ac non habitorum, non receptorum, sibique non solutorum, et realiter non numeratorum dictorum scutorum duodecim solis pro integra solutione, et satisfactione totius prætij suprascripti, speique habitionis, receptionis, traditionis, solutionis, et numerationis futuræ et exceptioni doli mali, metus, et infactum actionis conditionis sine causa, et ex injusta causa, ac omni alij exceptioni, defensioni, et juri ac legum auxilio, quibus se juvare et tueri possit, aut aliter prædictis, vel infrascriptis contrafacere vel venire, quam quidem rem ut supra venditam respectu utilis dominis et melioramentorum prædictus Nobilis Alionus constituit se tenere, et possidere nomine, et vice dicti Monasterij donec, et quousque ipsum Monasterium seu Agentes pro ipso de dicta petia terræ ut supra vendita corporaliter acceperit possessionem, quam accipiendi, et aprehensam retinendi corpore et animo eius propria auctoritate sine licentia alicuius dominorum Potestatis, Vicarij, Iudicis, Offitialis et cuiuslibet alterius Magistratus contradixione ipsius Nobilis Alionis et Heredum suorum et omnium aliarum Personarum in aliquo non obstante. Ipse Nobilis Alionus eisdem domino Priori, et domino Matheo Procuratori ibidem ut supra præsentibus ac mihi Notario infrascripto uti publicæ personæ officio publico stipulanti et recipienti, nomine, et vice dicti Monasterij licentiam omnimodam contulit, atque dedit. Et insuper titulo, et ex causa præsentis venditionis, ac tenore præsentis publici Instrumenti et pro prætio suprascripto prædictus Alionus dedit, cessit, transtulit atque mandavit prædictis domino Priori et domino Matheo Procuratori ibidem ut supra præsentibus ac mihi prædicto et infrascripto Notario uti publicæ Personæ stipulanti et recipienti nomine, et vice dicti Monasterij, et successorum suorum omnia, et singula ipsius Alioni jura, rationes, et actiones reales et personales utiles, et dirrectas, meras mistas et hippotheccarias, et rei persequtorias

Digitized by Google

et alias quascumque, realia et personalia utilia, et dirrecta mera mista et hipotheccaria ac persequtoria et alia quæcumque quæ et quas ipse Alionus habet, et quæ sibi spectant, et pertinent, spectareque et pertinere potuissent, possint, et possent quomodocumque et qualitercumque in et supra suprascripta pætia terræ tam respectu, et occasione utilis dominij et melioramentorum quam quavis alia occasione, ratione, modo, et causa, quæ dici, et excogitari possit quomodocumque qualitercumque. In quibus quidem iuribus, rationibus et actionibus ut supra cessis et venditis prædictus Alionus Procuratorem suum constituit videlicet prædictum Monasterium tamquam in rem suam propriam, ponens eum in locum suum proprium, ita quod amodo in antea prædictum Monasterium, ac successores sui possint, et valeant prædictis juribus ractionibus, et actionibus ut supra cessis utiliter, et dirrecte agere, experiri, excipere, replicare, consequi et modis omnibus se juvare, et tueri, ac omnia, et singula alia facere, et adimplere prout, et quemadmodum facere poterat, et potuisset ipse Alionus ante præsentem venditionem, ac iurium rationum, et actionum cessionem, et contractum, asserens, promitens et predicta iura vera esse et nulli alij cessisse, vendidisse, seu alienasse, nec non promitens ipse Alionus per se et suos Heredes prædictis domino Priori et domino Procuratori ibidem ut supra præsentibus, ac mihi prædicto et infrascripto Notario ut supra stipulanti et recipienti nomine, et vice dicti Monasterij de dicta pætia terræ ut supra vendita respectu utilis dominij, ac iuribus prædictis ut supra cessis nullo unquam tempore litem, questionem molestiam aut controversiam eidem Monasterio, aut successoribus suis non inferre, nec inferenti consentire, sed prædictam petiam terræ ut supra cessam eidem Monasterio, et successoribus suis semper et perpetuo legitime defendere, et auctorizare, disbrigare et manutenere ab omni persona et personis communi Collegio, et Universitate tam in proprietate quam in possessione vacuamque et expeditam, ac corporalem possessionem eiusdem rei ut supra venditæ respectu utilis dominij et melioramentorum eidem Monasterio tradere, et in ipsa præ ceteris alijs favore potiorem, et si quo tempore lis, causa, questio, diferentia, aut controversia tam per libelli oblationem quam alio quocumque modo moveretur, seu movebitur in futurum eidem Monasterio, et successoribus suis de dicta re ut supra vendita, aut aliqua parte ipsius, ipsam litem, questionem, molestiam aut controversiam, ac omnem cau-

Digitized by Google

sam quandocumque, et quotiescumque eidem venditori, aut Heredibus suis denonciatum fuerit, in se suscipere et in ea causa, vel causis, ac ipsius rei, et dicti Monasterij defensioni se offerre, et in causa, et causis tam principalibus, quam appellationum sistere usque ad finem omnibus ipsius Alionis sumptibus et expensis quod si non fecerit, et propterea pro ipsa re defendenda dictum Monasterium, aut successores sui damnum aliquod paterentur, vel expensas aliquas facerent in iudicio et extra, ipsum damnum, et expensas ad integrum eidem Monasterio, et successoribus reficere tam si res ipsa aut aliqua pars ipsius fuerit evicta quam non, quia sic inter, et prædictas Partes actu extitit, et conventum per pactum expressum; Remissa etiam ex nunc per pactum expressum dicto Monasterio necessitate denonciandi, et appellandi si supra evictione pronunciare contigerit contra id, et acto etiam inter, et prædictas Partes per pactum expressum ut supra ut non possit dicere Venditor quod eidem Monasterio facta fuerit iniuria, vel iniustitia, aut quod eius culpa vel negligentia fuerit evicta, quod si contra eumdem Monasterium lata fuerit sententia super evictione infra tertiam diem postquam eidem Aliono Venditori, aut Heredibus suis denontiatum fuerit prædictum prætium cum pœna dupli, et omnis interesse eidem Monasterio aut successoribus suis restituat, atque solvat. Eo tamen salvo, et reservato quod si aliquo tempore moveretur questio ipsi Monasterio aut successoribus suis per Heredes, aut successores prædicti domini Sigismondi de dirrecto dominio, et proprietate dictæ petiæ terræ quod tunc ipse Alionus non teneatur de evictione contra dictos Heredes, et successores prædicti domini Sigismondi, quia sic actum extitit, et conventum inter et prædictas partes per pactum expressum; Item convenerunt ipsæ Partes per pactum expressum quod si aliquo tempore moveretur seu movebitur questio, seu diferentia eidem Nobili Aliono aut Heredibus suis de dirrecto dominio et proprietate dictæ petiæ terræ ac de fictibus solutis ipsi Monasterio per dictum Alionum post mortem dicti domini Sigismondi, aut de aliquibus fictibus venturis quod tunc dictum Monasterium teneatur et obligatum sit et ita promiserunt dicti dominus Prior et dictus Procurator nomine dicti Monasterij rellevare indemnem, et sine damno ipsum Alionum, ac eius Heredes res, et bona a prædictis Heredibus et successoribus prædicti domini Sigismondi tam prædictis dirrecto dominio et proprietate quam prædictis fictibus dictæ petiæ terræ per ipsum Monasterium receptis

Digitized by Google

post mortem dicti Sigismondi, et etiam pro tempore secuturo, et ad præmissa omnia faciendum et ad rellevandum indemnem ipsum Alionum prædicti dominus Prior et dominus Procurator obligaverunt, et hippoteccaverunt expresse ipsi Aliono ibidem ut supra præsenti, et acceptanti omnia, et singula ipsius Monasterij bona mobilia et immobilia præsentia, et futura, et quia una pars dictæ petiæ terræ est plena messe, ideo convenerunt ipse Partes quod dicta godia sit dicti Monasterij salva, et reservata parte Massarij, seu Laboratoris; ad hæc omnia præsens Nobilis Paulina uxor dicti Nobilis Alioni, quæ suprascriptæ venditioni, et omnibus, et singulis supra et infrascriptis, et in præsenti Instrumento contentis, insertis, et descriptis consensit, et certificata per me Notarium infrascriptum prædictam rem ut supra venditam ac omnia alia bona dicti Alioni ejus mariti sibi fore pro dotibus suis hippoteccatam et obligatam, ac hippoteccata, et obligata sponte, et ex eius certa scientia, animoque deliberato renonciavit omni iuri suo hippoteccarum quod habebat vel habere poterat in dicta re ut supra vendita, tam ratione et occasione dotium suarum quam etiam quavis alia occasione ratione, modo, vel causa, quæ dici et excogitari possit, immo omne ius sibi competens in dicta re ut supra vendita eisdem domino Priori et dicto Procuratori, ibidem ut supra præsentibus ac mihi prædicto et infrascripto Notario, ut Personæ publicæ officio publico stipulanti et recipienti nomine, et vice dicti Monasterij S. Mariæ Novæ libere remisit, dedit, et cessit, promittens ipsa Nobilis Paulina pro se, et suis Heredibus prædictis domino Priori et dicto Procuratori dictis nominibus ibidem ut supra præsentibus, ac mihi prædicto et infrascripto Notario uti publicæ Personæ stipulanti et recipienti, nomine, et vice dicti Monasterij de dicta re ut supra vendita eidem Monasterio, aut successoribus suis, ullo unquam tempore litem, questionem, molestiam, aut controversiam non inferre, nec inferenti consentire, sed præsentem venditionem ut supra factam, ac omnia, et singula supra et infrascripta ac in præsenti Instrumento contenta, inserta, et descripta se semper et perpetuo habere, et tenere ratam, firmam, et gratam, ac rata, firma et grata, atque attendere, et observare, et nullo tempore contrafacere, vel venire per se, vel alium seu alios aliqua ratione, modo, vel causa de iure, vel de facto; quam quidem venditionem ac omnia, et singula supra et infrascripta, ac in præsenti Instrumento contenta, inserta et descripta dictus Alionus et Paulina Iugales ex una, et prædicti

Digitized by Google

DD. dum Prior et dum Procurator dicti Monasterji nomine ipsius Monasterij ex altera, Partes ante dictæ solemniter promiserunt, et convenerunt sibi invicem et vicissim solemnibus et legitimis stipulationibus hinc inde intervenientibus singula singulis, congrue refferendo, ac mihi prædicto et infrascripto Notario ut supra stipulanti, et recipienti nomine, et vice dicti Monasterij, ac omnium et singulorum quorum interest, intererit, et interesse potest, et poterit quomodolibet in futurum se semper, et perpetuo habere, et tenere ratam, firmam, et gratam, ac rata. firma. et grata, atque attendere et observare, et nullo tempore contrafacere, vel venire per se vel alium, seu alios, aliqua ratione modo, vel causa de iure, vel de facto sub reffectione, et restitutione omnium, et singulorum damnorum, expensarum, et interesse litis, et extra quæ, et quas proinde una pars occasione alterius sine culpa faceret, vel substineret in iudicio, et extra, de quibus et super quibus sibi invicem, et vicissim credere promiserunt verbo simplici sine testibus, et sacramento Judicis taxatione, et qualibet alia probatione: Et insuper quia dicta Nobilis Paulina mulier est, et ad maiorem omnium, et singulorum præmissorum corroborationem et firmitatem ipsa Nobilis Paulina iuravit ad sancta Dei Evangelia corporaliter tactis scripturis in manibus et ad delationem mei Notarij infrascripti præmissa omnia, et singula supra, et infrascripta, ac in præsenti Instrumento contenta, inserta, et descripta esse vera, et ea omnia attendere, et observare, et nullo tempore contrafacere, vel venire, adversusque præmissa, vel aliquod præmissorum, absolutionem. seu relaxationem a iuramento non petere, seu postulare, impetrataque non uti per se vel alium seu alios, aliqua ratione modo, vel causa de iure, vel de facto, renonciantes Ipsi Alionus et Paulina, ac prædicti D^{ni}. dum Prior, et dum Procurator in præmissis omnibus et singulis, ac etiam infrascriptis exceptioni doli, mali, metus et infactum actioni conditioni sine causa, et ex iniusta causa, reique sic non gestæ vel aliter scriptæ quam gestæ, seu simulato modo gestæ, dictaque Paulina beneficio Valeriani Senatus - consultus authenticæ si qua mulier, ac Jul.: ff. de fundo dotali, ac omni alij exceptioni, defensioni, et iuri ac legum auxilio, quibus se iuvare, et tueri possint aut aliter prædictis contrafacere, vel venire, et pro præmissis omnibus et singulis firmiter attendendis, et observandis prædicti Alionus et Paulina iugales de Alionis, et prædicti domini dum Prior, et dum

Digitized by Google

Procurator dicti Monasterij Sanctæ Mariæ Novæ bona, mobilia et immobilia præsentia et futura sibi invicem, et vicissim, ac mihi prædicto et infrascripto Notario ut supra stipulanti et recipienti nomine, et vice dicti Monasterij pignori, et hippotecæ obligaverunt, et hippoteccaverunt, et de prædictis dictæ Partes, et quælibet ipsarum præceperunt, et rogaverunt me Notarium infrascriptum fieri publicum Instrumentum, et plura dictamine sapientis si fuerit opportunum.

Et Ego Joannes Stephanus de Parona Civis Ast publicus Imperiali auctoritate Notarius de Collegio DD. Notariorum dicte Civitatis Astensis præmissis omnibus et singulis dum sic ut præmititur agerentur, et fierent, vocatus interfui, et rogatus suprascriptum Instrumentum recepí, et sic illud in protocollo meo scripsi, notavi, et protocolavi, de quo quidem protocollo meo illud per alium Notarium mihi fidum fideliter extrahi, et transcribi, et in præscriptam publicam formam redigi feci, alijs me occupato negotijs, In cuius rei testimonium me subscripsi, signumque meum apposui consuetum.

(D'altra mano)

Exemplum suprascriptum sumptum fideliter fuit per mei fide dignum a quodam Instrumento tabelionali signo munito, et in carta pergamena scripto caractere antiquo mihi exhibito ex parte ad RR. Canonicorum Regularium Lateranensium Monasterij S[tæ] Mariæ Novæ huius Civitatis cum quo facta debita collatione concordare inveni prout (?) sic attestor Ego Alexander Scipio De Ambrosijs Notarius Collegiatus, et Cancellarius Episcopalis Astensis, et per fidem Astæ die secunda mensis Julij. 1708.

De Ambrosijs Not[s] (segno tabellionale)

Asti, 23 Novembre 1890.

Il Segretario della Classe
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 15 al 30 Novembre 1890

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

Donatori	
R. Stazione enologica sperim. d'Asti.	* R. Stazione enologica Sperimentale d'Asti. — Annuario 1889. Asti, 1890; in-8°.
Università J. Hopkins (Baltimora).	* American chemical Journal edited by Ira Remsen vol. XI, n. 8, vol. XII, n. 1-5. Baltimore, 1890; in-8°.
Id.	— General Index of volumes I-X (1879-1888) of the american chemical Journal, W. R. Orndorff, Assist. Prof. of. Chemystry. Baltimore, 1890; in-8°.
Id.	— Johns Hopkins University Circulars, etc.; vol. X, n. 83. Baltimore. 1890; in-4°.
Società di Scienze ed Arti di Batavia.	* Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië etc.; Deel XLIX (achtste serie, Deel X). Batavia, 1890; in-8°.
R. Accademia delle Scienze di Berlino.	* Sitzungsberichte der K. Preussen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: XX-XL, 17 April; 31 Juli 1890. Berlin, 1890; in-8° gr.

Digitized by Google

* Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse, publiés par la Commission géologique de la Société helvetique des Sciences naturales aux frais de la Confédération: XVI° livrais. (Monographie des Hautes-Alpes randoises, par E. RENEVIER). Berne. 1890; in-4°. — Commiss. geol. della Soc. elvetica (Berna).

Journal of Morphology edited by C. O. WHITMAN, with the cooperation of E. PHELPS ALLIS; vol. IV, n. 1. Boston, U. S. A., 1890; in-8° gr. — Boston.

* Annales de la Société belge de Microscopie; t. XIII, 1 et 2 fasc. Bruxelles, 1889; in-8°. — Società belga di Microscopia (Bruxelle).

* Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol. XX, n. 1. Cambridge, U. S. A., 1890; in-8°. — Museo Zool. compar. (Cambridge).

The Collected mathematical Papers of Arthur CAYLEY; vol. III. Cambridge, 1890; in-4°. — Cambridge.

* Bullettino mensile dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, ecc; nuova serie, fasc. XIV. Catania, 1890; in-8°. — Accad. Gioenia di Catania.

* Annali del Museo civico di Storia naturale di Genova pubblicati per cura di G. DORIA e R. GESTRO; serie 2ª, vol. VII, VIII, IX. Genova, 1889-90; in-8°. — Museo civico di Storia naturale di Genova.

Untersuchungen über zweites oder wiederholtes Blühen; Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Giessen; eingereicht von G. JACOB. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°. — Università di Giessen.

Ueber eine Anwendung der Wasserdampfungswärmen; Inaug.-Diss. der philos. Fac. der Ludwigs-Univ. Giessen etc. vorgelegt von K. WIRTZ. Leipzig, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Forstliche Bedeutung der Vögel; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von A. SCHÖNHUTH. Giessen, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber die Einwirkung von Schwefel auf Glycerin; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von C. H. KEUTGEN. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber eine Reproduction der Siemensschen Quecksilber-einheit; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. etc., vorgelegt von H. PASSAVANT. Leipzig. 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beitrag zur Kennthiss des Feineren Baues der Fruchtschale der Kompositen; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von O. HEINECK. Leipzig, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Giessen. Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Raumcurven vierten Grades enthält; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von W. Thienemann. Leipzig, 1890; 1 fasc, in-8°.

Id. Untersuchung der Fläche dritter Ordnung hinsichtlich der projectiv verallgemeinerten Mittelpunkts-Eingenschaften; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von K. Stoltz. Mainz, 1890; 1 fasc. in-4°.

Id. Ueber verschiedene Darstellungen des korrespondierenden Kegelschnittbüschel; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von O. Weimar. Giessen, 1890; 1 fasc. in-4°.

Id. Beiträge zur Histologie des Echinococcus multilokularis; Inaugural-Dissertation der Erlangung der Doctorwürde der hohen medicinischen Facultät der Grossherzoglich Hessischen Ludewigs-Universität zu Giessen, vorgelegt von H. Marenbach. Giessen, 1885; 1 fasc. in-8°.

Id. Drei Beobachtungen von Sarcoma ovarii; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc. vorgelegt von O. Fresenius. Büdingen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Das Fibromyom des Collum Uteri; Inaug.-Diss. etc. der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von H. Frank. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ein Fall congenitaler Atresie der A. pulmonalis, combinirt mit Tricuspidalstenose, bei geschlossener Kammerscheidewand; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von L. Wagner. Darmstadt, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber die Beweglichkeit pleuritischer Exsudate; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von K. Nicolay. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Grofshirnrinde in ihrer Stellung zur Speichelsecretion; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von G. Fluck. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Zur Casuistick der vom Pharynx ausgehenden Aktynomykose; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von R. Hofmann. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Zur Casuistik der Spina bifida; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc. vorgelegt von A. Wieber. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Operationsmethoden des Rectumcarcinoms; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von C. H. Heyder. Giessen, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. Zur Casuistik der Haematosalpinx; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von H. Walther. Giessen, 1890; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Zur Aetiologie und Symptomatologie der chronischen continuirlichen Saftsecretion des Magens; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von A. VENTE. Giessen, 1890; 1 fasc. in-8°. — Università di Giessen.

Zur Lehre vom Ulcus ventriculi retundum und dessen Beziehungen zur Chlorose; Inaug.-Diss. etc., der hohen med. Fac. etc., vorgelegt von A. GRÜNE. Amberg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

* Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk; utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten; 48 Häftet. Helsingfors, 1889; in-8°. — Società di Scienze natur. di Helsingfors.

— Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Forhandlingar; XXXI, 1888-1889; in-8°. — Id.

* Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft-herausgegeben von der medizinisck-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; neue Folge, Band XXIV, Heft 4. Jena, 1890; in-8°. — Società di Med. e St. nat. di Jena.

* Zoologischer Anzeiger herausgegeben von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig. etc.; XIII Jahrg. n. 349. Leipzig, 1890; in-8°. — Prof. J. V. CARUS (Lipsia).

* Monthly Notices of the R. astronomical of London; vol. L, n. 9 (Supplementary number). London, 1890, in-8°. — R. Soc. astron. di Londra.

— Appendix to vol. L of the *Monthly Notices* etc.: Comparison of the places of the Moon deduced from Burckardt's and Hansen's tables for every Greenwich mean Midnight during the years 1847-62, etc. London, 1890; in-8°. — Id.

Bulletin of the Minnesota Academy of natural Sciences, etc.; vol. III, n. 1. Minneapolis, U. S. A. 1889; in-8°. — Accad. di Sc. nat. di Minnesota.

* Hortus botanicus panormitanus, sive plantae novae vel criticae quae in Horto botanico panormitano coluntur, descriptae et iconibus illustratae; auctore Augustino TODARO: tomus II, fasc. 7. Panormi, 1890; in-fol°. — Orto botanico di Palermo

Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc. publiées par A. GOUGUENHEIM; t. XVI, n. 11. Paris, 1889; in 8°. — La Direzione (Parigi).

* Mémoires de l'Académie imp. des Sciences de St.-Pétersbourg: 7e série, t. XXXVII, n. 6, 7. St.-Pétersbourg, 1890; in-4°. — Accademia imp. delle Scienze di Pietroborgo.

Journal de la Société physico chimique russe à l'Université de St-Pétersbourg, 1890; in-8°. — Soc. fis.-chimica dell'Università di Pietroborgo

* Annales de l'Observatoire de Rio de Janeiro publiées par L. CRULS, Directeur; t. IV, 1e et 2e parties. Rio de Janeiro, 1889; in-4°. — Osservatorio di Rio Janeiro.

— Annuario publicado pelo Observatorio astronomico do Rio de Janeiro anno IV, V e VI, 1888-90. Rio de Janeiro, 1888-90; in-8° picc. — Id.

Digitized by Google

R. Accademia dei Lincei (Roma).

* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ecc.; vol. VI, fasc. 1, 2; 2° sem. 1890. Roma, 1890; in-8° gr.

La Direzione (Roma).

* Rivista di Artiglieria e Genio; Giugno (vol II). Roma, 1890; in-8°.

Università di Rostock.

* Der Urbüffel von Celébes: Anoa Deppressicornis (H. Smith); Versuc einer Monographie; Inaug.-Diss. der hohen philosophischen Facultät der Universitït Rostock zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde vorgelegt von K. M. HELLER. Dresden, 1889; 1 fasc. in-4°.

Id.

Ueber Carbonylsalicylamid; Inaug.-Diss. etc. der hohen philos. Fac etc., vorgelegt von A. BOGISCH. Stuttgart, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Ueber die Monoyer'schen dioptrischen Cardinalpunkte eines Sistems centrirter brechender sphärischer Flächen; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von Christian DREWS. München, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Ein Beitrag zur Theorie der Centralbewegungen; Inaug.-Diss. etc. der philos. Fac. etc., vorgelegt von R. FRANTZ. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Beiträge zur Kontnniss der Aethyldimethylbenzole; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von J STAHL. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Einige Beiträge zur Kenntniss des Apiols; Inaug.-Diss., etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von Is. GINSBERG. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Ueber einige Derivate des Athylbenzols; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von L. SEMPOTOWSKI. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Beiträge zur Kenntniss des Formaldehydes; Inaug.-Diss., etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von W. ESCHWEILER. Darmstadt, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id.

Zur Kenntniss von Macrocystis und Thalassiophyllum; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von O ROSENTHAL. Marburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id.

Ueber die Oxydationsproducte des Pseudocumols, des simmetrischen und des benachbarten Monobrompseudocumols; Inaug.-Diss., etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von G. WALCKER. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id.

Beitrag zur Kenntniss des p.-Tolylhydrazins; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von R. RAAB. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Ueber die Einwirkung von Kohlendioxyd auf einige monsalkylierte Dioxybenzole, und über einige Condensationsprodukte der Euranthongruppe; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von C. Gentsch. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Università di Rostock.

Ueber die äthylirten Benzole; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. etc., vorgelegt von J. Walzberg. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Homologe der Hippursäure und analog Konstituierte Verbindungen; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von H. Moeller. Gräfenhainichen, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber einige unsymmetrische secundäre aromatische Hydrazine mit ungesättigten Alkoholradikalen; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von C. Claessen. Aachen, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber einige Derivate des Tetradecylaldehyds; Inaug.-Diss., etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von G. Pressprich. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beiträge zur Kenntniss der pyrophosphorsauren-Salze; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von W. Hewel. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beiträge zur Kenntniss der Laurole; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von E. Uhlhorn. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Über das Harnstoffchlorid des Benzylamin's und einige Derivate desselben; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt, I. Riesenfeld. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber das β-Methyl-Pyridylketon; Inaug.-Diss., etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von W. Kiby. Karlsruhe, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beiträge zur Kenntniss des symmetrischen und des unsymmetrischen Aethylmetadimethylbenzols; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von A. Geyger. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beiträge zur Kenntniss des Pentamethylbenzols; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von Ottomar Friedrich. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ausführliche Untersuchung der Nitrouvitinsäuren sichere Bestimmung ihrer Beziehungen zu den Beiden Oxyuvitinsäuren; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., aorgelegt von G. Muller. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Rostock. — Die Characeen der Provinz Schleswig-Holstein und Lauenburg nebst eingeschlossenen fremden Gebietstheilen; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von C. SONDER. Chiel, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung auf Wasser; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von O. RIESS. München, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur Kenntniss der Kobaltoktaminsalze; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von O. BLASBERG. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Isokreosol, Isohomobrenzcatechin, Xylobrenzcatechin, ein Beitrag zur Kenntniss des Verhaltens homologer Amidophenole beim Ersatz der Amidgruppe durch Hydroxyl; Inaug.-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von L. LIMPACH. Tübingen, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur Frage über die Bestimmung von geringen Mengen Kuhbutterfett in der Margarine; etc. Inaug-Diss. etc., der hohen philos. Fac. etc., vorgelegt von W. von LIEBERMANN. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur Kenntniss der Cholesterine; Inaug.-Diss. zur Erlangung der Doctorwürde der medicinischen Facultät der Univ. zu Rostock, vorgelegt von H. BURCHARD. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber das Epithel und die Drüsen der Ohrtrompete nord Paukenhöhle; Inaug.-Diss. etc., der med. Fac. etc., vorgelegt von F. FISCHER. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber den Canalis Petiti des Menschen; Inaug.-Diss. etc., der med. Fac. etc., vorgelegt von F HAASE. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ein Beitrag zur Kenntniss des Granuloma fungoides; Inaug.-Diss. etc., der med. Fac. etc., vorgelegt von P. H LENSCHOW. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber acute und chronische Intoxicationen durch Nitrokörper der Benzolreihe; etc., Inaug.-Diss, etc., der med. Fac. etc., vorgelegt von M. RÖHL. Hagen i. W., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Die Markräume in den Extremitätenknochen eines fünfundzwanzigjährigen; und eines zweiundachtzigjährigen Mannes; Inaug.-Diss. etc., der med. Fac. etc., vorgelegt von Hans FRIEDRICH. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Stoccolma ** — Bibliotheca mathematica Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von Gustaf ENESTRÖM; neue Folge, 4. Stockolm, 1890; in-8°.

Soc. di Sc. natur del Wurtemberg (Stoccarda). — * Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg, etc., XLVI Jahrgang. Stuttgart, 1890, in-8°.

Digitized by Google

* The Journal of the College of Science, imp University, Japon; vol. VII, part 4. Tokyo, Japan, 1890; in-8° gr. — Università imp. di Tokyo (Giappone).

Effemeridi astronomico-nautiche per l'anno 1892, pubblicate per incarico dell'I. R. Governo marittino dalla I. R. Accademia di Commercio e Nautica in Trieste, 1890; 1 vol. in-8°. — Acc. di Comm. e Nautica in Trieste

* Annual Report ot the Board of Regents of the Smithsonian Institution, etc.; for the year ending June 30, 1888, part II: for the year ending June 30, 1887, part II. Washington, 1889; in-8°. — Ist. Smithsoniano (Washington).

— Proceedings of the United States national Museum; vol. XI, 1888. Washington, 1889; in-8°. — Id.

— Smithsonian Contribution to Knowledge; vol. XXVI. Washington, 1890; in-4°. — Id.

* Memoirs of the national Academy of Sciences; vol. IV, part. 2. Washington, 1889; in-4°. — Accad. Nazionale delle Scienze di Washington.

Contributo alla dottrina delle Localizzazioni cerebrali e della Epilessia Jacksoniana; del Dott. Bartolomeo Baculo. Napoli, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Centri termici: Ricerche sperimentali del Dott. B. Baculo. Napoli, 1890 1 fasc. in-8°. — Id.

Deuxième Supplément au Dictionnaire de Chimie pure et appliquée de Ad. Wurtz, publiée sous la direction de Ch Friedel; 4° fasc., p. 241-320. Paris; in-8°. — Il Socio Corrisp. C. Friedel.

Sulla influenza della qualità delle acque usate nella trattura dei bozzoli; Memoria premiata con medaglia d'oro dal Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio, del Prof. E. Rotondi. Roma, 1890; 99 pag. in-8°. — L'Autore

Louis Bellardi: Note biographique par F. Sacco (con ritratto in fototipia, dis. dal Cav. L. Cantù) (Extr. du Bulletin de la Société belge de Géologie, etc.; t. III, 1889); 1 fasc. in-8°. — L'A.

Influenza delle masse che si muovono di moto alternativo nelle macchine a vapore; Memoria dell' Ing. Francesco Sinigaglia (Estr. dagli *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli;* aprile 1890); 1 fasc. in-4°. — L'A.

— Diagrammi previsti delle macchine a vapore; Memoria dell'Ing. Francesco Sinigaglia (Estr. dagli *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli;* aprile 1890); 1 fasc. in-4°. — Id.

Digitized by Google

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

dal 1° Luglio al 7 Dicembre 1890

Donatori

Donatori	
Acc. di Scienze Lettere ed Arti di Acireale.	Atti e Rendiconti dell' Accademia di Scienze, Lettere ed Arti dei zelanti e pp. dello studio di Acireale; nuova serie, vol. I, 1889. Acireale, 1890; in-8°.
Acc. di Sc. ed Arti degli Slavi merid. di Agram.	* Rad Iugoslavenske Akademije Znanosti i Umjetnosti: Knjiga, C, CI (Razredi filolog.-hist. i filosoficko jurid.): XXIX, XXX. U Zagrebu, 1890; in-8°.
Id.	—— Starine na sviet isdaje Iugoslavenske, etc.; Knjiga XXII. U Zagrebu, 1890; in-8°.
Id.	—— Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium; vol. XX: Acta historiam confinii militaris croatici illustrantia; tomus III (ab anno 1693-1790, et in supplemento ab anno 1531-1730). Zagrabiae, 1889; in-8°.
Società Archeol. di Agram.	* Viestnik hrvatskoga arkeologickoga Druztva: Gadina XII, Br. 1-4 U Zagrebu, 1890; in-8°.
R. Accademia delle Scienze di Amsterdam.	* Verslagen en Mededeelingen der k. Akademie van Wetenschappen: Afdeeling Letterkunde; 3 Reeks, VI Deel. Amsterdam, 1889; in-8°.
Id.	—— Amor; Carmen elegiacum Rudolphi van Oppenraaij Bemmela Gelri in certamine Hoëufftiano praemio aureo ornatum. Amstelodami: MDCCCLXXXX; 1 fasc. in-8°.
Università J. Hopkins (Baltimora).	* The american Journal of Philology, edited by Basil L. Gildersleeve, Prof. of Greek in the Jonhs Hopkins University; vol. X, n. 2-4; vol. XI, n. 1. Baltimore, 1889-90; in-8°.
Id.	I. Hopkins University Studies in historical and political Science, Herbert B. Adams, Editor; — Seventh series, X-XI-XII: eight series, I, II, III, IV. Baltimore, 1889-90; in-8°.
Id.	Johns Hopkins University Circulars, etc.; vol. IX, n. 82. Baltimore, 1890; in-4°.
R. Accademia delle Scienze di Berlino.	* Abhandlungen der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1889. Berlin, 1890; in-4°.
Id.	Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen; XVIII Band, 1 Hälfte (Januar bis Juni 1759). Berlin, 1890; in-8°.

Digitized by Google

Allgemeine Geschichte in Einzeldarstellungen, etc.: Geschichte der deutschen Reformation; von Dr. Friedrich von BEZOLD. Berlin, 1890; 1 vol. in-8° — Berlino * *

Bibliotheca philologica classica, etc.; XVII Jahrgang, 2 und 3 Quartal. Berlin, 1890; in-8°. — Berlino. * *

* Transaction of the american philological Association: 1889; vol. XX. Boston, in-8°. — Assoc. filologica americana (Boston).

* Documente privitóre la Storia românilor culese de Ludoxiu de HURMAZAKI, etc.; vol I, partea II (1346-1450); etc. Bucuresci, 1890; in-4°. — Accad. Rumena delle Scienze (Bukarest).

* Journal of the Asiatic Society of Bengal; vol. LVIII, part. I, Supplement, 1889: vol. LIX, part. I, n. 1, 2, 1890. Calcutta, 1890; in-8°. — Società Asiatica del Bengala (Calcutta).

* Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie; 4ᵉ série, t. II. Chambéry, 1890; in-8°. — Società Sav. di St. e d'Arch. (Chambéry).

* Proceedings of the R. Irish Academy; 3ᵉ series, vol. I, n. 3. Dublin, 1890; in-8°. — R. Accad. Irland. (Dublino).

* Vocabolario degli Accademici della Crusca; 5ª impressione, vol. VII, fasc. 1 (G. GIORNALIERO) Firenze, 1890; in-4°. — R. Accademia della Crusca (Firenze).

Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1890, n. 108-119: — delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. V, n. 1. Firenze, 1890, in-8° gr. — Bibliot. nazionale di Firenze.

— Indici del Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa, ecc. nel 1889; fogli 1-9; in-8° gr. — Id

* Bulletin de la Société d'Études des Hautes-Alpes; IXᵉ année, Juillet-Septembre 1890, n. 3, 4 (35, 36). Gap, 1890; in-8°. — Soc. degli Studi delle Alte Alpi (Gap).

* Ateneo Ligure — Rassegna mensile della Società di Lettere e Conversazioni scientifiche di Genova; anno XIII, Aprile-Settembre 1890. Genova; in-8°. — La Direzione (Genova).

Dr. A. PETERMANNS. Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, herausg. von Prof. Dr. A. SUPAN; XXXVI Band, n. 7-12. Gotha, 1890; in-4°. — Gotha. * *

— Ergänzungsheft n. 98, 99: Dr. Joseph PARTSCH, Kephallenia und Ithaka: Eine geographische Monographie. Gotha, 1890; in-4°. — Id.

Digitized by Google

Società Olandese delle Scienze (Harlem). * Verhandelingen rakende den Natuurlijken en Geopenbaarden Godsdienst. uitgegeven door Teylers Godgeleerd Genootschap; nieuwe serie, twaalfde Deel. Harlem, 1890; in-8°.

Museo Teyler (Harlem). * Archives du Musée Teyler; 2e série, vol. III. 4e partie. Harlem, 1890; in-8° gr.

Id. — — Catalogue de la Bibliothèque dressé par C. Ekama: II vol., auteurs grecs et latins, 1e livrais. (Poëtes, Orateurs et Rhétoriciens, Historiens et Géographes): 2e livrais. (Philosophes, Physiciens, Mathématiciens, Médicins; Grammairiens, Ecrivains, Philologues, etc.; Collections): 3e livrais. (Bibles; Histoire ecclésiastique; Pères Ecclésiastiques, etc.). Harlem, 1889; in-8° gr.

R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia). * Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Bd. XI, n. 7. Leipzig, 1890; in-8° gr.

Soc. di Geografia di Lipsia. Mitteilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig; 1889. Leipzig, 1890; 1 vol in-8°.

Lipsia. * * Allgemeine deutsche Biographie: 149 und 150 Lieferung (Band XXX, Lfg. 4 und 5), etc.; 151 Lieferung (Band XXXI, Lfg. 1). Leipzig, 1890; in-8°.

Società Reale di Londra. * Proceedings of the R. Society of London; vol. XLVIII, n. 292. London, 1890; in-8°.

Università di Lovanio. * Société littéraire de l'Université catholique de Louvain. Choix de Mémoires: t. I, 1841; t. IV, 1848; t. XII, 1877. Louvain, 1841-1877; in-8°.

Id. —— Annuaire de l'Université catholique de Louvain; VI année, 1842; XXVI année, 1862; XLVI année, 1882. Louvain; 3 vol. in-16°.

R. Accademia di Storia (Madrid). * Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVI, cuaderno 6; t. XVII, cuadernos 1-5. Madrid, 1890; in-8°.

R. Istit. Lomb. (Milano). * Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Classe di Lettere e Scienze storiche e morali); vol. XVII e XVIII, VIII e IX della serie 3a. fasc. 2 Milano, 1890; in-4°.

Id. —— Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2a, fasc. 11-16. Milano, 1890; in-8°.

Società Storica Lombarda (Milano). * Archivio Storico Lombardo: Giornale della Società Storica Lombarda; 2a serie, fasc. 26-27. Milano, 1890; in-8°

La Direzione (Milano). (Nuovo) Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti, ecc.; serie 3a, vol. I, fasc. 2, 3; vol. II, fasc. 4, 5, 6; vol. III, fasc. 7. Milano, 1890; in-8°.

Digitized by Google

* Abhandlungen der historischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften; XIX Band, 2 Abtheilung: der philosophisch-philologischen Classe, XVIII Band, 3 Abth München, 1890; in-4°. — R. Acc. bavarese delle Scienze (Monaco).

- Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. bay. Ak. d. Wiss. zu München; 1889, Bd. II, Heft 2; 1890, Heft 1. München, 1890; in-8°. — Id.

Almanach der k. bay. Akademie der Wissenschaften für das Jahre 1890. München; 1 vol. in-16°. — Id.

* Comptes-rendus de l'Athénée Louisianais, etc.; 4e série, t. I, livrais. 4e. Nouvelle-Orléans, 1890; in-8°. — La Direzione (Nuova York).

Inventaire sommaire des Archives départementales antérieures à 1790, etc.; Ardennes, t. I; — Archives civiles: séries A (26 art.) et B (art. 1-1668). Charleville, 1890; in-4°. — Governo francese (Parigi).

— Meurthe-et-Moselle; t. VI, 2e partie Tables des noms de personnes. Nancy, 1890; in-4°. — Id.

— Supplément à l'Inventaire sommaire des Archives hospitalières antérieures à 1790, etc. — Département de la Seine — Administration générale de l'assistance publique à Paris; 2 fasc. Paris, 1889; in-4°. — Id.

* Mémoires de la Société nationale des Antiquaires de France; 5e série, t. IX. Paris, 1888; in-8°. — Società nazionale degli Antiquari di Francia (Parigi).

— Bulletin de la Société des Antiquaires etc., 1889. Paris; in-8°. — Id.

* Annales du Musée Guimet; t. XV; t. XVI 1e et 2e parties; t. XVII. Paris, 1889; in-4°. — Museo Geymet (Parigi).

Revue de l'Histoire des Religions, publiée sous la direction de M. Jean Réville, etc.; Xe année, t. XX, n. 1, 2. Paris, 1889; in-8°. — Id.

* Bulletin de la Société de Géographie, etc; 7e série, t. X et XI, 1 et 2 sem. 1890. Paris, 1890; in-8°. — Soc. di Geografia (Parigi).

Compte-rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1890, n. 12, 13, 14 et 15, pag. 349-532; in-8°. — Id.

Revue géographique internationale — Journal mensuel illustré des sciences géographiques, etc., Directeur-gérant Georges Renaud; n. 174-177, Avril-Juillet 1890. Paris; in-4°. — La Direzione (Parigi).

Digitized by Google

Accad. imperiale delle Scienze di Pietroborgo.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg; t. XVI, n. 17 et dernier; t. XVII, n. 1 5. St.-Pétersbourg, 1889-90; in-4°.

Id.

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg; nouvelle série, I (XXXIII), n. 2, 3. St.-Pétersbourg, 1889; in-8° gr.

Ist. stor. e geogr. brasiliano di Rio Janeiro.

* Revista trimestral do Instituto historico e geografico brazileiro, fundado no Rio de Janeiro; t. LIII, parte 1 (1° e 2° trimestres). Rio de Janeiro, 1890; in-8° gr.

Ministero delle Finanze (Roma).

Annuario dei Ministeri delle Finanze e del Tesoro del Regno d'Italia; 1890 — Parte statistica. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr.

Id.

Statistica del Commercio speciale di importazione e di esportazione dal 1° gennaio al 30 ottobre 1890. Roma, 1890; 4 fasc. in-8° gr.

Id.

Bollettino della Legislazione e Statistica doganale e commerciale; anno VII, maggio-ottobre 1890. Roma, in-8° gr.

Id.

—— Supplemento al fascicolo di settembre-ottobre 1890. Roma, 1890; pag. 549-816; in-8° gr.

Id.

Relazione sull' Amministrazione delle gabelle per l'esercizio 1888-89. Roma, 1890; 177 pag. in-4°.

Id.

Movimento commerciale del Regno d' Italia nell' anno 1889. Roma, 1890; 1 vol. in-4°.

Id.

Movimento della navigazione nei porti del Regno nell'anno 1889. Roma, 1890; 1 vol. in-4°.

Ministero di Agr., Ind. e Comm. (Roma).

Statistica industriale, fasc. 24 — Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Verona, con una carta stradale e industriale. Roma, 1890; in-8°.

Id.

Statistica industriale, fasc. XXII — Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Padova, con una carta stradale e industriale: - fasc. XXIII — Notizie sulle condizioni industriali delle provincie di Ferrara e di Rovigo, con una carta strad. ecc. Roma, 1890; in-8° gr.

Id.

Serie 4ª, fasc. XXV, Statistica industriale: Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Alessandria, con una carta stradale e industriale. Roma, 1890; in-8°.

Id.

—— Memorie di Statistica del Prof. F. FERRARA, Senatore del Regno. Roma, 1890; 1 vol. in-8°.

Digitized by Google

— — Atti della Commissione per la Statistica giudiziaria civile e penale — Sessione ordinaria e straordinaria del 1889. Roma, 1890; 1 vol. in-8°. — Ministero d'Agr., Ind. e Comm. (Roma).

— — Statistica giudiziaria penale per l'anno 1888. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr. — Id.

— — Popolazione; — Movimento dello stato civile; anno XXVII, anno 1888. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr. — Id.

— — Statistica delle Opere pie al 31 dicembre 1880, e dei lasciti di beneficenza fatti negli anni 1880-87; Introduzione — Lazio e Umbria. Roma, 1890; 1 fasc. in-4° gr. — Id.

— — Atti della Commissione istituita dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio col Decreto del 4 febbraio 1889 per l'aggiudicazione di premi alle Società di mutuo soccorso: Tavole della frequenza e durata delle malattie presso gli inscritti alle Società di mutuo soccorso divisi per sesso, età e professione. Roma, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Statistica dell' Emigrazione italiana avvenuta nell'anno 1889. Roma, 1890; 1 fasc. in-8° gr. — Id.

Sulle Associazioni cooperative in Italia; Saggio Statistico: Relazione presentata dal Direttore generale della Statistica alla Commissione consultiva sulle Istituzioni di Previdenza e del Lavoro nella seduta del 26 febbraio 1890. Roma, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno VIII, n. 5-8. Roma, 1890; in-8° gr. — Id.

— — Appendice al Bollettino n. 6 — Regi Decreti di istituzioni, atti costitutivi e Statuti delle Casse di risparmio. Roma, 1890; in-8°. — Id.

Ministero della Pubblica Istruzione — Indici e Cataloghi: XI, Annali di Gabriel Giolito de' Ferrari; vol. I fasc. 1-12 — Disegni antichi e moderni posseduti dalla R. Galleria degli Uffizi di Firenze; vol. unico, fasc. 1. Roma, 1890; in-8°. — Ministero dell'Istr. Pubbl. (Roma).

* Memoria della R. Accademia dei Lincei; serie 4ª, Classe di Scienze morali, storiche e filosofiche, vol. VII, parte 2ª, Notizie degli Scavi: gennaio-giugno, 1890. Roma, 1890; in-4°. — R. Accademia dei Lincei (Roma).

* Studi e documenti di Storia e Diritto; Pubblicazione periodica dell'Accademia di Conferenze storico-giuridiche; anno XI, fasc. 2, 3. Roma, 1890; in-4°. — Accad. di Conf. storico-giuridiche (Roma).

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma; Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. IV, n. 6; vol. V, n. 2. Roma, 1890; in-8° gr. — Bibliot. nazionale Vitt. Emanuele (Roma).

Digitized by Google

Istituto di diritto romano (Roma). * Bullettino dell'Istituto di diritto romano, pubblicato per cura del Segretario perpetuo Vittorio SCIALOJA; anno III, fasc. 1, 2, 3, 4. Roma, 1890; in-8°.

La Direzione (Roma). Giornale degli Economisti — Rivista mensile degli interessi italiani (fondato a Padova nel 1875, proseguito a Bologna nel 1886 dal Prof. A. ZORLI; serie 2ª, anno I, luglio 1890. Roma, 1890; in-8°.

Il Comm. G. B. DE ROSSI (Roma). * Bullettino di Archeologia cristiana del Commendatore G. B. DE ROSSI; serie 4ª, anno VI, n. 3, 4. Roma, 1888-89; in-8° gr.

(Roma). Raccolta ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia, serie 3ª, vol. XCVI, n. 6592-6849; vol. XCVII, n. 6850-6853. Roma, 1890; in-8°.

G. CORA (Torino). * Cosmos — Comunicazioni sui progressi più recenti e notevoli della Geografia e delle Scienze affini, del Prof. Guido CORA; vol. X, n. 4. Torino, 1890; in-8° gr.

Torino. Rivista storica italiana — Pubblicazione trimestrale diretta dal Prof. C. RINAUDO, ecc.; anno VII, fasc. 2. Torino, 1890; in-8°.

Istit. Canadiano (Toronto). Proceedings of the Canadian Institute, Toronto; being a continuation of the « Canadian Journal of Science, Literature and History »; third series, vol. VII, fasc. 2; whole series, vol. XXV, n. 153. Toronto, 1890; in-8°.

La Direzione (Valle di Pompei) Il Rosario e la Nuova Pompei; Periodico mensuale benedetto tre volte dal Papa Leone XIII, anno VII, quad. 6-11. Valle di Pompei, 1890; in-8°.

R. Istit. Veneto (Venezia). * Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. XXXVIII, serie 7ª, t. I, disp. 7-9. Venezia, 1890; in-8°.

Ateneo Veneto (Venezia). * L'Ateneo Veneto: Rivista mensile di Scienze, Lettere ed Arti, diretta da A. S. DE KIRIAKI e L. GAMBARI; serie 14, vol. I, fasc. 5-6; vol. II, fasc. 1-2. Venezia, 1890; in-8°.

Venezia. I diarii di Marino Sanuto, ecc.; t. XVIII, fasc. 128-132. Venezia, 1890; in-4°.

Bibliot. comun. di Verona. * La Biblioteca comunale e gli antichi Archivi di Verona, nell'anno 1889. Verona, 1890; 1 fasc. in-8° gr.

Istit. Smiths. (Washington). * Fift and Sixt annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution: 1883-84, 1884-85; by I. W. POWELL Director. Washington, 1887-88; 2 vol. in-4°.

Id. — Bibliography of the Iroquoian languages; by James Constantine PILLING. Washington, 1888; 208 pag. in-8°.

Digitized by Google

— Bibliography of the Muskhogean languages; by J. C. PILLING. Washington, 1889; 114 pag. in 8°. — Istit. Smiths. (Washington).

— The circular, square and octagonal earthworks of Ohio; by Cyrus THOMAS. Washington, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Texile fabrics of ancient Peru; by William H. HOLMES. Washington, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

— The problem of the Ohio mounts; by Cyrus THOMAS Washington, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Camera dei Deputati — Discorsi pronunziati dal Ministro Paolo BOSELLI nella discussione del bilancio del Ministero della Pubblica Istruzione per l'anno 1890-91. Roma, 1890; 1 vol. in-8° picc. — S. E. P. BOSELLI.

Sul *Pietro Verri* del signor BOUVY; Nota del Dott Gaetano SANGIORGIO. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Opere postume di Pietro CERETTI — Sinossi dell' enciclopedia speculativa; per cura, con note ed introduzione di Pasquale D'ERCOLE. Torino, 1890; 1 vol. in-8° gr. — Signora Argia FRANZOSINI-CERETTI.

Dott. Costantino CODA — Nuovo aiuto agli studiosi di Lettere italiane nelle scuole ginnasiali e liceali. Torino, 1889; 1 vol. in-8° picc. — L'A.

Opere postume di Pietro CERETTI, I — Poesie giovanili, precedute da un'avvertenza generale Torino, 1890; in-16° picc. — Id.

— — II — Grullerie poetiche, vol. I, con ritratto e prefazione dell' Autore. Torino, 1890; in-16° picc. — Id.

Popis arkeologickoga odjela nar. zem. Muzeia u Zagrebu; uredio Prof. Sime LJUBIC; Odsiek I, Svezak I; Ods. II, Sv. I U. Zagrebu, 1889-90; in-8°. — L'A.

Un viaggio a Nías, di Elio MODIGLIANI. Milano, 1890; 1 vol. in-8° gr. — L'A.

Dott. G. Battista PELLEGRINI — Versioni da Ovidio — Catullo — Orazio — Mimnenno; Canti: Tramonto — Giuseppe Parini, ecc. Mortara, 1890, 1 volumetto in-16°. — G B. PELLEGRINI

Risultati dell'inchiesta istituita da Agostino Bertani sulle condizioni sanitarie dei lavoratori della terra in Italia; Riassunto e considerazioni di Mario PANIZZA, Deputato al Parlamento. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr. — L'A.

Digitized by Google

L'Autore — Dott. Alfonso PROFESSIONE, del R. Ginnasio di Siena — Giulio Alberoni, dal 1708 al 1714. Siena, 1890; 82 pag. in-8°.

Id. — Dott. Alfonso PROFESSIONE, del R. Ginnasio di Siena — Dalla battaglia di Pavia al sacco di Roma: parte I: Dalla battaglia di Pavia al trattato di Madrid. Siena, 1880; 80 pag. in-8°.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
134 (350) 6 II-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 3ª, 1890-91

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente, il Socio Segretario presenta in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi autori, le pubblicazioni seguenti:

1° Un libro intitolato: *I cervelli dei microcefali* del Socio Prof. C. Giacomini:

2° Il vol. V del *Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia* comparata della R. Università di Torino (dal n. 74 al n. 92):

3° Dieci opuscoli intorno ad argomenti di geologia, idrologia e paleontologia del Prof. Federico Sacco.

Il Socio Ferraris presenta e legge una Memoria dell'Ingegnere Elia Ovazza, Assistente nella R. Scuola d'Applicazione per

Digitized by Google

gl'Ingegneri in Torino, intitolata: *Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite.*

Il Socio Basso presenta una Nota del Dott. Guido Valle, Assistente per la Geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Torino, intitolato: *Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche.*

Il Socio Camerano presenta un lavoro del Dott. Fr. Saverio Monticelli che ha per titolo: *Osservazioni intorno ad alcune forme del genere Apoblema Dujard.*

I tre scritti ora menzionati saranno pubblicati negli *Atti.*

Infine il Socio Camerano, condeputato col Socio Spezia, legge una Relazione, che sarà inserita negli *Atti*, sopra il lavoro del signor Filippo Cantamessa, intitolato: *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti ed il Mastodon (Tetrolophodon) arvernensis; Osteografia ed osservazioni.*

Accogliendo le conclusioni della Relazione, la Classe ammette il lavoro del signor Cantamessa alla lettura, e poscia ne approva l'inserzione ne' volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite;

Memoria dell'Ingegnere ELIA OVAZZA.

Assunto.

1. Argomento della presente Nota è lo studio della resistenza di attrito che viene provocata nel moto relativo degli elementi costituenti la coppia cinematica *vite* e *madrevite.*

Partendo dal concetto che i *perni* non costituiscono che un caso speciale di tale coppia, si estenderanno alle viti le teorie oggidì in uso circa la resistenza di attrito nei perni; questo studio dell'argomento, più rigoroso di quello che ordinariamente si suol fare nei corsi di meccanica generale, varrà a stabilire il grado di approssimazione dei risultati dedotti dalle arbitrarie ipotesi che in tali corsi vengono fatte al solo fine di appianare le difficoltà della trattazione.

2. Assumeremo come caso generale quello in cui la vite ha *pane triangolare*, cioè tocca la madrevite secondo due porzioni di *elicoidi a direttrice rettilinea*, del resto comunque. (Secondo che *entrambi* questi elicoidi sono *retti*, oppure è *retto uno solo* di essi, si hanno rispettivamente i casi speciali della vite a *pane rettangolare* e della vite a *pane trapezioidale*).

Di più supporremo sempre in seguito che la *chiocciola sia fissa*, la vite invece mobile, con *asse verticale*, e *sollecitata da un peso Q* secondo l'asse.

In tali ipotesi ci proponiamo i seguenti due quesiti:

A) *Determinazione del momento M della coppia, agente in piano normale all'asse del meccanismo, capace di vincere la forza Q e le resistenze di attrito che l'accompagnano*, sia portando il meccanismo allo stato prossimo al moto, e sia mantenendolo in moto uniforme quando abbia abbandonato lo stato di riposo.

Digitized by Google

B) *Determinazione delle condizioni geometriche cui deve soddisfare il meccanismo, affinchè rimanga in riposo al cessare della potenza, permanendo la resistenza principale Q.*

Equazioni generali.

3. Per un elemento qualunque, A, di area $d\omega$, della superficie elicoidale di contatto fra vite e chiocciola (fig. 1ª e 2ª) conducansi: la verticale AV, la generatrice AG dell'elicoide, la tangente AT all'elica intersezione dell'elicoide col cilindro coassiale passante per A, la normale AN all'elicoide, e la proiezione AO della AT sul piano orizzontale per A. Si indichino rispettivamente con α, β, θ, x gli angoli VAG, VAT, VAN ed NAO, e con r la distanza dell'elemento A dall'asse del meccanismo.

Considerata la vite come sistema invariabile in equilibrio dinamico sotto l'azione della coppia motrice M, della resistenza Q e delle reazioni e resistenze offerte dalla chiocciola, applichiamo il Principio delle velocità virtuali attribuendo alla vite: 1° una traslazione virtuale infinitesima δh secondo l'asse ed a ritroso del peso Q; 2° una rotazione virtuale infinitesima $\delta\varepsilon$ attorno all'asse della vite e pel verso della coppia M.

Indicando con p la pressione normale unitaria fra vite e chiocciola in corrispondenza dell'elemento superficiale qualunque A e con f il coefficiente di attrito, si ottengono le equazioni di equilibrio dinamico:

$$\left\{\begin{array}{l} -Q\,.\,dh + dh\,.\iint p\cos\theta\,.\,d\omega - f\,.\,dh\,.\iint p\cos\beta\,.\,d\omega = 0 \\ M\,.\,d\varepsilon + d\varepsilon\,.\iint pr\cos x\,.\,d\omega - f\,.\,d\varepsilon\,.\iint pr\,\text{sen}\,\beta\,.\,d\omega = 0\,, \end{array}\right.$$

ove i doppi integrali vanno estesi a tutta la superficie di contatto fra vite e madrevite.

Da queste equazioni deduconsi le seguenti:

$$Q = \iint p\,(\cos\theta - f\cos\beta)\,d\omega \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$M = \iint pr\,(f\,\text{sen}\,\beta - \cos x)\,d\omega \qquad \ldots\ldots (2),$$

che *risolvono il quesito A)*, quando sia nota la legge di variazione della pressione normale unitaria p lungo la superficie di contatto.

Digitized by Google

4. Fatto $M=0$, e cambiato di segno il coefficiente f, le (1) e (2) trasformansi nelle:

$$Q=\iint p\,(\cos\theta+f\cos\beta)\,d\omega \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\iint p\,r\,(f\operatorname{sen}\beta+\cos x)\,d\omega=0 \qquad \ldots\ldots (4),$$

che *risolvono il quesito B*), previa eliminazione di p.

5. Alle equazioni (1) a (4) vanno aggiunte altre due, *relazioni geometriche necessarie fra gli angoli* α, β, θ ed x.

Tracciata con centro A una superficie sferica qualunque, (fig. 1), e segnatavi la figura che le rette AT, AG, AN ed AV vi determinano, dalla considerazione dei triangoli sferici rettilateri NVT ed NVG risulta:

$$\cos\Psi=-\operatorname{cotg}\theta\,.\operatorname{cotg}\beta$$

$$\cos\Phi=-\operatorname{cotg}\theta\,.\operatorname{cotg}\alpha\,;$$

onde poichè

$$\Phi+\Psi=\frac{3}{2}\pi\,,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\beta} \qquad \ldots\ldots (5).$$

Per altro dalla considerazione dei triangoli rettilateri ONV, ONT', (fig. 2ª), ricavasi:

$$-\cos x=\operatorname{sen}\theta\,.\cos\lambda$$

$$\cos\theta\,.\cos\beta=\operatorname{sen}\theta\,.\cos\lambda\,.\operatorname{sen}\beta\,.$$

Di qui la 2ª delle cercate relazioni geometriche:

$$\cos x=-\cos\theta\,.\operatorname{cotg}\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cosec}^2\alpha\,.\operatorname{tg}^2\beta}}\ldots \qquad (6).$$

6. Posto $\alpha=\frac{\pi}{2}$ le (5) e (6) dànno:

$$\theta+\beta=\frac{\pi}{2}\,, \qquad x+\beta=\pi\,;$$

Digitized by Google

e le (1) a (4) riduconsi alle seguenti, valevoli per vite a ***superficie di contatto elicoide retta:***

$$\left\{\begin{array}{ll} Q=\iint p\,(\operatorname{sen}\beta-f\cos\beta)\,d\omega & \ldots (1') \\ M=\iint p\,r\,(f\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)\,d\omega & \ldots (2') \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} Q=\iint p\,(\operatorname{sen}\beta+f\cos\beta)\,d\omega & \ldots (3') \\ 0=\iint p\,r\,(f\operatorname{sen}\beta-\cos\beta)\,d\omega & \ldots (4'). \end{array}\right.$$

7. Posto nelle (1) e (2) $\beta=\frac{\pi}{2}$ (= costante),

deduconsi le formole relative ai *perni conici di spinta:*

$$\left\{\begin{array}{ll} Q=\iint p\operatorname{sen}\alpha\,.\,d\omega & \ldots (1'') \\ M=f.\iint p\,r\,.\,d\omega & \ldots (2'') \end{array}\right.$$

da cui per $\alpha=\frac{\pi}{2}$ si hanno le formole relative ai *perni di spinta cilindrici:*

$$\left\{\begin{array}{ll} Q=\iint p\,d\omega & \ldots (1''') \\ M=f.\iint p\,r\,d\omega & \ldots (2''') \end{array}\right.$$

Trattazione approssimata ordinaria.

8. Suppongasi *costante la pressione unitaria p*, e detta Ω l'area totale della superficie elicoidale di contatto fra vite e chiocciola, *assumasi in via di approssimazione:*

$$\left.\begin{array}{ll} \iint\cos\theta\,.\,d\omega=\Omega\,.\cos\theta_m\ , & \iint r\cos x\,.\,d\omega=r_m\,.\,\Omega\,.\cos x_m \\ \iint\cos\beta\,.\,d\omega=\Omega\,.\cos\beta_m\ , & \iint r\operatorname{sen}\beta\,.\,d\omega=r_m\,.\,\Omega\,.\operatorname{sen}\beta_m \end{array}\right\}(7),$$

contrassegnando con l'indice m i valori delle varie quantità corrispondenti ad elementi superficiali giacenti lungo l'elica di raggio medio della superficie di contatto, cioè lungo l'elica generata

Digitized by Google

dal punto medio del segmento rettilineo generante detta superficie.

Eliminando p fra le (1) e (2), e dalla (4), avremo:

$$\begin{cases} M = \dfrac{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m}{\cos \theta_m - f \cos \beta_m} Q r_m & \dots\dots (8) \\ f \operatorname{sen} \beta_m = -\cos x_m & \dots\dots (9) \end{cases}$$

E nel caso di vite a *superficie di contatto elicoidale retta* (che d'ora in avanti, per brevità, diremo *vite rettangolare*), $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, posto $f = \operatorname{tg} \varphi$:

$$\begin{cases} M = Q r_m . \operatorname{cotg} (\beta_m - \varphi) & \dots\dots (8') \\ \beta_m = \dfrac{\pi}{2} - \varphi & \dots\dots (9') \end{cases}$$

9. Posto $f = 0$, e quindi $\varphi = 0$, si ottengono le relazioni corrispondenti all'ipotesi che *non sieno provocate resistenze di attrito:*

$$\begin{cases} M' = Q r_m . \operatorname{cotg} \beta_m & \dots\dots (8_i) \\ \beta_m = \dfrac{\pi}{2} & \dots\dots (9_i) \ (*) \end{cases}$$

Il coefficiente di rendimento del meccanismo ha quindi per espressione:

Per vite a pane triangolare

$$\mu = \frac{\cos \theta_m - f \cos \beta_m}{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m} \operatorname{cotg} \beta_m \qquad \dots\dots (10)$$

E per vite rettangolare

$$\mu = \operatorname{tg} (\beta_m - \varphi) . \operatorname{cotg} \beta_m \qquad \dots\dots (10')$$

10. Le relazioni ricavate ai numeri 8 e 9 e le conseguenze che ne derivano, sono quelle ordinariamente esposte nei

(*) Il meccanismo cessa di essere vite.

Digitized by Google

corsi di meccanica generale. Esse si possono direttamente dedurre mediante l'applicazione del principio delle velocità virtuali, supponendo le reazioni e resistenze offerte dalla madrevite concentrate in corrispondenza dell'elica di raggio medio r_m, ed attribuendo alla vite un opportuno movimento virtuale elicoidale attorno al suo asse, sì che *restino immediatamente eliminate dall'equazione* di equilibrio tali reazioni e resistenze. Il valore del parametro $\tau = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}$ di questo moto risulta dalle (8) ed (8'):

Per vite a pane triangolare

$$\tau = \frac{M}{Q} = \frac{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m}{\cos \theta_m - f \cos \beta_m} r_m \qquad \ldots (11)$$

E per vite rettangolare

$$\tau = r_m \, . \operatorname{cotg} (\beta_m - \varphi) \qquad \ldots (11').$$

A *guida di tale moto* virtuale elicoidale può assumersi l'elica di raggio r_m coassiale col meccanismo, la cui inclinazione determinasi come segue: Per un punto A della elica intersezione della superficie di contatto col cilindro coassiale di raggio r_m conducansi: la tangente AT a quest'elica, la normale AN all'elicoide, e la retta AR, giacente nel piano NAT ed inclinata ad AN dell'angolo φ di attrito, secondo la quale agisce la risultante della reazione normale elementare della madrevite, e della resistenza elementare di attrito. L'intersezione AD dei due piani condotti per A, uno tangente al cilindro di raggio r_m, l'altro normale ad AR, ha l'inclinazione dell'elica direttrice cercata. (*)

(*) È facile verificare in via puramente geometrica che il valore della tangente trigonometrica dell'angolo η che la retta AD fa con l'orizzonte coincide con quello del rapporto $\frac{\tau}{r_m}$, che si deduce dalla (11).

Segnate su una superficie sferica di centro A (figura 3[a]) le intersezioni R, N, T, D, G, V delle rette AR, AN, AT, AD, della generatrice AG dell'elicoide e della verticale AV, detto y l'angolo TAD, si ha dalla considerazione dei triangoli sferici rettilateri NVT e TRD; tralasciando per semplicità gli indici m:

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \beta . \cos \Psi \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{tg} y . \cos \Psi$$

Digitized by Google

Nel caso di vite rettangolare quest'elica direttrice e l'elica di raggio medio, r_m, si incontrano sotto angolo eguale all'angolo di attrito $\varphi = artgf$.

11. Definiscasi *elica media* di una vite quell'elica lungo la quale devonsi supporre concentrate le reazioni e resistenze della madrevite affinchè si consumi per attrito una quantità di lavoro eguale a quella effettivamente consumata.

Ciò posto, le ipotesi su cui fondansi gli sviluppi ai numeri 8, 9 e 10, si possono condensare nella seguente, la cui arbitrarietà è di evidenza immediata, che cioè *l'elica media coincida con quella di raggio medio.*

Gli sviluppi che seguono determineranno il grado di approssimazione, praticamente invero notevole, di questa ipotesi.

Nuove teorie.

12. Volendo stabilire ipotesi meno arbitrarie circa la legge di variazione della pressione normale unitaria p lungo la superficie di contatto fra vite e madrevite, distingueremo le viti in *nuove* ed *usate* od *in servizio corrente* (*).

13. Per le *viti nuove*, fra cui vanno poste quelle che servono come organi di collegamento e le viti di trasmissione per

---

Onde

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\theta}\operatorname{tg}\varphi = -f\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\theta}.$$

Ma

$$\eta = \frac{\pi}{2} - (\beta + y) ;$$

quindi

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} y} = \frac{f \operatorname{sen}\beta - \cos x}{\cos\theta - f\cos\beta} = \frac{\tau}{r_m}.$$

(*) La *cognizione esatta* del modo di ripartizione della pressione p sulla superficie di contatto dipende dalla teoria dell'elasticità, la quale fornisce, per la determinazione della pressione p in un punto qualunque, delle equazioni differenziali, la cui integrazione supera ancora le forze attuali dell'analisi.

Cfr. A. Castigliano, *Manuale pratico per gli Ingegneri.* Parte 2ª, p. 102, Torino.

Digitized by Google

un tempo più o meno breve del loro servizio, ammessa un'accurata lavorazione del meccanismo, del resto non difficile cogli odierni mezzi dell'arte, l'ipotesi più ammissibile, data la ristrettezza dei limiti fra cui varia l'angolo θ nei casi della pratica, è che *la pressione normale unitaria* p *non varii* da punto a punto della superficie di contatto (*).

Quest'ipotesi coincide con quella proposta pei perni nuovi dal WEISBACH (**), che la *proiezione sull'asse del meccanismo della pressione normale elementare in corrispondenza d'un elemento qualunque della superficie di contatto sia proporzionale alla proiezione dell'elemento su un piano normale all'asse.* Tale ipotesi verrà perciò da noi detta *ipotesi del* WEISBACH (***).

14. Trattandosi *di viti di trasmissione*, è noto che *con l'uso* va diminuendo la quantità di lavoro che consumasi per vincere le resistenze di attrito, onde l'artificio di fare andare a vuoto per qualche tempo il meccanismo prima di porlo definitivamente in opera. Questo fatto può spiegarsi come segue. Ammessa l'ipotesi suesposta del WEISBACH ed il principio di MORIN circa la proporzionalità fra resistenza di attrito e pressione normale, quando una vite nuova comincia a funzionare, in causa della diversa velocità che assumono i punti del meccanismo posti a differenti distanze dall'asse di rotazione, si consumano diverse quantità di lavoro per attrito in corrispondenza dei punti posti a differenti distanze dall'asse. Onde *un logoramento* che, misurato in direzione *normale* alla superficie di contatto è *non uniforme*, sì che in alcuni punti va crescendo la pressione normale unitaria a scapito di altri punti della superficie di contatto. Con l'uso, a poco a poco le parti in contatto vengono ad adattarsi così da stabilire un regime di pressioni normali, variabili in senso radiale, dipendente dalla forma iniziale del meccanismo e dal materiale onde questo è costituito. E poichè generalmente appunto queste pressioni, e quindi, per la legge di MORIN, le re-

---

(*) Cfr. A. CASTIGLIANO, l. c., pag. 103. — *Nota sul calcolo dei perni.*

(**) Cfr. WEISBACH, *Lehrbuch der Ing.- und Maschinen-Mechanik.* — *Die Zwischenmaschinen.*

(***) Cfr. Th. REYE, *Zur Theorie der Zapfenreibung.* — *Civilingenieur*, volume VI, 1860. — S. CAPPA, *Lezioni di Meccanica applicata alle macchine*, riassunte dall'assistente ing. Elia OVAZZA, 1890. Torino, Tip. e Lit. C. Giorgis.

Digitized by Google

sistenze di attrito che le accompagnano, risultano maggiori laddove è minore la velocità relativa degli elementi in contatto, viene a consumarsi una quantità totale di lavoro minore di quella che consumasi verificandosi l'ipotesi di WEISBACG.

Per altro, data la costanza della direzione in cui agisce la resistenza principale Q, *a regime* il logoramento deve avere nella direzione dell' asse del meccanismo grandezza *costante;* siccome poi è da ritenersi la quantità di lavoro consumata pel logoramento *crescente* con la quantità di lavoro consumata per attrito, di cui è parte, assumeremo *proporzionali* queste due quantità di lavoro.

Laonde il calcolo delle viti usate verrà fatto in base alle seguenti ipotesi, coincidenti con quelle assunte dal REYE pei perni usati (*), e che diremo appunto *ipotesi del* REYE:

Il logoramento delle parti in contatto abbia grandezza costante in direzione dell'asse del meccanismo.

Il volume di materia esportato in direzione dell'asse ed in corrispondenza di un elemento qualunque della superficie di contatto sia proporzionale al lavoro consumato contemporaneamente dalla resistenza di attrito provocata in corrispondenza del medesimo elemento.

Meccanismi nuovi.

15. Supposto p costante, ed eliminato p fra le (1) e (2), si ha:

$$M_1 = \frac{\iint r\,(f \operatorname{sen}\beta - \cos x)\,d\omega}{\iint (\cos\theta - f\cos\beta)\,d\omega}\,Q \qquad \ldots (12).$$

E dalla (4)

$$\iint r\,(f \operatorname{sen}\beta + \cos x)\,d\omega = 0 \qquad \ldots (13),$$

Tenendo conto delle (5) e (6) ed osservando che, detto $d\varepsilon$ l'angolo elementare dei due piani passanti per l'asse della vite e limitanti l'elemento superficiale $d\omega$, può porsi:

$$d\omega = \frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta} \qquad \ldots (14),$$

(*) Cfr. Th. REYE, l. c., e CAPPA-OVAZZA, l. c.

Digitized by Google

mentre per altro r e β sono indipendenti da ε, le (12) e (13) trasformansi nelle:

$$M_1 = \frac{\int_{r_i}^{r_e} r^2 (f \operatorname{sen} \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta} + \operatorname{cotg} \beta)\, dr}{\int_{r_i}^{r_e} r (1 - f \cos \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta})\, dr} Q \quad \ldots (12')$$

$$\int_{r_i}^{r_e} r^2 (f \operatorname{sen} \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta} - \operatorname{cotg} \beta)\, dr = 0 \quad \ldots (13')$$

ove r_e ed r_i sono i valori estremi, maggiore e minore, della variabile r (*).

16. Dicasi h il passo, $H = \frac{h}{2\pi}$ il *passo ridotto* dell'elicoide di contatto, $S = \sqrt{H^2 + r^2}$ la *lunghezza ridotta d'una spira* dell'elica sezione dell'elicoide medesimo col cilindro coassiale di raggio r. Si ha:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{r}{S}, \qquad \cos \beta = \frac{H}{S} \qquad \ldots (15)_1$$

Quindi, posto per semplicità:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\beta_e}{\underset{\beta_i}{A}} &= \int_{\beta_i}^{\beta_e} \frac{d\beta}{\cos^4 \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \\ \overset{\beta_e}{\underset{\beta_i}{B}} &= \int_{\beta_i}^{\beta_e} \frac{d\beta}{\cos^2 \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \\ \overset{\beta_e}{\underset{\beta_i}{C}} &= \int_{\beta_i}^{\beta_i} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

(*) Poichè dalle (12') e (13') scompare la variabile ε, deducesi che *sui ri-*

ove β_e β_i sono i valori di β per le eliche estreme, esterna ed interna, dell'elicoide di contatto, alle (12) e (13) può ancora darsi la forma seguente:

$$M_1 = M' + \frac{fH^2}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha}{\int_{r_i}^{r_e} r\,.\,dr - \frac{fH^2}{\operatorname{sen}\alpha}\left[B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha\right]} QH \quad \ldots (17)$$

$$\left(A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\right) - \left(B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\right)\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{fH^2}\int_{r_i}^{r_e} r\,.\,dr \,.\,.(18).$$

ove M' conserva il significato ed il valore che ha nella (8_i).

Ci riserbiamo di eseguire in seguito gli integrali (16), che ricompariranno ulteriormente.

Meccanismi usati.

17. Detta da la grandezza del logoramento del meccanismo, avvenuto in un tempo infinitesimo, misurata in direzione dell'asse della vite, il volume di materia esportato in corrispondenza di un elemento $d\omega = \frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta}$ della superficie di contatto è misurato da $r.dr.d\varepsilon.da$. Se quindi indicasi con ds lo spazio relativo simultaneo delle due superficie di contatto in corrispondenza dell'elemento $d\omega$, e con A una costante di proporzionalità, le ipotesi del Reye vengono algebricamente espresse dalla relazione:

$$r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon\,.\,da = Afp\frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta}ds$$

per $da =$costante.

---

sultati del calcolo *non influisce il numero delle spire di contatto* fra vite e chiocciola, come ordinariamente suolsi ammettere come diretta conseguenza del principio di Morin che la resistenza di attrito è indipendente dall'estensione della superficie di contatto.

Digitized by Google

Eliminata la variabile s mediante la relazione geometrica

$$ds = \frac{dh}{\cos\beta};$$

ove dh è il valore comune delle proiezioni, sull'asse, degli spazii relativi in corrispondenza dei singoli elementi di contatto, ricavasi la nuova più semplice relazione:

$$p = C\cos\theta \, . \cos\beta \, , \ldots \qquad \ldots (19,$$

C essendo una costante da determinarsi.

18. Se facciamo crescere β a partire da *zero*, e cioè consideriamo sulla superficie di contatto eliche coassiali i cui raggi crescano a partire da zero, il prodotto $\cos\theta . \cos\beta$ cresce a partire da zero fino a raggiungere un massimo, $\frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$, in corrispondenza del valore β_1 di β per cui

$$\cos\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{1+\text{sen}\,\alpha}},$$

per decrescere nuovamente tendendo a zero col tendere di β a $\frac{\pi}{2}$.

Mediamente avendosi $\alpha = 62° \, 30'$ (viti triangolari), risulta: $\beta_1 = 43° \, 10' \backsim$, quantità da cui discostansi notevolmente, superandola, gli ordinari valori dell'angolo β.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (viti rettangolari), risulta $\beta_1 = 45°$.

Segue che praticamente può ritenersi che il prodotto $\cos\theta$. $\cos\beta$, e quindi la pressione normale unitaria p sia *decrescente col crescere del raggio* r (*), onde si deduce quanto fu premesso a numero 14.

(*) Crediamo vano il riportare qui la ricerca dell'angolo β_1. Ci limitiamo ad esporre nella figura 4ª la costruzione grafica di una coppia di segmenti, *AB* e *CD*, il cui rapporto misura il valore del prodotto $\cos\theta \cos\beta$ per fissati valori degli angoli α e β. Da tale figura deducesi facilmente in via sintetica l'indicato modo di variazione del prodotto di cui trattasi. Invero pel variare

Digitized by Google

È notevole che il valore di p nel caso delle viti, dietro le ipotesi del Reye, non può assumere valore infinito, anomalia che invece presentasi nella trattazione dei perni di spinta (*).

19. Eliminata p fra le (1) e (2) mediante la (19), si ottiene per valore di M:

$$M_2 = \frac{\iint r \cdot \cos\theta \cdot \cos\beta\,(f \operatorname{sen}\beta - \cos x)\, d\omega}{\iint \cos\theta \cdot \cos\beta \cdot (\cos\theta - f\cos\beta)\, d\omega}\, Q \quad \ldots (20).$$

E la (4) per la (19) trasformasi nella:

$$\iint r \cdot \cos\theta \cdot \cos\beta \cdot (f \operatorname{sen}\beta + \cos x)\, d\omega = 0 \quad \ldots (21).$$

Le quali relazioni (**) tenendo conto delle (5), (6), (14) e (16) riduconsi alle seguenti:

$$M_2 = M' + \frac{f}{H} \frac{\int_{r_i}^{r_e} r \cdot dr}{\left(B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\right) \operatorname{sen}\alpha - f \int_{r_i}^{r_e} \frac{r\,dr}{r^2 + H^2}}\, Q \quad \ldots (22)$$

$$B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e} = \frac{f}{H^2 \operatorname{sen}\alpha} \int_{r_i}^{r_e} \frac{r^3\,dr}{r^2 + H^2} \quad \ldots (23).$$

---

di β da $\frac{\pi}{2}$ a 0, il segmento AB cresce da 0 ad AF, mentre il segmento CD cresce da AC_0 ad ∞.

La figura 5ª è caso speciale della precedente per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vite rettangolare) ed indica in modo ovvio che il rapporto $\frac{AB}{CD} = \cos\beta\cos\theta$ è massimo e vale $\frac{FA}{FC} = \frac{1}{2}$ per $\beta = \frac{\pi}{4}$.

(*) Cfr. Th. Reye, l. c.

(**) Sta ancora qui la osservazione fatta in nota a pag. 12.

Integrazioni.

20. Eseguiamo gli integrali (16). Essi appartengono alla categoria degli *integrali ellittici;* li esprimeremo anzitutto in funzione degli *integrali ellittici fondamentali.*

Indichiamo con A, B, C i corrispondenti integrali indefiniti:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int \frac{d\beta}{\cos^4\beta \, . \sqrt{1-\cos^2\alpha \, . \cos^2\beta}} \\ B &= \int \frac{d\beta}{\cos^2\beta \, . \sqrt{1-\cos^2\alpha \, . \cos^2\beta}} \\ C &= \int \frac{d\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha \, . \cos^2\beta}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (16').$$

Pongansi inoltre

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} - \beta \\ k &= \cos\alpha \\ \Delta &= \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (24).$$

Avremo:

$$A = -\int \frac{d\gamma}{\Delta \, . \operatorname{sen}^4\gamma}, \quad B = -\int \frac{d\gamma}{\Delta \, . \operatorname{sen}^2\gamma}, \quad C = -\int \frac{d\gamma}{\Delta} \ldots (16').$$

Con tali posizioni i primi due integrali ellittici fondamentali, seguendo le notazioni di LEGENDRE, assumono la forma:

$$E = \int \Delta \, . \, d\gamma \, , \qquad F = \int \frac{d\gamma}{\Delta} \qquad \ldots (25).$$

Avremo intanto

$$C = -F \qquad \ldots (26).$$

Per altro avendosi: (*)

$$d\,\frac{\cos\gamma \, . \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\gamma}}{\operatorname{sen}\gamma} = -\Delta \, . \, d\gamma + \frac{d\gamma}{\Delta} - \frac{d\gamma}{\Delta \, . \operatorname{sen}^2\gamma},$$

(*) Cfr. SERRET, *Calcul différentiel et intégral.* Vol. II, 1868, pag. 341.

Digitized by Google

risulta:

$$B = E - F + \Delta \operatorname{cotg} \gamma \qquad \ldots (27).$$

Analogamente, poichè

$$d \frac{\cos\gamma . \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}}{\operatorname{sen}^3 \gamma} = \frac{2(1+k^2)\, d\gamma}{\Delta . \operatorname{sen}^2 \gamma} - k^2 \frac{d\gamma}{\Delta} - 3 \frac{d\gamma}{\Delta . \operatorname{sen}^4 \gamma},$$

risulta:

$$A = \frac{2}{3}(1+k^2) B + \frac{k^2}{3} F + \frac{\cos\gamma}{3 \operatorname{sen}^3 \gamma} \Delta \qquad \ldots (28)$$

Onde:

$$\left.\begin{aligned}
A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\Big[(2-k^2)(E-F) + k^2 F + (3 - k^2 + \operatorname{cotg}^2\gamma)\, \Delta . \operatorname{cotg}\gamma\Big] \\
B - C\cos^2\alpha &= (E - F) + k^2 F + \Delta . \cot\gamma \\
A - B &= \frac{1}{3}\Big[(2k^2 - 1)(E-F) + k^2 F + (2k^2 + \operatorname{cotg}^2\gamma)\, \Delta . \operatorname{cotg}\gamma\Big] \\
B - C &= E + \Delta \operatorname{cotg}\gamma
\end{aligned}\right\} \ldots (29).$$

21. Pel calcolo degli integrali definiti $E_{\gamma_i}^{\gamma_e}$, $F_{\gamma_i}^{\gamma_e}$ si applicheranno le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
E_{\gamma_i}^{\gamma_e} &= E(\gamma_e) - E(\gamma_i) \\
F_{\gamma_i}^{\gamma_e} &= F(\gamma_e) - F(\gamma_i)
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots (30)$$

indicando con $E(\gamma)$ ed $F(\gamma)$ i corrispondenti integrali definiti fra i limiti 0 e γ, i cui valori deduconsi dai noti sviluppi in serie:

$$\left.\begin{aligned}
E(\gamma) &= \gamma - \frac{1}{2} k^2 Z' - \frac{1.1}{2.4} k^4 Z'' - \frac{1.1.5}{2.4.6} k^6 Z''' - \text{ecc.} \\
F(\gamma) &= \gamma + \frac{1}{2} k^2 Z' + \frac{1.3}{2.4} k^4 Z'' + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 Z''' + \text{ecc.}
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

posto:

$$Z' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^2\gamma . d\gamma, \quad Z'' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^4\gamma . d\gamma, \quad Z''' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^6\gamma . d\gamma, \text{ ecc.} \; (31').$$

Digitized by Google

I valori numerici di questi integrali Z per speciali valori della variabile γ sono dati dalle note *Tabelle del* LEGENDRE (*).

22. Praticamente per viti metalliche (**) γ_e varia fra 1° circa e 3° circa, e corrispondentemente γ_i fra 1° circa e 4° circa, sicchè la differenza $\gamma_e - \gamma_i$ resta sempre minore di 1°.

Dalle succitate tabelle di LEGENDRE le *differenze tabulari*, per variazioni di 1° della variabile γ, sono rispettivamente, arrotondando alla 5ª cifra decimale, per Z', Z'', Z''':

per $\gamma = 1°$	0,000 01	0	0
per $\gamma = 4°$	0,000 07	0	0

Segue che *con sufficiente approssimazione potremo senz'altro assumere:*

$$E = F = \gamma \qquad \ldots (31'),$$

con che le (29) si modificano nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[k^2\gamma + (3 - k^2 + \text{cotg}^2\gamma)\Delta\,.\,\text{cotg}\,\gamma\right] \\ B - C\cos^2\alpha &= k^2\gamma + \Delta\cot\gamma \\ A - B &= \frac{1}{3}\left[k^2\gamma + (2\,k^2 + \text{cotg}^2\gamma)\Delta\,.\,\text{cotg}\,\gamma\right] \\ B - C &= \gamma + \Delta\,.\,\text{cotg}\,\gamma \end{aligned}\right\} (29').$$

---

(1) LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral.* Tome 3°, 1816, pag. 178.

(2) Assunto come *medio* il tipo WITHWORTH, si ha $\alpha = 62°30'$, onde $k^2 = 0,213$. Inoltre mentre $r_e - r_i = 0,64\,h$, la somma $r_e + r_i$ oscilla fra $15\,h$ (grosse viti e $5\,h$ piccolissime viti). Onde risulta:

Per viti piccolissime: $\beta_e = \text{artg}\,\dfrac{2\pi r_e}{h} = 86°\,46'$ e $\gamma_e = 3°\,14'$

$\beta_i = \text{artg}\,\dfrac{2\pi r_i}{h} = 85°\,50'$ e $\gamma_i = 4°\,10'$

Per grosse viti: $\beta_e = 88°\,50'$, $\gamma_e = 1°\,10'$, $\beta_i = 88°\,43'$, $\gamma_i = 1°\,17'$.

Cfr. a proposito A. CASTIGLIANO, l. c., pag. 114.

Digitized by Google

23. Di più entro i limiti fra cui varia l'angolo γ, con grandissima approssimazione può ritenersi costantemente $\Delta = 1$ (*). Onde le (29') modificansi nelle più semplici:

$$\left.\begin{aligned} A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[k^2(\gamma - \operatorname{tg}\beta) + 3\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^3\beta\right] \\ B - C\cos^2\alpha &= k^2\gamma + \operatorname{tg}\beta \\ A - B &= \frac{1}{3}\left[k^2(\gamma + 2\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}^3\beta\right] \\ B - C &= \gamma + \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \ldots(29'').$$

Laonde, posto $r_e - r_i = 2\delta$, i corrispondenti integrali definiti fra i limiti β_i e β_e, assumono la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[-\left(\frac{2\delta}{H} + (\beta_e - \beta_i)\right)\cos^2\alpha + \frac{6\delta}{H} + \frac{r_e^3 - r_i^3}{H^3}\right] \\ B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha &= \frac{2\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)\cos^2\alpha \\ A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e} &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{4\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)\right)\cos^2\alpha + \frac{r_e^3 - r_i^3}{H^3}\right] \\ B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e} &= \frac{2\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i) \end{aligned}\right\} \ldots(32).$$

(*) $$\Delta = \sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

Onde restando col tipo WITHWORTH, arrotondando alla 4ª cifra decimale si ha:

Per piccolissime viti:

$$\Delta_e = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 17{,}72^2}} = 0{,}9997 \quad , \quad \Delta_i = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 13{,}70^2}} = 0{,}9994$$

e per grosse viti:

$$\Delta_e = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 49{,}14^2}} = 1 \quad , \quad \Delta_i = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 - 45{,}12^2}} = 1 .$$

Digitized by Google

24. Quindi le formole generali (17), (18), (22) e (23) riduconsi alle seguenti:

Viti nuove:

$$M_1 = M' + \frac{1 + \frac{\delta^2 + 3 r_m^2}{3 H^2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\beta_e - \beta_i}{2} \frac{H}{\delta}\right) \cos^2 \alpha}{\frac{r_m \operatorname{sen} \alpha}{f H} - 1 + \frac{\beta_e - \beta_i}{2} \frac{H}{\delta} \cos^2 \alpha} Q H \quad \ldots (33)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \varphi &= \left(1 + \frac{\delta^2}{3 r_m^2}\right) \operatorname{tg} \beta_m - \\ &- \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2H}{\delta}(\beta_e - \beta_i)\right] \cos^2 \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \beta_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots (34).$$

Viti usate:

$$M_2 = M' + \frac{2 f \delta}{\left[2 \delta - (\beta_e - \beta_i) H\right] \operatorname{sen} \alpha - f H \log \frac{S_e}{S_i}} Q r_m \quad \ldots (35)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\frac{2 \delta r_m}{H^2} - \log \frac{S_e}{S_i}}{2 \frac{\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)} \quad \ldots (36),$$

nelle quali $\frac{S_e}{S_i}$ è il rapporto fra le lunghezze delle spire dell'eliche estreme, esterna ed interna, limitanti la superficie elicoidale di contatto.

Viti rettangolari.

25. Fatto nelle precedenti formole $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se ne deducono le corrispondenti pel caso in cui il contatto fra vite e chiocciola

Digitized by Google

avvenga secondo un'*elicoide retto*, formole che *in via rigorosa ottenemmo pure direttamente* dalle (12') e (13'), (21) e (22):

Viti nuove:

$$M_1 = M + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{r_m}\right)^2 \frac{f}{1 - f \operatorname{cotg}\beta_m} Q r_m \qquad \ldots (33')$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \left(1 + \frac{\delta^2}{3 r_m^2}\right) \operatorname{tg}\beta_m \qquad \ldots (34').$$

Viti usate:

$$M_2 = M' + \frac{2\delta f}{2\delta - H(\beta_e - \beta_i) - f H \log \frac{S_e}{S_i}} Q r_m \qquad \ldots (35')$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{2\frac{\delta r}{H^2} - \log\frac{S_e}{S_i}}{2\frac{\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)} \qquad \ldots (36').$$

Viti in legno.

26. Per le dimensioni delle viti in legno non si dànno regole fisse. Dall'esame di parecchie di tali viti però noi deducemmo che mediamente si assume:

$$r_i = \frac{3}{4} r_m, \; r_e = \frac{5}{4} r_m, \quad h = 2\delta, \quad \text{onde} \quad \alpha = 63^\circ\, 30' \backsim$$

Con tali proporzioni risulta $k^2 = 0,199$, $\beta_e = 86^\circ\ 22' \backsim$, $\beta_i = 83^\circ\, 57' \backsim$; onde $\gamma_e = 3^\circ\, 38'$, $\gamma_i = 6^\circ\, 3'$, $\gamma_e - \gamma_i = 2^\circ \backsim$.

Per $\gamma = 6^\circ$ le differenze tabulari per 1° delle quantità Z', Z'', Z''', arrotondate alla 5ª cifra decimale, risultano rispettivamente:

0,00022, 0, 0

In oltre si ha $\Delta_e = 0,9996$ $\Delta_i = 0,9990$.

Laonde, *sebbene con alquanto minore approssimazione*, possiamo anche per le ordinarie viti in legno assumere le stesse formole (33), (34), (35) e (36) ottenute per le viti metalliche.

Digitized by Google

Avuto riguardo alla maggiore incertezza con cui si hanno i valori del coefficiente φ di attrito, non si ritiene opportuna la ricerca di speciali formole per le viti in legno.

Perni conici di spinta.

27. Posto $\beta = \frac{\pi}{2}$ (=costante) la (12') riducesi alla nota formola:

$$M_1 = \frac{2}{3} \frac{f}{\text{sen}\,\alpha} \frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^2 - r_i^2} Q \qquad \ldots (33')$$

che dà il momento, rispetto all'asse, della resistenza di attrito in un *perno conico di spinta* a generatrici inclinate di α sull'asse (*).

Posto ancora poi $\beta = \frac{\pi}{2}$ (=costante) nella (19) si ha la formola:

$$p = C\,\text{sen}\,\alpha \qquad \ldots (19')$$

esprimente la legge di ripartizione della pressione normale unitaria p sulla superficie dei *perni conici usati*. Da essa deducesi la nota relazione (*).

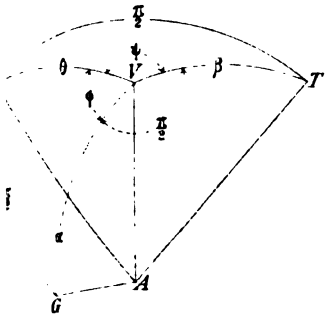
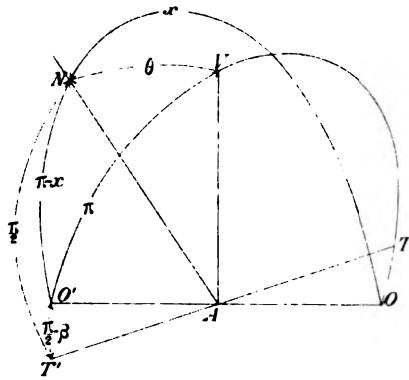
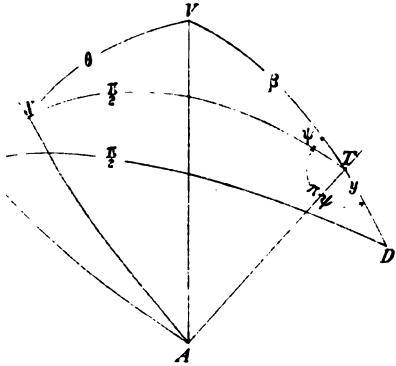
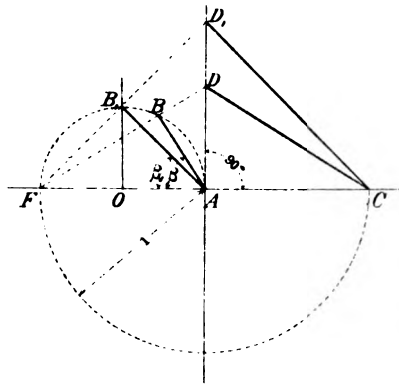
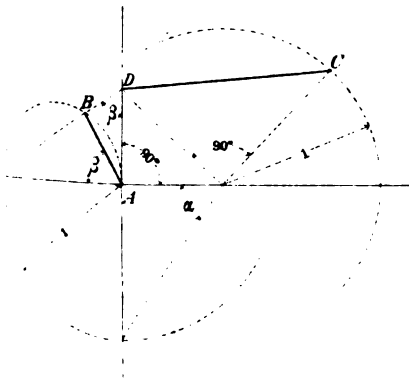
$$M_2 = \frac{1}{2} \frac{f}{\text{sen}\,\alpha} (r_e + r_i) Q \qquad \ldots (35')$$

che dà il momento della resistenza di attrito in un perno conico usato con generatrici inclinati di α sull'asse e premuta secondo l'asse da una forza Q.

Viti di pressione.

28. La vite, quando funziona come organo di pressione appoggia oltrechè sulla superficie elicoidale della madrevite, anche contro un piano, destinato appunto a ricèvere la pressione. Allo strisciamento sopra questo piano si oppongono altre resistenze di attrito, da calcolarsi come se si trattasse di un perno di spinta

(*) Cfr. *Des Ingegnieurs-Taschenbuch* herausgegeben von dem Verein *Hütte*. Edizione 13ª, pag. 124.

Digitized by Google

SULLA RESISTENZA DI ATTRITO

fra vite e madrevite

Ing. Elia Ovazza

Digitized by Google

cilindrico. Laonde in tal caso il momento M della potenza si ha sommando quelli dati dalle formole (33) e (33''), ovvero (35) e (35''), secondochè il meccanismo va considerato nuovo od in servizio corrente, posto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nelle (33'') e (35'').

Che se la potenza, invece che sotto forma di una *coppia* agente in piano normale all'asse del meccanismo, si applica *concentrata* all'estremità di un braccio solidale con la vite, vanno ancora considerate altre resistenze di attrito opponentisi al moto della vite funzionante in tal caso ancora come *perno a collare* (*).

Osservazione.

Da alcuni *risultati numerici* ottenuti applicando rispettivamente per diversi casi, limiti fra quelli della pratica, le ordinarie formole approssimate, quelle da noi trovate per meccanismi nuovi e quelle da noi pure trovate per meccanismi usati, deducesi (e questo dipendentemente dalla *poca sporgenza* del verme sul corpo della vite nei casi considerati) che le formole ordinariamente adottate sono *grandemente approssimate*.

Lo scarto massimo tra i valori del momento M della potenza corrispondenti ad uno stesso caso speciale è di 1:60, quantità trascurabile, data l'incertezza con cui le esperienze offrono il valore del coefficiente di attrito.

(1) Cfr. Reye, l. c., e Cappa-Ovazza, l. c.

Torino, 16 novembre 1890.

Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche;

Nota del Dott. GUIDO VALLE

Fra le varie trasformazioni di 2° ordine, per cui è soddisfatta l'equazione:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \ldots (1)$$

otto sono del tipo:

$$y = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2}$$

sei del tipo:

$$y = \frac{a + bx^2}{a' + b'x^2}$$

e *quattro* del tipo:

$$y = \frac{ax}{1 + bx^2}$$

in tutto *diciotto* trasformazioni distinte, che ABEL segnalò pel primo in una sua lettera a LEGENDRE [Oeuvres 1881, t. 1° pag. 568].

Orbene a queste *diciotto* trasformazioni *quattro* altre vanno aggiunte non state finora indicate da alcuno.

Infatti supponiamo che si debba soddisfare all'equazione:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \ldots (1')$$

mediante la relazione:

$$y = \frac{a\,x}{1 + bx^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Differenziando la (2) e poi sostituendo in (1') viene:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}=\\&=\frac{a(1-bx^2)\,dx}{\sqrt{[1-(a^2-2b)x^2+b^2x^4][1-(\lambda^2a^2-2b)x^2+b^2x^4]}}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Ed affinchè i secondi membri delle (1') e (3) coincidano, è necessario che il prodotto posto sotto quest'ultimo radicale sia divisibile, per $(1-bx^2)^2$, ed inoltre il quoziente sia una funzione in x di 4° grado.

Ora a questa condizione si può soddisfare in vari modi: infatti ponendo per brevità:

$$A=1-(a^2-2b)x^2+b^2x^4 \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$B=1-(\lambda^2a^2-2b)x^2+b^2x^4 \qquad \ldots\ldots(5)$$

potremmo supporre che sia:

$$A=(1-bx^2)^2 \qquad \ldots\ldots(6)$$

ovvero

$$B=(1-bx^2)^2 \qquad \ldots\ldots(7)$$

ovvero anche che A e B siano entrambi divisibili per $1-bx^2$.

Tuttavia quest'ultima ipotesi non è ammissibile, poichè essa porterebbe per conseguenza che la differenza:

$$A-B=(\lambda^2-1)a^2x^2$$

sarebbe divisibile per $1-bx^2$, mentre evidentemente non lo è, tranne il caso che fosse $A-B=0$, ciò che del resto non può mai avvenire, essendo λ diverso da 1 ed a diverso da zero. Rimangono dunque ad esaminare le due prime ipotesi, ciascuna delle quali ci fornisce una coppia di trasformazioni distinte.

Supponiamo dapprima:

$$A=1-2bx^2+b^2x^4 \qquad \ldots\ldots(6)$$

sostituendo nella (4) viene

$$1-(a^2-2b)x^2+b^2x^4=1-2bx^2+b^2x^4$$

Digitized by Google

donde si trae:

$$a^2 = 4\,b \qquad \ldots\ldots (8)$$

Ponendo questi valori di A e di a^2 nel 2° m. della (3), questo diviene:

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{1 - 2b\,(2\lambda^2 - 1)\,x^2 + b^2 x^4}}$$

ed affinchè il radicando assuma la forma canonica:

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 1 - (1 + k^2)\,x^2 + k^2 x^4$$

dovremo porre:

$$b^2 = k^2$$

$$2b\,(2\,\lambda^2 - 1) = 1 + k^2$$

dalle quali deriva:

$$b = \pm\, k$$

$$\lambda^2 = \frac{(1 \pm k)^2}{\pm\, 4\,k}$$

e quindi

$$\lambda_1 = \frac{1 + k}{2\sqrt{k}} \qquad \lambda_2 = \frac{1 - k}{2\,i\sqrt{k}}$$

Sostituendo nelle relazioni (2) ed (8) successivamente i valori di λ_1 e λ_2, avremo i due seguenti sistemi di relazioni:

$$\left.\begin{array}{lll} a = 2\sqrt{k} & y = \dfrac{2\sqrt{k}\,.\,x}{1 + kx^2} & \lambda = \dfrac{1 + k}{2\sqrt{k}} \\ a = 2i\sqrt{k} & y = \dfrac{2\,i\sqrt{k}\,.\,x}{1 - k\,x^2} & \lambda = \dfrac{1 - k}{2\,i\sqrt{k}} \end{array}\right\} \ldots (9)$$

Se invece supponiamo:

$$\mathrm{B} = 1 - 2b\,x^2 + b^2 x^4$$

allora confrontando questa con la (5), si trae:

$$1 - (\lambda^2 a^2 - 2b)\,x^2 + b\,x^4 = 1 - 2b\,x^2 + b^2 x^4$$

Digitized by Google

donde deriva:

$$\lambda^2 a^2 = 4b \qquad \ldots\ldots (10)$$

Sostituendo nel 2° m. della (3), questo diviene:

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{1 - a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)x^2 + \frac{\lambda^4 a^4}{16}x^4}}$$

Ed affinchè sia identicamente:

$$1 - a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)x^2 + \frac{\lambda^4 a^4}{16}x^4 = 1 - (1 + k^2)\,x^2 + k^2 x^4$$

dovrà essere:

$$\left.\begin{aligned} a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) &= 1 + k^2 \\ \frac{\lambda^2 a^2}{4} &= \pm k \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (11)$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{1 + k^2}{\pm 2\,k} \qquad \ldots\ldots (12)$$

donde

$$\lambda^2 = \frac{\pm 4\,k}{(1 \pm k)^2} \qquad \ldots\ldots (13)$$

e quindi

$$a = 1 \pm k \qquad \ldots\ldots (14)$$

Se ora nella (12) si assume il segno + e si aggiunge una volta +1 ed un'altra —1 ai due membri, avremo:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{(1+k)^2}{4\,k}$$

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = \frac{(1 - k)^2}{4k}$$

Digitized by Google

Dividendo m. a m. ed estraendo la radice quadrata, viene:

$$\pm\frac{1}{\lambda}=\frac{1+k}{1-k} \qquad \ldots\ldots (15)$$

Volendo invece assumere il segno — basterà mutare il segno a k, ed operando come prima si trova:

$$\pm\lambda'=\frac{1+k}{1-k} \qquad \ldots\ldots (16)$$

Dalle relazioni (15) e (16) si traggono i quattro seguenti valori di k:

$$k_1=\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}\ ; \quad \lambda_2=\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}=\frac{1}{k_1}\ ; \quad k_3=-\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}=-k_1\ ;$$

$$k_4=-\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}=-\frac{1}{k_1}$$

D'altra parte si ricava dalla (13):

$$\lambda_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\ ; \quad \lambda_2=\frac{-2\sqrt{k}}{1+k}=-\lambda_1\ ; \quad \lambda_3=\frac{2i\sqrt{k}}{1-k}=i\lambda_1\ ;$$

$$\lambda_4=\frac{-2i\sqrt{k}}{1-k}=-i\lambda_1\ .$$

Sostituendo questi valori di λ nella (10), indicando con ρ una radice dell'unità e tenendo presente la (14), si ricaveranno le due seguenti serie di relazioni:

per $\lambda=\pm\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ si ha: $a=(1+k)\rho$ e $b=+k$

per $\lambda=\pm\frac{2i\sqrt{k}}{1-k}$ si ha: $a=(1-k)\rho$ e $b=-k$

e quindi le due trasformazioni distinte:

$$y=\frac{(1+k)\rho x}{1+kx^2}$$

$$y=\frac{(1-k)\rho x}{1-kx^2}$$

Digitized by Google

Riassumendo potremo quindi formare la seguente tabella:

λ	k	a	y
$\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$	$\lambda \pm i\lambda'$	$2\sqrt{k}$	$\frac{2\sqrt{k}.x}{1+kx^2}$
$\frac{1-k}{2i\sqrt{k}}$	$\pm\lambda' - i\lambda$	$2i\sqrt{k}$	$\frac{2i\sqrt{k}.x}{1-kx^2}$
$\frac{\pm 2\sqrt{k}}{1-k}$	$\frac{1 \pm \lambda'}{1 \mp \lambda'}$	$(1+k)\rho$	$\frac{(1+k)\rho x}{1+kx^2}$
$\frac{\pm 2i\sqrt{k}}{1-k}$	$\frac{\lambda' \pm 1}{\lambda' \mp 1}$	$(1-k)\rho$	$\frac{(1-k)\rho x}{1-kx^2}$

Queste sono le *quattro* trasformazioni date per la prima volta da ABEL (loco citato) dipendenti dalla trasformazione generale:

$$y = \frac{ax}{1+bx^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ma è alquanto notevole che l'illustre autore non abbia avvertito il fatto che l'equazione (1') è pure soddisfatta mutando in essa y, λ ed a rispettivamente in: $-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{\lambda}$ e λa, e che per conseguenza *quattro* altre trasformazioni distinte saranno fornite dall'equazione:

$$y = -\frac{1+bx^2}{a\lambda x}$$

Digitized by Google

le quali io registro nella seguente tabella:

λ	a	y
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$1+k$	$-\frac{1+kx^2}{2\sqrt{k}.x}$
$\frac{2i\sqrt{k}}{1-k}$	$1-k$	$i\frac{1-kx^2}{2\sqrt{k}.x}$
$\pm\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$	$\pm 2\sqrt{k}$	$\mp\frac{1+kx^2}{(1+k)x}$
$\mp i\frac{1-k}{2\sqrt{k}}$	$\pm 2i\sqrt{k}$	$\mp\frac{1-kx^2}{(1-k)x}$

Si avrebbero adunque *quattro* trasformazioni di più che Abel non abbia segnalato. Ora se l'asserzione è vera, si richiede che pel medesimo modulo, per es. $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, si abbia simultaneamente:

$$y=\frac{1+kx^2}{2\sqrt{kx}} \quad \text{ed} \quad y=\frac{(1+k)x}{1+kx^2}$$

e che quindi ponendo:

$$\frac{1+kz^2}{2\sqrt{k}.z}=\frac{(1+k)x}{1+kx^2}$$

si possa esprimere z in funzione di x mediante relazioni note. Orbene risolvendo l'equazione precedente rispetto a z si trova:

$$z=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{(1+k)x\pm i\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+kx^2},$$

Ora è noto che ponendo:

$$x = S(u) \quad (*)$$

si ha:

$$S\left(u \pm i\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(1+k)S(u) \pm i\,C(u)\cdot\Delta(u)}{1 + hS^2(u)}$$

per conseguenza si avrà:

$$z = S\left(u \pm i\frac{k}{2}\right).$$

Il che conferma che alle *diciotto* trasformazioni di ABEL vanno aggiunte le *quattro* precedenti: sicchè si avranno in tutto *ventidue* trasformazioni del second'ordine tutte quante distinte.

Torino, Novembre 1890.

(*) Ponendo per brevità $S(u) = \text{sen}\,(\text{am}\,u)$.

Digitized by Google

RELAZIONE intorno alla Memoria del sig Filippo Cantamessa intitolata: « Il *Mastodonte* di Cinaglio d'Asti e il *Mastodon* (*Tetralophodon*) *arvernensis* ».

Il signor Filippo Cantamessa, Autore della Memoria affidata al nostro esame, trovò nel gennaio del 1884, uno scheletro intiero di Mastodonte nelle sabbie plioceniche marine sovrastanti alle marne azzurre nelle vicinanze di Cinaglio, piccolo villaggio a undici chilometri circa da Asti. Egli scavò i preziosi resti con gran cura e con grande diligenza ricompose lo scheletro. Ne risultò uno scheletro quasi completo ed in mirabile stato di conservazione.

Il Cantamessa ne imprese in seguito lo studio visitando per gli opportuni confronti i principali Musei d'Europa e studiando diligentemente i numerosi lavori riferentisi ai resti di Mastodonti fino ad ora conosciuti. Nello scritto sopradetto, che l'autore presenta per essere stampato nelle Memorie della nostra Accademia, egli ha riassunto le sue osservazioni intorno alla determinazione della specie alla quale appartiene lo scheletro del Mastodonte trovato a Cinaglio, sopratutto per quanto si riferisce al cranio che è la parte più importante per lo studio dei Mammiferi in discorso.

Le principali conclusioni alle quali è giunto l'Autore sono le seguenti:

1° Le dimensioni dello scheletro del Mastodonte di Cinaglio superano notevolmente quelle del Mastodonte di Dusino illustrato dal Sismonda e così pure quelle di tutti i resti di Mastodonte fino ad ora conosciuti. Questo carattere unitamente a quello presentato dagli incisivi inferiori fanno vedere nel Mastodonte di Cinaglio una qualche analogia col *Mastodonte ohioticus* sebbene esso indubitatamente si debba riferire alla specie. *M.* (*Tetralophodon*) *arvernensis* Croiset e Jobert.

Digitized by Google

2° Lo studio del cranio, notevolmente ben conservato, del *M.* di Cinaglio concede all'Autore di dare una diagnosi più sicura e completa del *M. arvernensis;* il che fino ad ora non era stato possibile di fare per l'insufficienza dei resti conosciuti.

3° L'affinità del *M. arvernensis* col *M. sivalensis* accennata dal Falconer e dal Leydekker viene confermata collo studio del *M.* di Cinaglio.

4° Lo studio del cranio del *M.* di Cinaglio porta un contributo importante per determinare il valore, come carattere diagnostico, della sinfisi del mento dei Proboscidati fossili.

5° Finalmente il rinvenimento del Mastodonte di Cinaglio ha particolare importanza per lo studio della geologia del Piemonte confermando l'esistenza in esso di proboscidati nelle sabbie gialle plioceniche marine; il che era stato contestato pel Piemonte dal Sismonda e dal Gastaldi. Esso serve pure a confermare il sincronismo del terreno fluvio-lacustre (alluvioni plioceniche) col pliocene superiore marino.

I sottoscritti, considerata l'importanza dei fatti nuovi annunciati nella Memoria dell'Autore in ordine alla Paleontologia dei Proboscidati fossili in generale, e in particolar modo in ordine alla geologia e paleontologia Piemontese, ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi Accademici.

G. Spezia.

L. Camerano, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice-Presidente, FLECHIA, Direttore della Classe, PEYRON, ROSSI, MANNO, BOLLATI di SAINT-PIERRE, PEZZI, FERRERO, NANI.

Il Socio PEYRON, a nome del Segretario Gaspare GORRESIO, legge il processo verbale della seduta precedente, il quale viene approvato.

Il Socio Antonio MANNO offre da parte dell'autore, Canonico Ulisse CHEVALIER, il volume *Oeuvres complètes de Saint-Avit, évêque de Vienne*, 2e édit. (Lyon, 1890), dandone dotti ragguagli.

Lo stesso Socio annuncia, che S. E. la Contessa Isabella SCLOPIS di SALERANO nata AVOGADRO, vedova dell'illustre Presidente dell'Accademia, testè deceduta, nelle sue disposizioni testamentarie destinò all'Accademia alcuni manoscritti, l'intero epistolario del compianto marito e le carte e i libri concernenti l'arbitrato dell'Alabama. Delle quali disposizioni lasciò esecutore lo stesso Socio MANNO.

La Classe accoglie con vivo gradimento questa notizia.

Il Socio Domenico PEZZI presenta, richiesto dall'autore, il libro del Dott. Prof. Gerolamo CURTO *Die Figur des Mephisto im Goethe'sche Faust* (Torino 1890) e fa una particolareggiata esposizione del concetto arditamente nuovo, che il CURTO si formò, espresse e sostenne nello scritto suo, della figura del Mefistofele göthiano.

Il Socio Ermanno FERRERO offre, da parte del Socio Corrispondente Roberto MOWAT, un opuscolo di questo col titolo: *Notice sur quelques bijoux d'or au nom de Constantin* (Parigi, 1890), nel quale principalmente è illustrata una fibula d'oro posseduta dal R. Museo d'antichità di Torino con iscrizione, che l'autore ingegnosamente riferisce a Costantino Cesare prima della sua esaltazione all'impero.

Digitized by Google

LETTURE

VINCENZO PROMIS

NUMISMATICO E BIBLIOTECARIO

ricordato

da ANTONIO MANNO

nel primo anniversario della sua morte

Rammemoro con affetto grandissimo e con semplicità e brevità di parole VINCENZO PROMIS, nostro collega giustamente rimpianto, lavoratore onesto ed infaticabile, amico mio intimo e dilettissimo.

La vita di lui è presto narrata. Nacque in Torino l'8 di luglio 1839 da Domenico e da Marianna Borbonese; fu laureato nelle leggi (1) e, dati gli esami per gli uffici del Ministero degli affari esteri (2), vinse il concorso e vi lavorò (3) sino a quando, trasferito quel Ministero, colla capitale, a Firenze, il padre lo volle ritenere con sè (4) e lo introdusse nella Biblioteca del Re (5) nel cui governo gli succedette (6) e della quale, finchè visse, fu vigile, premuroso ed intelligente custode e promotore.

Ricordate le sue aggregazioni alla nostra Accademia (7), alla

(1) Nell'Università di Torino il 1° giugno 1859.

(2) 1861.

(3) Applicato (1861), di 4ª classe (30 novembre 1862), di 3ª (25 luglio 1864).

(4) Aspettativa degli esteri (1865), dimissioni (21 luglio 1866).

(5) Assistente (1° novembre 1865).

(6) Reggente della Biblioteca e Medagliere di S. M. (1° marzo 1874), bibliotecario e conservatore del Medagliere (28 dicembre 1875).

Il padre, Domenico, morì, in Torino, addì 6 febbraio del 1874.

(7) Socio residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia delle scienze di Torino (27 giugno 1875).

Digitized by Google

Deputazione di storia patria (1), e a molte società scientifiche d'Italia e di fuori (2) ; ricordato il suo ufficio d'ispettore degli scavi (3), ed accennate le distinzioni equestri (4) da lui otte-

---

(1) Corrispondente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche province e la Lombardia (7 giugno 1870) e poi Socio effettivo (21 aprile 1874).

(2) Società Ligure di Storia patria, socio corrispondente (24 maggio 1871).

Société Académique du duché d'Aoste, membro effettivo non residente (15 giugno 1874).

Membro del Comitato del Museo civico di Torino (12 gennaio 1875).

Membro d. Società d'Archeologia e Belle Arti di Torino (1° maggio 1875).

Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie, membro onorario (13 gennaio 1876).

Numismatische Gesellschaft di Vienna, membro corrisp. (25 maggio 1876).

Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie, membro corrispondente (14 dicembre 1876).

Commissario provinciale, Conservatore dei monumenti, Rappresentante il Municipio di Torino (27 luglio 1876).

Société de Numismatique Belge, associato straniero (5 gennaio 1877).

Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie, membro aggregato (24 maggio 1877).

Società didascalica Italiana, socio onorario (21 settembre 1878).

Istitutum Archeologicum Imperii Germanici, Berolini, Romae, Athenis; socio corrispondente (21 aprile 1879).

Membro della Commissione dell'Esposizione d'Arte antica in Torino (1880).

Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo, socio onorario. (20 aprile 1880).

Société d'Histoire et d'Archéologie de la Maurienne (Savoie), membro corrispondente (20 novembre 1880).

The Numismatic and Antiquarian Society of Philadelphia, membro corrispondente (3 marzo 1881).

Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, socio corrispondente (3 febbraio 1882).

R. Deputazione di Storia patria per la provincia di Romagna, socio corrispondente (31 ottobre 1882).

Conseil Héraldique de France à Paris, membro onorario (1° maggio 1888).

R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, socio corrispondente (14 luglio 1889)

(3) Ispettore degli scavi e monumenti di antichità e belle arti della provincia di Torino (23 maggio 1875).

(4) Cav. della Corona d'Italia (5 settembre 1869).

Cav. dei SS. Maurizio e Lazzaro (30 dicembre 1877).

Uff. della Corona d'Italia (30 giugno 1881).

Comm. (con stella) dell'ordine austro-ungarico di Francesco Giuseppe (28 febbraio 1882).

Digitized by Google

nute, non procurate, apprezzate, non ostentate; della sua vita pubblica ogni cosa sarebbe detta.

Ma, per conoscerlo nell'intimo, debbo rifarmi sulla sua famiglia, sulla educazione ricevuta, sull'ambiente, come oggi si dice, in che crebbe e prosperò.

Vengono i Promis dal Mondovì, dove diramarono nella città, in Roburent ed altrove; nome antico che già trovasi fra i consiglieri del Comune nel 12° secolo (1).

Una loro branca, ora finita, conseguì nel secolo 18° l'onore vassallatico e qualche punto di giurisdizione feudale sopra Viola, per le nozze, celebrate nel 1748, da Pier Paolo Promis con Marianna dei marchesi di Ceva.

I nostri erano già in Torino nel 1700, dove vi nacque il tritavo di Vincenzo lasciando tre figliuoli: Giambattista che sposossi a Marianna Curti figlia di un antiquario, assai noto agli archeologi e cercatori di Londra e di Parigi; e due religiosi.

Così, fin da questa generazione, l'amore per le antichità, ed il culto alla religione, radicavansi nella famiglia Promis.

Nella generazione seguente furonvi due fratelli: Michele e Matteo.

Michele andò a Napoli e vi divenne ufficiale in quella Segreteria di Stato per gli affari esteri. Accompagnò il re Ferdinando IV che, il 24 dicembre 1798, fuggiva inorridito da Napoli per riparare a Palermo; ma nel fortunoso tragitto perì in mare, con parecchi del seguito; e ne morì il principino Alberto, terzogenito del Re.

L'altro fratello procreò Domenico e Carlo. Era Matteo un realista di antico stampo, di quelli che i Giacobini sberteggiavano come assorti nell'aspettazione della *settimana prossima*. Egli, fra gli eutusiasmi del maggio quattordici, profferse i suoi servigi, dapprima gratuitamente come segretario dell' Annona, e poscia in Zecca con ufficio di tesoriere.

Comm. della Corona di Rumenia (13 luglio 1883).

Comm. dell'Ordine bavarese di S. Michele (13 settembre 1883).

Comm. della Corona d'Italia (31 marzo 1884).

(1) Alzano lo stemma: d'oro al pino nodrito sulla pianura erbosa, al naturale, col capo d'azzurro, carico di tre stelle d'argento ordinate in fascia; col cimiero d'un pino movente dalla cresta del morione.

Digitized by Google

L'educazione dei zecchieri d'allora non era ristretta alle meschine pratiche del carteggio ed alle procedure cancelleresche; ma, per la necessità dei cambi, per la sterminata varietà dei tipi e dei titoli, per la diversità dei ragguagli, per le mutevoli ragioni in monete di conio e di conto; dovevano fare studi ed osservazioni che formavano un istradamento felice e pratico alla conoscenza della numismatica.

Domenico Promis, che pure s'era avviato in zecca (1), colla paterna istituzione e col maneggio delle monete che portavansi al crogiuolo, e delle importanti collezioni della R. Zecca di Torino (2), prese quell'amore all'interminabile studio della numismatica che poi lo fece celebre. Ed egli, a sua volta, riversò le proprie inclinazioni e la paterna tradizione, nell'animo del nostro Vincenzo che, fin da giovanotto, come mi narrava, amò radunare, ordinare e descrivere monete e medaglie, specialmente delle due nostre antichità e delle tante zecche italiane.

Fu colla provvida direzione del padre che Vincenzo intraprese, perfezionò e pubblicò la sua prima opera numismatica, quella che rimarrà e sempre sarà consultata dagli studiosi e dagli amatori; intendo le *Tavole sinottiche delle monete battute in Italia, o da Italiani all'estero, illustrate con note* (3).

Tra le numerose pubblicazioni numismatiche di Vincenzo Promis (4), i periti preferiscono quelle che informano sopra nuove medaglie, tessere e sigilli dei principi di Savoia. Ma solo chi lo conobbe potrà attestare come la sua pronta erudizione superasse, di molto, quella che comparisce ne' suoi scritti. Egli vi metteva meno di ciò che sapeva; proprio a rovescio dei vanerelli che, malgrado lo sfolgorare della critica odierna, riescono pur sempre ad appollaiarsi sulle cime.

---

(1) Cassiere (1824), Commissario (1836).

(2) Per i conii ora si conservano nel Museo civico torinese, per i libri e per i codici nella Libreria della R. Accademia delle scienze.

(3) Torino, Stamperia Reale, 1869, in-4°.

(4) Ne diedi l'elenco nella mia *Opera cinquantenaria della R. Deputazione di Storia patria* (Torino, 1884) ed in un libriccino di *Bibliografia Promisiana* (Torino, 1884). Quest'elenco fu compiuto, sino agli ultimi lavori, dall'egregio collega Ermanno Ferrero in una sua affettuosa commemorazione di V. P. nell'*Archivio storico italiano* (Firenze, 1890, S. V, t. V). Qui ne tralascio la ripetizione.

Digitized by Google

Ho detto che fu ammirabile e singolare la prontezza di erudizione numismatica in Vincenzo Promis. Quando gli si presentavano monete, egli, squadratele con occhio esperto e sicuro, senza esitare, tosto ne dichiarava il paese, l'età, le circostanze, i pregi e la rarità; imbroccando ventinove volte su trenta.

I numismatici fecero coniare a Domenico Promis, dopo la morte, una medaglia onoraria (1). Intendevano specialmente esprimere la loro gratitudine a chi, coltivando ed indirizzando le generose intenzioni di Carlalberto, dopo avere cedute a quel Re le sue private raccolte, formava con quadragenaria cura lo stupendo medagliere reale di Torino.

I numismatici sentirono dolorosamente la perdita immatura di Vincenzo Promis; di colui che, colla sua affabilità, generosità e premura, rendeva, per così dire, il regio medagliere, patrimonio comune degli studiosi. Anche dei lontani; perchè non si ricorreva giammai a Vincenzo Promis per notizie, senza che tosto egli, con indagini, con lettere, con calchi e getti di sua mano lavorati, tutti cercasse non che di soddisfare ma di spingere eziandio a nuove ricerche ed animarli a fargli nuove domande.

O tu, caro Vincenzo, fosti il modello dei custodi di pubbliche collezioni!

Quel continuo ragionare, in famiglia, di erudizione; quel ricordare le tradizioni piemontesi e sabaude; quelle dottissime conversazioni del padre e dello zio Carlo; quell'avergli il padre affidata la lunga e tediosa, ma istruttiva compilazione dei manoscritti della Reale; tutta questa minuta preparazione spiega le molte edizioni da lui procurate di testi, di documenti, di cronache, di lettere; le illustrazioni di cimeli d'antichità e di arte e le ristampe di opuscoletti fatti rari; spiega la inclinazione di Vincenzo agli studi che, in Piemonte, dove la patria piccola è tanto gloriosa e cara, noi, con giustificata antonomasia, chiamiamo di *storia patria*.

---

(1) *D. Busto a destra:* D. PROMIS NVMOPHYLACII REGII TAURIN. CUSTOS. — NATVS 4 MARTII 1804. OBIIT 6 FEBR. 1874. — Pieroni, Firenze.

R. OB EGREGIA | IN REM LITTERARIAM | PRAESERTIM | IN SCIENTIAM NVMISMATICAM | MERITA.

Digitized by Google

Egli a questi studi si preparò con quelli ingloriosi e faticosi dell' archeologia, della bibliografia, dell' araldica e della genealogia e vi acquistò tale perizia che sempre era pronto a rispondere, senza aprire libri.

Addito, ai non Piemontesi, il *Memoriale di Giovannandrea Salusso di Castellar* (1), che fornisce buone notizie per gli avvenimenti nostri dal 1482 al 1528; e ne sono quasi la continuazione i *Memorabili di Giulio Cambiano di Ruffia* (2), che protraggono le informazioni sino al 1611.

Il suo *Memoriale di Diego Colombo* (3) sarà ristudiato nelle prossime solennità Colombiane che, si può essere certi, non riusciranno di sole feste e chiacchiere.

Alla storia d'Asti, miniera largamente esplorata e profondamente coltivata dai medievalisti, egli arrecò un notevole sussidio colle *Cronachette astesi inedite* (4) e coi *Documenti spettanti a tre Monasteri d'Asti* (5). Avvantaggiò pure le storie genovesi con alcune pubblicazioni e specialmente colla notevole edizione degli *Statuti della Colonia genovese di Pera* (6). Utili e curiose le *Cento lettere concernenti la storia del Piemonte dal* 1544 *al* 1792 (7), fra le quali famose quelle di Andrea Provana che informa sulla battaglia di Lepanto. Un po' affrettata la trascrizione delle *Lettere di illustri italiani* (8), ma con scelta felice.

De' primi, in Piemonte, diede importanza agli inventari; due ne procurò del secolo 17° (9) e quello così notevole e gustato dei *Meubles, ornements religieux, vaisselle, tapisseries, etc., empruntés par le pape Félix V à l'hôtel de la Maison de Savoie* (10).

---

(1) *Miscell. St. Ital.*, 1869, VII, 409.

(2) Ibid., 1870, IX, 18[illegible].

(3) *Con note sulla bolla di Alessandro VI delli 4 maggio* 1493; in *Miscell. St. Ital.*, 1870, IX, 1.

(4) *Miscell St. Ital*,, 1879, IX, 125.

(5) Ibid., 1871, XI, 345.

(6) Ibid, 1871, XI, 513.

(7) Ibid., 1870, IX, 543.

(8) Ibid., 1871, XI, 345.

(9) Ibid., 1880, XIX, 209.

(10) *Mém. doc. Société Savoisenne*, 1875, XV, 297.

Digitized by Google

Fra le edizioni spiccano alcune di gran lusso e per occasioni. I *Documenti e Memorie* (1) che, d'ordine del Re, diede fuori per solennizzare le auguste nozze dei duchi di Genova, dimostrano nel Promis un fine gusto d'arte per la giudiziosa scelta, non che dei documenti, delle tavole.

Splendida nella veste e per l'occasione di un regalo del Re al Figlio, la *Divina Commedia* (2), il cui commento fu letto dal Promis e dal collega Carlo Negroni e finora si è attribuito ad un maestro monferrino che insegnava in un villaggio del Saluzzese.

Importante per conoscere le costumanze e le vicende del teatro, nei tempi di mezzo, *La passione di N. S. Gesù Cristo* (3), rappresentata nel secolo 15° in Revello, che Vincenzo Promis fece trascrivere da un codice asburniano proveniente dalle troppo famose collezioni, del troppo famoso Libri. Gastone Paris, di tanta autorità in cosifatti studi, segnalò ai dotti il valore del documento (4). Che se accennò a distrazioni di copia, non s'ha forse da scusare se, trascrivendo undici mila fastidiosi versi, *aliquando bonus dormitat amanuensis?*

Ho già narrato (5) come in lui ed in me nascesse l'idea della *Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia*. Ripeto che le collezioni di libri, a stampa ed a penna, della Biblioteca del Re, *regis opus* ma vanto e merito di Domenico e di Vincenzo Promis, resero possibile quel minuto e faticoso lavoro, che non avrei intrapreso e proseguito senza le eccezionali e fiduciose larghezze ch'ebbi, e mi si continuano (6), in quel santuario della scienza, in quell'arsenale della nostra storia. Già ho accennato (7), e ritorno ad affermare che, in questa compilazione, Vincenzo Promis mi aiutò nelle ricerche, ma per non ispezzare la tradizione del sistema nei criteri e negli alloga-

---

(1) *Le auguste alleanze fra le Case sovrane di Savoia e di Baviera nei secoli XV, XVII, XVIII* (Torino, 1883).

(2) Torino, 1886, e Milano, 1888.

(3) Fatta pubblica a spese dei fratelli Bocca, librai di S. M. (Torino, 1888).

(4) *Journal des Savants*, 1888.

(5) Prefazione alla *Bibliografia storica* (Torino, 1884).

(6) Dall'amorevole illustre collega Domenico Carutti, cui fu provvisoriamente affidato il governo della Biblioteca e del Medagliere.

(7) Nella prefazione suddetta.

Digitized by Google

menti; con nobile disinteresse continuamente mi lasciò libero nell'iniziativa, nella scelta e nell'applicazione. Cosicchè, coll'animo pieno di commozione, a lui lascio il merito che viene dalla ricchezza del materiale, ed io rispondo per l'architettura e per l'addobbo di questo grandioso edifizio che sto rassettando a benefizio comune e che ogni giorno mi rammenta le dolcezze di una serena amicizia, ed i sussidi di una alleanza di buon conto che, senza nubi, irradiò i migliori anni della mia virilità declinante.

Domenico Promis, uomo eruditissimo di antichità e di numismatica, con lunga pratica di ogni ragione di storia, sicura conoscenza di quella italiana ed intima della piemontese (1); affettava, più che non avesse, una certa trascuranza per l'abbigliamento dello stile ed esagerando soleva dire che nella sua Biblioteca non ci aveva messi neppure i quattro Poeti italiani, e sì che vi si trovano in esemplari di insigne preziosità.

Dal suo esempio Vincenzo attinse uno stile sobrio, una frase spoglia; che era semplicità e poteva parere deficienza.

Come usava Domenico, così soleva Vincenzo badare assai alla scelta dei documenti; ma entrambi erano forniti di così ricco corredo di cognizioni storiche che giudicavano superfluo sminuzzarlo in noterelle ed in illustrazioni. Essi conoscevano così a fondo i casi ed i personaggi delle storie che, quasi, temevano d'offendere i lettori col supporre che li ignorassero.

Così quelle graziosissime *Memorie aneddotiche* (2) che sulla nostra Corte lasciò scritte il Blondel segretario francese e che Vincenzo opportunamente pubblicò; con un po' di arredo e di attillatura sarebbero, non solamente consultate dagli eruditi, ma lette con curiosità e profitto dalle persone di mondo e di svago.

Della memoria dello zio Carlo fu tenerissimo e di lui raccolse, e pubblicò con diligenza, i lavori inediti. Ma mi domandai più volte come lo zio non avesse influito più sulla penna e sul pensiero del nipote.

---

(1) V. una mia anonima biografia di D. P. in *Supplemento perenne all'Enciclopedia popolare*. Torino, 1875.

(2) *Miscell. St. Ital.*, 1871, XIII, 458.

Digitized by Google

Uomo straordinario fu Carlo Promis, anzi tipo d'uomo: antitesi della volgarità, carattere ferreo, volontà adamantina in corpo sottile e delicato. Schivo di infingimenti di convenzione, svogliato per le comuni compiacenze, difficile di contentatura, severo con sè, paziente o noncurante dei mediocri; non mai sparlatore ed incurioso di maldicenze e di minutaglie. Grave, serio, burbero e salvaticone, quasi a discacciarsi i fastidiosi. Credente e filosofo con vampi di giambica energia contro ogni ragione di ciurmadori (1).

Fu dei primi, fra noi, a sposare alla erudizione archeologica una schietta eleganza di forme, venutagli dal lungo studio dei classici. Ed anche Vincenzo si compiacque dei classici, specialmente latini. Anzi, e non credo si sappia, ebbe facilità di dettato nello stile epigrafico ed in talune circostanze mi faceva leggere certe sue iscrizioni latine, argutamente facete, che dimostravano come facile avesse il maneggio di quella lingua e ne conoscesse le intime bellezze. Ma, negli scritti, preferì quella brevità, un po' asciutta che, quando è unita alla precisione ed all'aggiustatezza del linguaggio, è pur sufficiente nelle esposizioni erudite.

L'opera di Vincenzo Promis fu insuperabile nel governo della Biblioteca del Re, ricchissima di cimeli radunati con industre solerzia dai due Promis. Non posso mettere il piede in quella vasta e tranquilla galleria senza vedermelo, l'amico Vincenzo, tutto gaio e premuroso.

In quella Biblioteca egli visse. Quei libri erano per lui titoli di vanto, erano mezzi per largheggiare e beneficare.

Passò venticinque anni in quella Biblioteca, ed in questo quarto di secolo non un solo giorno, non uno, di vacanza.

Una volta il Re chiamollo a Monza, un'altra a Roma. Non appena v'udì i reali comandi, fece tacere ogni curiosità di antiquario e volossene a Torino per rientrare nella sua Biblioteca.

Alle incessanti richieste, egli, pur di rispondere, non risparmiava ricerche talora faticose, studi anche penosi; sempre era premuroso con amici e colleghi, paziente coi curiosi, sofferente cogli importuni, sereno cogli invidiosi e coi maligni che, non tutti, stanno cogli sfaccendati.

(1) V. la mia *Opera cinquantenaria* suddetta, p. 338.

Digitized by Google

Aiutato da memoria tenacissima, teneva in testa non solo il catalogo della libreria, ma le materie contenute nei libri. Cosicchè era guida amorevole, paziente e perita nei laberinti di quella immensità di libri e di codici. Largo e generoso non pativa i vizi che s'appongono ai bibliotecari: la gelosia, la diffidenza, la tenacità.

Con non larga dotazione ingegnavasi, non solamente di tenere a giorno le maggiori serie di libri e specialmente quelle patrie; ma, accorgendosi di avere un frequentatore serio, gli suggeriva e gli provvedeva libri opportuni e recenti.

D'animo candido e sincero; riguardoso e timidetto, ma pieno di nobile cortesia e di affettuose sollecitudini. Non conobbe che amici. La fede religiosa, sempre salda nella sua famiglia, in lui, da grazia s'era fatta convinzione, conforto e speranza.

In tempi agitati visse calmo e ritirato. La cosa pubblica non lo seduceva coll'ebbrezza delle lotte, colla necessità degli sfoghi, col pungolo dell'ambizione.

Non già che nascondesse le sue preferenze, o che non palpitasse per le vicende del paese. Ma, da me che con lui aveva unanimi i sentimenti ma più viva la passione, Vincenzo Promis non si lasciò mai persuadere che, quando le menti sono divise, nell'inazione *non media sed nulla via est* (1).

Breve di statura. complesso ma agile, collo sguardo buono, col sorriso sulle labbra, florido nelle guance. Sembrava che per lui gli anni non corressero di dodici mesi. Eppure un morbo repentino, misterioso e violento gli strozzò il respiro nella fatal notte sul 19 dicembre 1889, essendo in età d'anni cinquanta e mezzo.

Così era rapito ai dolcissimi affetti della madre e di due sorelle che sconsolate gli sopravvivono (2). Così era tolto alla soave consuetudine dei tanti amici: così alle continue occupazioni dei suoi studi; così alle cure ed all'incremento della sua Biblio-

(1) Liv., XXXII, 21.

(2) Fanny e Teofila. Un fratello minore, l'avvocato Enrico, morì di 32 anni il 9 d'ottobre del 1873, quando dava speranze di promettente carriera.

Digitized by Google

teca; di quella Biblioteca che tanto amò, tanto avvantaggiò; di quella Biblioteca che fu la prima, la maggiore, la costante sua sollecitudine esteriore; di quella Biblioteca nella quale e per la quale visse, formandola palestra di forti studi e riunione simpatica di serene amicizie.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 30 Novembre al 14 Dicembre 1890

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

	Donatori
* Bergens Museums Aarsberetning for 1889. Bergen, 1890; 1 vol. in-8°.	Direz. del Museo di Bergen.
* Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVIII, n. 1. Bruxelles, 1890; in-8°.	Società belga di Microscopia (Bruxelle).
* Resultados del Observatorio Nacional Argentino en Córdoba, etc; vol. XII, Observaciones del año 1879. Buenos Ayres, 1890; in-4°.	Acc. naz. delle Sc. in Cordova (Rep. Argentina).
* Proceedings of the Cambridge philosophical Society; vol. VII, part. 2. Cambridge, 1890; in-8°.	Società filosofica di Cambridge.
* The probable cause of the displacement of beach-lines; by Axel Blytt (Christiania Videnskabs - Selskabs Forhandlinger 1889, n. 1). Christiania, 1889; in-8°.	Acc. delle Scienze di Cristiania.
— Bidrag tel Kundskaben om Norges Hemipter-og Orthopter-Fauna, af W. M. Schöyen (Christiania Vid. - Selskabs Forhandl. 1889, n. 5). Christiania, 1889; in-8°.	Id.
— Ein Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen; von Sophus Lie (Christiania Vid. - Selsk. Forh. 1889, n. 7). Christiania, 1889; in-8°.	Id.

Digitized by Google

Acc. delle Scienze di Cristiania.

—— On some Freshwater Ostracoda and Copepoda, raised from Dried Australian Mud· by G. O. SARS (Christiania Vid. - Selsk. Forh. 1889, n. 8). Christiania, 1889; in-8°.

Id.

—— On a small Collection of Freshwater Entomostraca from Sydney, by G. O. SARS (Christiania Vid. - Selsk. Forh. 1889). Christiania, 1889; in-8°.

Id.

—— Professor Christen Smiths Dagbog paa Reisen til de Canarische Oer i 1815, ved. F. C. KIAER (Christiania Vid. - Selsk. Forh. 1889, n. 10). Christiania, 1889; in-8°.

Id.

—— Addenda et Corrigenda ad Enumerationem Bryinearum Dovrensium, auctore N. C. KINDBERG (Christiania Vid. - Selk. Forh. 1888, n. 6); auctore Ch. KAURIN (Christiania Vid. - Selk. Forh. 1889, n. 11). Christiania, 1889; in-8°.

Id.

—— Supplement til H. Siebke's Enumeratio Insectorum Norvegicorum, fasc. IV. (Diptera); af W. M. SCHÖYEN (Christiania Vid. - Selsk. Forh. 1889, n. 12). Christiania, 1889; in-8°.

Id.

—— Oversigt over Videnskabs-Selskabets Möder i 1889. Christiania, 1890; in-8°.

Società geologica di Edimborgo.

* Transactions of the Edinburgh geological Society; vol. VI, part. 1. Edinburgh, 1890; in-8°.

R. Accademia dei Georgofili di Firenze.

* Atti della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze; 4ª serie, vol. XIII, disp. 2ª. Firenze, 1890; in-8°.

J. V. CARUS (Lipsia).

* Zoologischer Anzeiger herausgegeben von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig, etc.; XIII Jahrg. n. 359. Leipzig, 1890; in-8°.

Soc. scientifica ANTONIO ALZATE (Messico).

* Memorias y Revista de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate »: t. IV, cuadernos 1 y 2. México, 1890; in-8°.

Osserv. meteor. del Messico

* Observatorio meteorológico-magnetico central de México; Boletin mensual t. II, n. 7-12. México, 1890; in-4°.

R. Osservatorio astron. di Brera (Milano).

* Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano; n. XXXVII. — Andamento annuale e diurno della pioggia nel clima di Milano per E. PINI. Milano, 1891; in-4°.

Oss. fisico-centr. di Pietroborgo.

* Annalen des Physikalischen central-Observatoriums herausgegeben von H. WILD; Jahrg. 1889, Theil I. St.-Petersburg, 1890; in-4°.

R. Oss. astronom. di Praga.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1889. Prag, 1890; in-4°.

Digitized by Google

* **Atti** dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, ecc.; anno XLIII, Sessione III del 23 febbraio 1890. Roma, 1890; in-4°.	Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei (Roma).
Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku) — The Calendar for the year 1889-90. Tookyo, 1889; 1 vol. in-8° picc.	Università imp. di Tokio (Giappone).
Internationale Erdmessung – Das Schweizerische Dreiecknetz herausgegeben von der Schweizerischen geodätischen Commission: V Band, – Astronomische Beobachtungen im Tessiner Basisnetze, auf Gäbris und Simplon definitive Dreiecksseitenlängen; geografische Coordinaten. Zurich, 1890 in-8°.	Comm. geodetica Svizzera (Zurigo).
Sur un théorème de M. Mannheim, par E. CATALAN. Rome, 1890; 1 fasc. in-8° gr.	L'Autore
Una gita sulle Madonie e sull' Etna; di Antonio DE GREGORIO. Torino, 1882; 1 fasc. in-8°.	L'A.
—— Nei dintorni di Palermo; di Antonio DE GREGORIO. Torino, 1889; 1 fasc. in-8°.	Id.
Conférence faite à la Société de Géographie, à Laon; par J. HENRIVAUX, Directeur de la manufacture des glaces. — Étude sur Saint-Gobain: I° Description historique, géologique du pays; II° Origine, développement de la manufacture des glaces. Tours; 1 fasc. in-8°.	L'A.
—— Le Verre et le Cristal, par M. J. HENRIVAUX (Extr. de divers journaux techniques français et étrangers, rendant compte de l'ouvrage de M. HENRIVAUX « Le Verre et le Cristal »): 1 fasc. in-8°.	Id.
—— Sur les dévitrifications des verres ordinaires du commerce; par MM. APPERT et HENRIVAUX (Extr. des *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, Institut de France); 4 pag. in-4°.	Id.
Résumé météorologique de l'année 1889 pour Genève et le Grand Saint-Bernard, par A. KAMMERMANN. Genève, 1890; 1 fasc. in-8°.	L'A.
La gamme musicale majeure et mineure, par Charles MEERENS. Paris, 1890; 1 fasc. in-8°.	L'A.
Il coccodrillo fossile (*Stencosaurus Barettoni*, Zigno) di Treschè, nei Sette Comuni; Cenni del Prof. Giovanni OMBONI. Venezia, 1890; 1 fasc. in-8°.	L'A.
Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche; II. Memoria del Prof. Augusto RIGHI. Bologna, 1890; 1 fasc. in-4°.	L'A

Digitized by Google

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

dal 7 al 21 Dicembre 1890

Donatori

Donatori	
R. Acc. delle Sc. di Christiania.	* Diplomatiske Aktstykker vedkommende Norges Opgjör med Danmark, 1818-1819, etc., udgivet af Dr. Yngvar NIELSEN (Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger 1889, n. 2). Christiania, 1890; in-8°.
Id.	— De gamle loves mynding, af Ebbe HERTZBERG (Christiania, Vid.-Selsks., etc., 1889, n. 3). Christiania, 1889; in-8°.
Id.	— Beiträge zur etymologischen Erläuterung der armenischen Sprache, von Dr. Sophus BUGGE (Christiania Vid.-Selsk., etc., n. 4). Christiania, 1889; in-8°.
Id.	— Om et myntfund fra Imsland i Ryfylke, af Dr. L. B. STENERSEN (Christiania Vid.-Selk. Forh., 1889, n. 6). Christiania, 1889; in-8°.
Università di Inspruk.	Akademische Behörden, Personalstand und Vorlese-Ordnung an der k. k. Leopold Franzens-Universität zu Innsbruck im Winter-Semester 1890-91. Innsbruck, 1890, 1 fasc. in-4°.
R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).	* Berichte über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; philologisch-historische Classe 1890, I. Leipzig, 1890; in-8°.
R. Istit. Lomb. (Milano).	* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIII, fasc. 17, 18. Milano, 1890; in-8°.
Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma).	* Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno VIII, n. 9, 10. Roma, 1890; in-8°.
(Venezia). * *	I diarii di Marino Sanuto, ecc.: t. XXX, fasc. 133. Venezia, 1890; in-4°.
Università di Giessen.	* Personal-Bestand der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität Giessen: Winter-Semester, von Oktober 1889 bis Ostern 1890: — Sommer-Semester, von Ostern bis Ende September 1890. Giessen, 1889-90; 2 fasc. in-8°.
Id.	Verzeichniss der Vorlesungen welche auf der Grossherzoglich hessischen Ludewigs-Universität zu Giessen, im Sommerhalbjahre 1890, und Winterhalbjahre 1890-91. Giessen, 1890; 2 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Festschrift Sr. k. Hoheit dem Grossherzoge von Hessen und bei Rhein Ludewig IV, zum 25 August 1889 gewidmet von Rector und Senat der Landesuniversität: Bemerkungen zur Kriminalstatistik der Grossherzogthums Hessen, besonders zur Statistik des Bettels und der Landstreicherei; von Dr. Hans BENNECKE. Giessen, 1889; 1 fasc. in-4°. — Università di Giessen.

Die politische Stellung der deutschen Städte von 1421-1431, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Betheiligung an den Reformbestrebungen dieser Zeit; Inaug.-Diss. zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosoph. Facultät der Gross Hess. Ludew.-Univ. zu Giessen; vorgelegt von Fritz DIETZ. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

De particularum « OTI et 'ΩΣ » apud Demosthenem usu; Dissert. inauguralis, quam ad summos in Philosophia honores, etc., rite impetrandos scripsit Guilelmus REEB. Gissae, MDCCCXC ; 1 fasc. in-8°. — Id.

De mutatis centuriis Servianis: Diss. inaug., quam ad summos in Philos. honores, etc., rite impetrandos scripsit Fridericus SCHMIDT. Gissae, MDCCCXC; 1 fasc. in-8°. — Id.

* Index Lectionum in Acad. Rostochiensi Semestri hiberno A. MDCCCLXXXIX-XC, ab die XVI m. Octobris publice privatimque habendarum: Interpretationum hexada alteram Fridericus MARX praemisit. Rostochii; 1 fasc in-4°. — Università di Rostock.

—— Semestri aestivo A. MDCCCXC, ab die XVI m. Aprilis publice privatimque habendarum: Quaestiones Herodoteas Edvardus SCHWARTZ praemisit. Rostochii; 1 fasc. in-4°. — Id.

—— Verzeichniss der Behörden, Lehrer, Institute, Beamten und Studirenden auf der Gross. Univ. Rostöck, Winter-Sem. 1889-90, und Sommer-Sem. 1890. Rostock, 1890; 2 fasc. in-8°. — Id.

—— Lehrplan der Juristen-Facultät zu Rostock; 2 pag. in-8°. — Id.

—— Der Einfluss der Konkurseröffnung auf die Erfüllung der Rechtsgeschäfte des Gemeinschuldners mit besonderer Berücksichtigung von Pacht und Miethe; Inaug.-Diss. zur Erlangung der Doct. der hohen jurist. Fac. etc., vorgelegt von Friedrick BELCK. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

—— Die Handlungsvollmacht unter Berücksichtigung der Vollmacht des Prokuristen, Korrespondentrheders und Schiffers; Inaug. Diss. etc.; von Johannes BUCHKA. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

—— Ueber den Tausch; Inaug.-Diss., etc.; von H. SEEGER. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Rostock. —— Neukirch am Hohwalde bis zum Brefeiungskriege; Inaug.-Diss. etc. der hohen philos. Fac. etc., von Georg Wilk. Giessen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Heinrich der Löwe von Mecklenburg; I. Seine Beziehungen zu Brandeburg; II. Seine Kämpfe gegen Wismar und Rostock; Inaug.-Diss. etc., der philos. Fac. etc, von Theodor Fischer. Schwerein i. M., 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Lübecks Stellung in der Hanse bis zur Mitte des XIV. Jahrhunderts; Inaug.-Diss., etc., der philos. Fac. etc., von Gustav Berg. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Zur Metrik des deutschen Rolandsliedes: Inaug.-Diss., etc. der philos. Fac. etc., von Franz Spencker. Rostock, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Der Gute Gerhard von Rudolf von Ems in seiner Bedeutung für die Sittengeschichte; Inaug.-Diss., etc., der philos. Fac., etc.; von August Dobbertin. Rostock, 1889; 1 fasc in-8°.

Id. —— Der Versbau im *Reinke Vos*: Ein Beitrag zur Metrick des Mittelniederdeutschen; Inaug.-Diss., etc. der philos. Fac., etc., von Helmuth Seltz. Rostock, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Heinrich Ferdinand Möller ein Schauspielldichter des XVIII. Jahrhunderts; Inaug.-Diss., etc., der philos. Fac., etc.; von Max von Schröter. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. —— Wernhers Marienleben in seinem Verhältnisse zum « Liber de infantia sanctae Mariae et Christi Salvatoris », nebst einem metrischen Anhange: Inaug.-Diss., etc., des philos. Fac, etc.; von Paul Steinhäuser. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'Autore. La Vita del Diritto nei suoi rapporti colla vita sociale: Studio comparativo di filosofia giuridica, per Giuseppe Carle, Prof. ordinario di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino; 2ª ediz. riveduta, ampliata e messa in correlazione cogli studi contemporanei. Torino, 1890; 1 vol. in-8°.

Id. La Vida del Derecho en sus relaciones con la vida social; Estudio comparado de filosofia del derecho por Giuseppe Carle: version castelana de H. Giner de Los Rios, y Germán Flórez Llamas. Madrid, 1889; 1 vol. in-8°.

L'A. Le Péril national; par le Marquis de Nadaillac Paris, 1890; 1 fasc in-8°.

Digitized by Google

Albissola — Appunti archeologici, storici ed artistici di Vittorio Poggi, Presidente della Sezione archeologica ed artistica della Società Savonese; parte seconda. Savona, 1890; in-8°. — L'A.

Dionigi Romanetti, Capitano, già professore alla Scuola di Guerra — Istituzioni ed esempi di Letteratura militare; 4ª edizione. Torino, 1890; 1 vol. in-16°. — L'A.

Breve et Ordinamenta populi Pistorii anni MCCLXXXIIII nunc primum edidit Ludovicus Zdekauer; praecedit de ordinamentis populi pistoriensis saeculi XIII. Dissertatio. Mediolani, MDCCCXCI; 1 vol. in-4°. — L. Zdekauer.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.

187 (850) 18 II-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 4ª, 1890-91

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Giacomini, Segre e Basso Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente il quale viene approvato.

Il Socio Siacci presenta in dono un volume del Prof. Rydberg intitolato « *Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques.* » Questo lavoro fu inviato dall'Autore al compianto Socio Prof. A. Genocchi, che negli ultimi anni di sua vita copriva l'ufficio di Presidente dell'Accademia.

Vengono letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i quattro lavori seguenti:

1° « *Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del Thynnus vulgaris* (Clinica oculistica della Università di Pisa); Nota del dott. Emilio Faravelli, presentata dal Socio Bizzozero;

2° « *Le trasformazioni razionali dello spazio determinato da una superficie generale di terz'ordine;* » Nota del Prof. Gino Loria della Università di Genova, presentata dal Socio D'Ovidio;

3° « *Sopra alcune curve regolari;* » Nota del Professore Giuseppe Peano della Università di Torino, presentata dal Socio Segre;

4° « *Sull'accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno ad un punto*; » Nota del Dott. Enrico Novarese, Assistente presso la Facoltà matematica dell'Università di Torino, presentata dal Socio Basso.

Digitized by Google

LETTURE

Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del Thynnus vulgaris;

Nota del Dott. EMILIO FARAVELLI

Durante alcune ricerche anatomiche comparative che intrapresi al principio di questo anno scolastico sull'occhio dei pesci richiamò la mia attenzione una particolarità anatomica abbastanza importante che riscontrai nel segmento anteriore dell'occhio del tonno (*thynnus vulgaris*). Indugiai finora a descriverla anzitutto perchè il materiale che potei raccogliere nell'inverno era troppo scarso per poterne fare uno studio; in secondo luogo perchè trattandosi, come dirò tosto, d'una forma anatomica visibile ad occhio nudo dietro un esame un po' accurato dell'occhio, dubitava fosse già stata da qualche autore descritta. Non avendo però trovato dopo indagini bibliografiche, per quanto potei accurate (1), alcuna notizia in proposito, mi decido a darne un cenno.

Non sarà, credo, inutile che per maggiore chiarezza esponga in brevi parole quanto è noto per studi antecedenti su quella parte del segmento anteriore del bulbo che ha attinenza coll'organo sul quale dovrò intrattenermi.

Esiste nell' occhio dei pesci un legamento anulare il quale unisce la cornea all' iride, corrispondente, secondo Leuckart,

(1) Sento il dovere di ringraziare qui il chiarissimo prof. Richiardi il quale in questa ed in altre occasioni con squisita gentilezza e liberalità mise a mia disposizione la sua ricchissima biblioteca.

Digitized by Google

Angelucci e Berger, al legamento pettinato degli animali superiori. La sua forma e le sue dimensioni variano assai nelle diverse specie.

Dal margine sclerale anteriore poi ed all'esterno del detto legamento, ne parte un altro che copre la superficie esterna della porzione anteriore della coroidea. Si chiama legamento ciliare ed è costituito di fibre connettive compatte che all'indietro vanno diminuendo di volume. Berger (1), il quale fece uno studio assai interessante sull'occhio dei pesci, Leuckart e Leydig non riscontrarono mai nello stesso delle fibre muscolari.

Ecco ora quello che io ho osservato: separando con un taglio praticato un po' all'indietro dell'equatore, la parte anteriore dalla posteriore di un occhio di tonno, e staccando con cautela nell'emisfero anteriore la coroidea dalla sclerotica, si incontra presso a poco in corrispondenza dell'equatore, nel quadrante superiore posteriore dell'occhio (che corrisponderebbe al quadrante superiore esterno dell'emisfero anteriore dell'occhio umano) un nervo abbastanza voluminoso (diametro di poco inferiore ad 1 mm.) il quale dopo aver perforato dall'esterno all'interno una delle due valve ossee che costituiscono lo scheletro dell'occhio del tonno, si dirige verso la cornea. Dopo breve decorso, dividendosi di solito in due rami, si immette in un tessuto d'aspetto biancastro, quasi lardaceo, succolento, il quale viene messo assai bene in evidenza staccando con leggera trazione tutta la periferia dell'iride dalla cornea. Si presenta allora come un rialzo leggermente convesso, che per una lunghezza di 22-25 mm. dal margine periferico dell'iride si porta all'indietro per circa 7 mm. diminuendo progressivamente di spessore per confondersi col tessuto coroideale. Ai lati diminuisce pure a poco a poco di spessore finchè si continua nel legamento ciliare del quale fa parte.

Staccati dei frammenti di questo tessuto in parecchi punti ed esaminati al microscopio trattandoli prima con carmino, ma meglio con ematossilina, si trovano costituiti da un intreccio di fibre le quali hanno tutti i caratteri delle muscolari liscie. Hanno una forma fusata ed una lunghezza che varia da 0,066-0,110 mm.; sono provvedute di un nucleo spiccatissimo di forma ora ovale, ora

---

(1) E. Berger. *Beiträge zur Anat. des Sehorganes der Fische.* Morphologisches Jahrbuch, 1883, S. 97.

a bastoncino, talora rotondeggiante, il cui diametro longitudinale oscilla tra 0,005-0,007 mm., il trasverso tra 0,002-0,004 mm. alle cui estremità si notano delle granulazioni fine e rifrangenti (V. fig. 1ª).

Tra queste fibre si trovano qua e là dei nervi midollati, ora isolati, ora a fascio. Avendo acquistato la sicurezza, in seguito a numerose preparazioni di tali forme elementari, che il tessuto in discorso era di natura muscolare a fibre liscie, passai allo studio più esatto della forma di tale muscolo e dei suoi rapporti.

Decalcificai perciò la sostanza ossea della sclerotica in soluzione di acido cromico all' 1 $^0/_0$ o in soluzione preparata secondo la formola di Ebner, e della metà anteriore del bulbo praticai col microtomo sezioni in tutti i meridiani.

Tralascio per brevità di descrivere il legamento anulare corneo-irideo, perchè poco avrei da aggiungere alla descrizione data da Berger (1) e da altri, limitandomi solo al legamento ciliare.

Distinguerò dello stesso, per maggiore semplicità, una parte occupante circa i $^2/_3$ della periferia del bulbo di natura connettivale, ed una parte corrispondente al rimanente tratto, che si presenta, come dissi, modificata, ingrossata e di natura evidentemente muscolare.

Per la prima porzione è perfettamente esatto quanto ne dicono Berger, Leuckart, ecc.; cioè sulle sezioni meridiane si appalesa come un piccolo fascetto di fibre connettivali compatte, che si inserisce al punto in cui la superficie interna della cornea si continua nella sclerotica. e va all'indietro sotto forma di una sottile laminetta perdendosi nel tessuto sopracoroideale. Ha uno spessore che varia tra 0,110-0,137 mm. Come prima per dilacerazione. così pure sulle sezioni meridiane non incontrai mai delle fibre muscolari (V. fig. 2ª).

L'altro tratto, che comprende il terzo posteriore superiore della zona che forma questo legamento, ha l'aspetto, anche ad occhio nudo, di un piccolo muscolo con una parte mediana più sviluppata la quale va assottigliandosi gradatamente alle due estremità anteriore e posteriore. Lo spessore massimo del ventre muscolare è di circa 1,5 mm. La superficie rivolta verso la coroidea è molto

(1) Loc. cit., pag. 103.

Digitized by Google

più convessa di quella che guarda la sclerotica; questa anzi in talune sezioni riscontrai perfettamente piana. Esaminando una serie di tagli meridiani del tratto suddetto, si osserva che tale forma caratteristica va perdendosi dalla parte mediana verso i lati per un progressivo assottigliamento del ventre finchè alla fine si confonde nel legamento. La lunghezza del muscolo, dall'attacco corneale al punto opposto in cui si perde nel tessuto sopracoroideale, è di 7 mm. circa.

Nelle sezioni meridiane si vede che le fibre muscolari sono tutte dirette dall'indietro all'avanti, stipate le une accanto alle altre. Poco numerosi sono i vasi, numerosi invece i nervi, i più voluminosi dei quali si trovano di solito alla parte interna e posteriore. La faccia esterna del muscolo è parallela ed attigua alla lamina interna del cercine osseo scleroticale, la quale è rivestita da un sottile strato intermedio di connettivo lasso. La faccia interna, partendo dall'inserzione corneale per un tratto che varia alquanto nei singoli occhi da 1-2,5 mm., è in rapporto col legamento irido-corneale; per il resto della sua estensione colla superficie esterna della coroidea, dalla quale viene separata solamente da una striscia di pigmento che si continua con quello della superficie anteriore dell'iride. Noto qui per incidenza che lo spazio compreso tra la periferia della cornea e la base dell'iride, occupato dal legamento irido-corneale, varia alquanto per forma e dimensione nei diversi occhi. Talora è ampio ed ha la forma di un triangolo equilatero (V. fig. 3ª *d*), tal altra angusto per una maggiore convessità della parte anteriore interna del muscolo e protrusione dell'iride (V. fig. 4ª *d*).

La cagione di questo fatto non saprei dire; potrebbe forse attribuirsi alla diversa età degli animali, ovvero al diverso stato di conservazione dei bulbi; non è però improbabile che si tratti di differenze individuali, le quali, come è noto, si presentano di frequente e nel modo più bizzarro nell'occhio dei pesci. Basta citare a questo proposito la campanula d'Haller, la quale in alcune specie appare notevolmente più voluminosa in un occhio che nell'altro dello stesso animale (1).

L'inserzione alla periferia corneale non differisce da quella

(1) Leydig, *Beit. z. mikr. Anat. u. Entwick der Rochen u. Haie* 1857, p. 27.

Digitized by Google

di tutto il legamento, si fa però su una superficie più estesa (0,5 mm. circa) in ragione del maggior spessore del settore corrispondente. Ivi il tessuto ha un aspetto fibroso assai compatto. Le fibre più esterne si inseriscono alla faccia posteriore della cornea appena al davanti ed all'indentro dell'attacco di questa all'anello osseo; le centrali e le interne fanno al punto d'inserzione una leggera curva colla concavità all'interno. Questa disposizione è visibile anche nella sostanza corneale per brevissimo tratto, poi le fibre si intrecciano colle lamine corneali e non mi riuscì di stabilire con sicurezza ulteriori rapporti di quelle con queste.

L'estremità posteriore assai assottigliata si confonde collo strato sopracoroideale costituito da connettivo a larghe maglie. L'iride in corrispondenza del descritto settore muscolare presenta uno spessore notevolmente maggiore che non in corrispondenza del resto della zona legamentosa (V. fig. 2ª, 3ª, 4ª).

Come dissi, questo tessuto è assai ricco di nervi provenienti dal tronco cui sopra ho accennato. Non mi fu possibile finora, come avrei desiderato, fare delle ricerche sulle loro ultime terminazioni, per la mancanza di materiale abbondante e fresco quale si esige per tali sorta di ricerche.

Conoscendo ora nei loro tratti principali l'ubicazione, le dimensioni, i rapporti e la struttura di questo muscolo è ovvio il domandarsi quale possa essere la sua funzione. Una risposta soddisfacente a questa domanda è assai difficile, poichè le attuali cognizioni anatomiche, ma specialmente fisiologiche sull'occhio dei pesci, sono troppo piene di lacune e di contraddizioni. E ciò non deve meravigliare se si pensa alle varietà grandi che esistono nella forma anatomica di questo organo nelle singole specie alle quali per abitudini di vita le più disparate, deve occorrere un corrispondente vario modo di adattamento dell'organo visivo.

Il punto fisso d'inserzione del muscolo essendo alla cornea, è naturale il supporre che dovrà, contraendosi, far sentire la sua azione sulla coroidea stirandola all'innanzi. Se, come si ammette da Leuckart (1) e altri, l'azione della campanula di Haller (la cui struttura a fibre muscolari liscie primamente dimostrata da

(1) *Hand der. ges. Aug.* Bd. 11, p. 227.

Digitized by Google

Leydig (1) è da altri contestata (2)) si esercita sulla lente in modo da appiattirla, o da avvicinarla alquanto alla retina, o da produrre questi due fatti insieme, per cui ne risulterebbe che, al contrario di quanto avviene negli altri vertebrati, l'occhio dei pesci sarebbe allo stato di riposo adattato per oggetti vicini, durante l'accomodazione per oggetti lontani, si potrebbe pensare che questo muscolo possa, stirando leggermente all'innanzi la coroidea e la retina, combinare la sua azione con quella della campanula. Ma oltrechè è poco probabile che la retina possa subire senza soffrirne dei movimenti per quanto leggeri durante la sua funzione, quest'ipotesi appoggerebbe su un fatto che è ben lontano dall'essere dimostrato. Ad ogni modo ho voluto accennarla attendendo che da ulteriori studi venga colmata questa lacuna.

Concludendo dunque:

Nell'occhio del *thynnus vulgaris* il legamento irido-ciliare non ha la stessa forma e struttura in tutta la sua estensione; mentre nei $^2/_3$ circa di questa è costituito da una sottile lamina di tessuto connettivo, nella rimanente porzione e precisamente nel quadrante superiore posteriore (come ho constatato in due esemplari intatti del pesce in discorso che ho potuto avere a mia disposizione), si trasforma in un organo assai più voluminoso e di natura muscolare (fibre liscie). Non so se lo stesso fatto si verifichi nelle altre specie di tonno.

Circa all'azione fisiologica di quest'ultima porzione è impossibile ora pronunciare un giudizio.

Al Prof. N. Manfredi i cui autorevoli consigli non mi mancarono mai durante queste ricerche mi è caro porgere qui i più vivi ringraziamenti.

Pisa, 18 maggio 1890.

---

(1) *Histologie*, p. 234.

(2) Beauregard, *Rech. sur les plexus vasculaires de la chambre post. de l'œil des vertébrés*. Ann. des sciences. nat. (Zoologie) 1876, serie 6, t. IV, p. 116.

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1ª — Fibre muscolari liscie isolate per dilacerazione. (Koristka oc. 3 — ob. 8 tubo abb.).

» 2ª — Sezione meridiana della parte anteriore dell'occhi in corrispondenza del legamento ciliare (Micr. semp Reichert - 10 diam. Cam. lucida Abbe).

a) cornea

b) iride

c) legamento ciliare

d) » anulare

d) legamento anulare

e) coroidea

f) lamina ossea

g) foglietti in cui si sdoppia

h) tessuto adiposo

l) sezione di un grosso tronco nervoso nel muscolo.

Digitized by Google

Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine

Nota di GINO LORIA

Come è noto, nel modo di studiare le trasformazioni razionali dello spazio dal Prof. Cremona proposto e ampiamente sviluppato (*), si prendono le mosse da una superficie omaloide φ di cui si conosce una rappresentazione su un piano Π e si studia se e di quali sistemi omaloidici essa possa far parte. In tal modo ogni superficie omaloide suscettibile di essere elemento di un sistema omaloidico si presenta come ente generatore di un gruppo — il quale può anche essere costituito da un solo membro — di trasformazioni razionali dello spazio (**). È sempre di grande

(*) Nelle due note *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* inserite nei *Rend. del R. Istituto Lombardo* (T. IV della 2ª Serie, p. 268 e 315) e nella Memoria di egual titolo pubblicata negli *Annali di Matematica* (t. V della 2ª serie, p. 131).

Per alcune denominazioni da me adottate e certi teoremi tacitamente invocati, rimando alle mia Nota *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio e in particolare sulle trasformazioni di genere* 0 (Rend. del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, t. XXIII, 1890), alla quale la presente serve di prima continuazione.

(**) Questo fatto non ha riscontro nella teoria delle corrispondenze razionali fra due piani, perchè è facile dimostrare che *una curva omaloide* (cioè *razionale*) *dà origine al massimo ad una rete omaloidica.* Sia infatti C una curva d'ordine n con r_α punti α -pli ($\alpha = 2, 3, \ldots$); affinchè essa possa entrare come elemento di una rete omaloidica è *necessario* che sia

$$(a) \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} r_\alpha = 0$$

$$(b) \qquad \frac{n(n+3)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} r_\alpha \geq 2$$

Supposte verificate queste relazioni, una rete omaloidica contenente C dovrà avere un numero di punti fondamentali semplici il quale soddisfi le condizioni

$$(c) \qquad \begin{aligned} &\frac{n(n+3)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} r_\alpha - r_1 = 2 \\ &n^2 - \sum_\alpha \alpha^2 r_\alpha \qquad\quad - r_1 = 1 \, , \end{aligned}$$

Digitized by Google

interesse il conoscere completamente la composizione di tale gruppo o, in altre parole, il sapere quali siano tutte le trasformazioni razionali dello spazio che ripetono la loro origine da un'assegnata superficie. Per eseguire questa determinazione si possiede uno strumento conveniente in quel metodo inventato dal Cremona stesso per costruire le trasformazioni razionali determinate da una data superficie — metodo di cui supponiamo ora e in seguito nel lettore perfetta conoscenza —, disponendo in tutti i modi possibili del *luogo fisso* e della *rete ausiliaria;* onde applicarlo fa mestieri però avere presenti quali siano *tutte* le reti omaloidiche di curve piane d'ordine assegnato e non dimenticare che, quando la superficie omaloide considerata è suscettibile di parecchie rappresentazioni univoche fra loro equivalenti, vi sono su di essa più sistemi di curve di egual natura ma corrispondenti a sistemi di curve piane fra loro differenti (mutabili però gli uni negli altri col mezzo di trasformazioni univoche lascianti immutato l'ordine della rappresentazione piana della superficie).

Ma per eseguire l'anzidetta determinazione possono anche servire ragionamenti diversi, i quali si possono dire più diretti, perchè si fondano piuttosto sull'esame delle proprietà specifiche della superficie in questione che sullo studio esclusivo della sua rappresentazione piana.

Si noti infatti che, detto m l'ordine delle imagini delle sezioni piane di φ nella rappresentazione d'ordine minimo e M l'ordine di una *sezione principale* di questa superficie (cioè della parte mobile della curva in cui essa viene segata da una superficie di egual ordine avente comuni con essa le singolarità), l'ordine ν di un sistema omaloidico *inverso* ad uno determinato da φ non può essere inferiore a m nè superiore a $M;$ ne viene che il sistema *diretto* avrà per linee fondamentali, oltre alle linee singolari di φ, delle linee fondamentali semplici equivalenti (*), nell'intersezione di due superficie analoghe a φ, a una linea d'or-

---

la seconda delle quali è, in causa della (a), conseguenza della prima. Ora la (c), in virtù della (b), dà per r_1 un valore determinato e non negativo, quindi è dimostrato quanto erasi enunciato; in pari tempo si vede che *l'essere o non* C *atta a produrre una trasformazione piana razionale dipende dall'essere o non verificata la condizione* (b), cioè *dall'esistere o non* ∞^r, $r \geq 2$, *curve aventi comuni con* C *le singolarità.*

(*) Ci esprimiamo così per includere il caso in cui lungo una linea fondamentale abbia luogo un contatto d'ordine qualsivoglia.

Digitized by Google

dine n compreso fra $M-m$ e 0. Si prenda ora ad arbitrio n entro questi limiti e si considerino successivamente tutte quelle curve di ordine equivalente a n, proprie o degeneri, giacenti sulla data superficie φ, avendo cura di escludere quelle che sono casi particolari di altre, onde non porre ad uno stesso livello una trasformazione razionale ed i suoi casi particolari. Presa una qualunque, f, di esse per ulteriore linea fondamentale si studi se e in quali modi, sia possibile scegliere sulla data superficie i punti fondamentali semplici (punti i quali possono essere di semplice passaggio o di contatto d'ordine qualunque) per modo che il sistema risulti in conseguenza omaloidico: allora si avrà un sistema il cui inverso è d'ordine $\nu = M-n$. Così si otterranno tutti i sistemi omaloidici determinati dalla data superficie φ e i cui inversi sono d'ordine $M-n$: variando poi n fra $M-m$ e 0 si otterranno tutti i sistemi omaloidici determinati da φ.

Nell'applicare questo procedimento occorre determinare *sempre* la postulazione (*) della curva f e *talora* anche il numero di condizioni che vengono aggiunte a questa postulazione allorquando si esige che f sia linea fondamentale di contatto per le superficie considerate. Noti questi numeri si conoscerà anche il grado d'infinità i del sistema costituito da tutte le superficie φ che passano per f o ivi si toccano e sarà facile l'assegnare il numero ρ delle intersezioni mobili di tre superficie qualunque appartenenti a questo sistema ∞^i. Ne viene che se noi imaginiamo di sottoporre le superficie di tale sistema a passare per x_1 punti dati e ad avere con $x_r (r=2, 3, ...)$ piani dati in altrettanti punti dati dei contatti d'ordine $r-1$; se inoltre rammentiamo che:

1°. Per una superficie algebrica qualunque l'avere in un dato punto con un dato piano un contatto d'ordine $r-1$, equivale a $\frac{1}{2}r(r+1)$ condizioni lineari semplici (**);

2°. Sono riunite r^2 intersezioni di tre superficie in un punto

---

(*) Secondo la denominazione proposta dal Cayley nella sua Memoria *On the Rational Transformation between two Spaces* (Proc. of the Lond math. Society, 1870, p. 165).

(**) Ciò risulta dall'osservare che in coordinate omogenee la forma generale dell'equazione di una superficie d'ordine n avente col piano di equazione $\varphi \equiv \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3 = 0$ nel punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ un contatto d'ordine r è

$$f_0 \varphi x_4^{n-1} + f_1 \varphi x_4^{n-2} + \ldots + f_{r-2} \varphi x_4^{n-r+1} + f_r x_4^{n-r} + \ldots + f_{n-1} x_4 + f_n = 0,$$

ove in genere f_i è una forma ternaria di grado i in x_1, x_2, x_3.

Digitized by Google

nel quale esse hanno con uno stesso piano un contatto d'ordine $r-1$, vedremo che affinchè il sistema risulti in conseguenza omaloidico è *necessario* che i numeri $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ soddisfino le equazioni seguenti:

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \tfrac{1}{2}k(k+1)x_k = i - 3 \quad \ldots (1),$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \ldots + k^2 x_k = \rho - 1 \quad \ldots (2),$$

ove k si deve scegliere in modo che sia

$$\tfrac{1}{2}k(k+1) \leq i - 3, \qquad k^2 \leq \rho - 1 \ (*).$$

Lo scegliere i numeri x in questo modo è *in generale* anche *sufficiente* per l'omaloidicità del sistema ottenuto: lo è sempre ad eccezione di quei casi (alcuni dei quali ci si presenteranno più innanzi) in cui le condizioni imposte alle superficie φ del sistema ∞^i producano uno spezzamento in una parte fissa e una mobile della linea d'intersezione di due qualunque fra esse.

Le ovvie osservazioni esposte ci serviranno ad ottenere tutte le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terzo ordine φ (**); per ciascuna daremo i caratteri

---

(*) Per determinare tutte le soluzioni intere e positive delle equazioni (1) e (2), se ne deduca per sottrazione la seguente

$$(3) \quad x_2 + 3x_3 + \ldots + \frac{1}{2}k(k-1)x_k = \rho - i + 2;$$

si vedrà allora che gli unici valori ammissibili per x_k sono quelli non negativi nè maggiori a $(\rho - i + 2) : \frac{1}{2}k(k-1)$. Attribuito ad x_k, successivamente ciascuno di questi valori si otterranno altrettante equazioni indeterminate con le incognite $x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}$; in ognuna di queste si potrà liberarsi da x_{k-1} colla stessa considerazione con cui si è fatto scomparire x_k dalla (3); così continuando si otterranno tutti i sistemi di valori di $x_2\, x_3 \ldots x_k$ che soddisfano la (3): sostituendoli nella (1), o nella (2), si avranno altrettante soluzioni intere delle date equazioni; escludendo quelle per cui $x_1 < 0$ si sarà sciolto il problema di risolvere completamente in numeri interi positivi le equazioni (1) e (2).

(**) Esse mi hanno già servito a determinare tutte le trasformazioni razionali dello spazio prodotte o da una superficie di 4° ordine con conica

Digitized by Google

essenziali e dimostreremo che esse esauriscono il gruppo generato da una superficie cubica senza singolarità (*): in alcune note abbiamo dimostrate certe proposizioni generali, forse nuove, che ci occorse invocare.

Per risolvere il problema che ci siamo proposti notiamo anzitutto che un sistema omaloidico contenente una superficie φ generale di terzo ordine avrà un sistema inverso il cui ordine ν sarà non inferiore a 3 nè superiore a 9; epperò le sue linee fondamentali dovranno, nell'intersezione di due superficie del sistema, equivalere a un luogo il cui ordine non può oltrepassare 6 ma può discendere fino a 0. Basterà quindi passare in rassegna le curve essenzialmente distinte (**), proprie o degeneri, contenute in φ e per ciascuna esaminare se possa fungere da linea fondamentale (di intersezione o contatto) di un sistema omaloidico; conviene per ciò tenere presente la classificazione delle curve algebriche sghembe e i risultati concernenti la geometria su una superficie cubica: quella si rileva dalla memoria del Nöther *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (***), questi si trovano nel lavoro dello Sturm *Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (****).

1. Una curva semplice di 6° ordine e genere inferiore a 3 posta su una superficie cubica, ha almeno una quadrisecante;

---

doppia (propria), o da una superficie di 5° ordine con quintica razionale doppia (cfr. il n. 3 della presente Nota), o finalmente da una superficie pure di 5° ordine dotata di una retta tripla incontrata da due rette doppie (cfr. il n. 4).

(*) Ad eccezione dell'ultima, queste trasformazioni furono rapidamente indicate dal Cremona, a p. 274-277 del T. IV, 2ª Serie, dei *Rend. del R. Istituto Lombardo*, fra gli esempi di applicazione del metodo citato nel testo.

(**) Perciò resta inteso che dalla nostra collezione vengono escluse tutte quelle trasformazioni che sono casi particolari di altre; esse nascono supponendo che, nelle trasformazioni che incontreremo, le curve fondamentali assumano forme speciali (p. es. si spezzino in curve d'ordine inferiore, per modo che nella curva composta l'ordine e il numero dei punti doppi apparenti siano gli stessi che nella curva primitiva).

(***) *Math. Abh. nicht zur Berl. Akademie gehör. Gelehrter*, 1882, I.

Preferisco questa Memoria a quella di egual tema dell'Halphen, perchè contiene i risultati che ci son necessari sotto forma più conveniente al nostro scopo.

(****) *Math. Annalen*, T. XXI, 1883, p. 457-514.

Digitized by Google

ogni superficie di 3° ordine contenente la curva contiene in conseguenza questa o queste quadrisecanti; epperò la curva stessa non può da sola fare l'ufficio di linea fondamentale di un sistema omaloidico. Come tale può dunque servire soltanto una sestica gobba di genere 3 o 4. Ora siccome quest'ultima è intersezione completa di una superficie di 3° ordine con una di 2°, così due qualunque fra le ∞^4 superficie cubiche che le contengano s'incontrano ancora in una cubica piana; affinchè questa sia razionale devono quelle superficie toccare in un punto dato un piano dato: ora questa condizione riducendo a ∞^1 le superficie passanti per la detta curva. toglie ad esse la possibilità di produrre un sistema omaloidico; quindi ***nemmeno una curva di*** *6°* ***ordine e genere*** *4* ***può fungere da linea fondamentale di un sistema omaloidico.***

Ci resta quindi soltanto da esaminare se lo possa quella f di genere 3. Ora questa è completata da una cubica gobba che la sega in 8 punti nella intersezione di due superficie cubiche (*): per ciò tre qualunque superficie di 3° ordine passanti per f si tagliano in un solo punto ad essa esterno. D'altronde sono ∞^3 le superficie di 3° ordine che contengono f. Dunque da sola individua un sistema omaloidico di 3° ordine il cui inverso è pure di 3° ordine. La Jacobiana del sistema diretto è una superficie di 8° ordine avente f per linea tripla; siccome per ogni punto di f passano tre rette appoggiate alla curva in altri due punti e siccome ognuna di queste rette sta sulla Jacobiana anzidetta, così questa non è altro che il luogo delle trisecanti di f. Per conseguenza è una rigata di genere 3 segante in 6 rette ogni superficie del sistema omaloidico; emerge da ciò che il sistema inverso ha una linea fondamentale di ordine 6 e genere 3, epperò è identico al sistema diretto.

Per ottenere una trasformazione (3, 3) (**) di genere 1 si

(*) Si rammenti, ora e in seguito, che allorquando l'intersezione di due superficie degli ordini μ e ν, si decompone in due parti degli ordini m' e m'', dei generi p' e p'', aventi comuni s punti, si hanno le relazioni:

$$2(p'-p'') = (m'-m'')(\mu+\nu-4)$$

$$s = m'(\mu+\nu-4)-2(p'-1) = m''(\mu+\nu-4)-2(p''-1)$$

(**) Col simbolo (μ, ν) si designa una trasformazione in cui μ e ν sono gli ordini delle superficie dei due sistemi omaloidici; dicendo poi *sistema* (μ, ν) s'intende indicare un sistema omaloidico d'ordine μ, il cui inverso è d'ordine ν.

Digitized by Google

potrebbe creder lecito di prendere una linea fondamentale degenere; ma quelle curve di 6° ordine le quali non rientrano come casi particolari in quelle di genere 3, hanno una postulazione compresa fra 20 e 24 epperò non possono servire (*); similmente si esclude l'ipotesi che nel sistema vi siano linee fondamentali di contatto. Talchè possiamo dire che *le uniche trasformazioni razionali* (3, 3) *di genere* 1 *sono: quella che ha in ogni spazio una linea fondamentale unica di ordine* 6 *e genere* 3 *ed i casi particolari di essa.*

2. Su una superficie generale di terzo ordine φ si trovano curve gobbe di 5° ordine e dei generi 0, 1, 2; quelle razionali ammettono ciascuna almeno una quadrisecante onde non possono servire da sole di base a un sistema omaloidico: vediamo se lo possono quelle di genere 2. Vi sono ∞^5 superficie cubiche contenenti una linea sghemba f di ordine 5 e genere 2; due qualunque di esse si tagliano ancora in una quartica gobba razionale segante f in 8 punti, mentre tre hanno comuni 4 punti mobili: ciò basta per potere concludere l'impossibilità di estrarre un sistema omaloidico da quel sistema ∞^5.

Invece vi sono ∞^4 superficie di terzo ordine contenenti una linea sghemba f di ordine 5 e genere 1; due qualunque di esse si tagliano ancora in una quartica gobba razionale la quale ha 10 punti comuni con f: emerge da ciò che *quelle fra le superficie anzidette che contengono uno stesso punto* F *formano un sistema omaloidico. Il quale è, per quanto si è detto, l'unico* (3, 4) *di genere* 1 *con una sola linea fondamentale.* Gli altri sistemi analoghi con parecchie linee fondamentali ne sono casi particolari, perchè le curve di 5° ordine, non casi speciali di quelle di genere 1, hanno una postulazione così alta che impedisce loro di fungere da linee fondamentali, e d'altronde, è agevole l'escludere la possibilità di linee fondamentali di contatto.

Per determinare le proprietà della trasformazione (3, 4) di cui ora si è avvertita l'esistenza, notiamo che la Jacobiana del sistema costituito dalle superficie cubiche contenenti il punto F e la linea f è una superficie di 8° ordine avente F per punto

(*) D'altronde la maggior parte di esse sarebbe da escludersi anche perchè ogni superficie cubica contenente una di esse contiene in conseguenza qualche altra linea.

Digitized by Google

doppio e f per linea tripla. Essa comprende quindi il luogo delle trisecanti di f, il quale è di 5° ordine (*), ha f per linea doppia, è di genere 1, e sega in 5 rette ogni superficie del sistema. La parte residua della Jacobiana è di 3° ordine, ha f per linea semplice e F per punto doppio, onde non è altro che quella superficie del sistema omaloidico per la quale F è punto doppio; osservando che essa contiene le ∞^1 coniche cinque-secanti di f e passanti per f si riconoscerà che la sua intersezione con una qualunque superficie del sistema (3, 4) si compone di due fra queste coniche.

Da ciò emerge che il sistema inverso consterà delle ∞^3 superficie di 4° ordine aventi comuni una conica Γ doppia per tutte e una curva Q di ordine 5 e genere 1 (segante Γ in 5 punti) semplice per tutte. La Jacobiana di questo sistema consta del piano di Γ preso due volte; e del luogo delle corde di Q appoggiate a Γ, il quale è d'ordine 10 e ha Q per linea tripla e Γ per linea quintupla: la prima parte corrisponde al punto F, alla linea f la seconda.

3. Una superficie generale di 3° ordine contiene quartiche gobbe tanto di 1ª quanto di 2ª specie. Per una quartica di 1ª specie passano ∞^7 superficie cubiche di cui due qualunque si tagliano ancora in una curva di 5° ordine e genere 2 segante la quartica in 8 punti, mentre tre qualunque hanno 7 intersezioni mobili. Ne viene che per dedurre da questo sistema ∞^7 un sistema omaloidico si devono conoscere due numeri x_1 e x_2 che soddisfino le equazioni $x_1+3x_2=4$, $x_1+4x_2=6$; ma queste non hanno soluzione positiva, perciò *una quartica gobba di* 1ª *specie non può da sola fungere da linea fondamentale di un sistema omaloidico di genere* 1 *e ordine* 3.

Invece una quartica di 2ª specie è contenuta in ∞^6 superficie cubiche di cui due qualunque si tagliano ancora in una curva di 5° ordine e genere 1 segante la quartica in 10 punti, mentre tre qualunque hanno 5 intersezioni mobili. Per conseguenza a fine di dedurre da questo sistema ∞^6, un sistema omaloidico, si devono far passare le superficie considerate per x_1 punti e si devono far toccare x_2 piani dati in altrettanti punti dati, ove x_1 e x_2 sono numeri soggetti alle condizioni seguenti

$$x_1+3x_2=3,\ \ x_1+4x_2=4.$$

(*) V. p. es. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, II Band. 1880, p. 299.

Digitized by Google

Ora da queste segue $x_1=0$, $x_2=1$, quindi: *Tutte le superficie di* 3° *ordine passanti per una quartica gobba razionale* f *e tangenti in un punto dato* F *a un piano dato* φ *formano un sistema omaloidico, il quale è l'unico* (3, 5) *di genere* 1 *con una sola linea fondamentale.*

Per iscoprire le altre proprietà che caratterizzano la trasformazione (3, 5) ora stabilita, notiamo che la Jacobiana del sistema cubico è una superficie di 8° ordine di cui f è linea tripla e F è punto quadruplo il cui cono osculatore contiene come ingrediente il piano φ (*). Per ciò essa comprende la quadrica luogo

(*) *Come si comporti la Jacobiana di un sistema lineare in un punto* r-*plo per tutte le superficie di un sistema lineare nell'ipotesi che ivi il cono osculatore sia fisso.* Chiamando φ una forma ternaria di grado r in x_1 x_2 x_3, f_i g_i h_i k_i delle forme analoghe di gradi eguali ai relativi indici, il sistema lineare di cui è parola si potrà ritenere individuato dalle quattro superficie

$$f\equiv\varphi x_4^{n-r}+\sum_{i=r+1}^{i=n} f_i x_4^{n-i}=0$$

$$g\equiv\varphi x_4^{n-r}+\sum_{i=r+1}^{i=n} g_i x_4^{n-i}=0$$

$$h\equiv\varphi x_4^{n-r}+\sum_{i=r+1}^{i=n} h_i x_4^{n-i}=0$$

$$k\equiv\varphi x_4^{n-r}+\sum_{i=r+1}^{i=n} k_i x_4^{n-i}=0$$

Ora se si calcola il Jacobiano delle quattro forme f, g, h, k e lo si ordina secondo le potenze discendenti di x_4 si ottiene come primo termine

$$-\frac{n}{r+1}x_4^{4n-4-4r}\varphi\left\{J(g_{r+1}\ h_{r+1}\ k_{r+1})-J(f_{r+1}\ h_{r+1}\ k_{r+1})+\right.$$
$$\left.+J(f_{r+1}\ g_{r+1}\ k_{r+1})-J(f_{r+1}\ g_{r+1}\ h_{r+1})\right\},$$

ove in genere J $(a\,b\,c)$ rappresenta il Jacobiano delle tre forme ternarie a b c. Per conseguenza: *Se tutte le superficie di un sistema lineare hanno comune un punto* r-*plo e il relativo cono osculatore, la Jacobiana del sistema avrà ivi un punto multiplo secondo* 4r *nel quale il cono osculatore comprende il cono osculatore comune a tutte le superficie del sistema.*

Per es. (cfr. CREMONA Rend. del R. Ist. Lomb., T. IV$_2$ p. 321) le superficie (di Steiner) di 4° ordine aventi comuni tre rette doppie d_1 d_2 d_3 con-

Digitized by Google

delle trisecanti di f; il resto è una superficie di 6° ordine avente f per linea doppia e in F la singolarità anzidetta. È facile vedere che quella quadrica seca in due rette ogni superficie del sistema, mentre questa superficie di 6° ordine la seca in 5 coniche tangenti in φ a F e quadrisecanti di f.

Scaturisce da ciò che il sistema inverso è costituito da superficie di 5° ordine aventi comuni una conica Γ semplice per tutte e una curva di 5° ordine Q doppia per tutte; la prima è incontrata in 2 punti e in 6 la seconda dalle cubiche gobbe corrispondenti alle rette del primo spazio.

La Jacobiana del sistema inverso comprende una quadrica, da contarsi tre volte, passante per Q e una superficie di 10° ordine avente Q per linea quadrupla e Γ per tripla. La natura di queste superficie risulta più determinata osservando che da F escono tre corde di f: $c_1\, c_2\, c_3$. Due qualunque di queste compongono una conica corrispondente a un punto di Q, onde le tre coppie di rette da esse risultanti corrispondono a un medesimo punto T triplo per Q. Questa curva è pertanto razionale e la quadrica che fa parte della Jacobiana del sistema (5, 3) in questione non è altro che il cono proiettante Q da T. Invece l'altra parte di Jacobiana è il luogo delle corde di Q appoggiate a Γ: talchè Q e Γ hanno comuni 4 punti. — Le corde $c_1\, c_2\, c_3$ sono, per le cose dette, rette doppie della parte di 6° ordine della Jacobiana del sistema (3, 5). Da ultimo osserviamo che a una retta r del secondo spazio condotta per T corrisponde, prescindendo dalle tre corde $c_1\, c_2\, c_3$, una conica passante per F e quadrisecante di f; siccome tale conica taglia in due punti ogni piano del primo spazio, così r sega in due soli punti diversi da T la superficie di 5° ordine corrispondente a questo piano. Ciò ne abilita a concludere che il punto T è triplo, non soltanto per la curva Q, ma eziandio per tutte le superficie del sistema inverso.

4. Fra le curve di 4° ordine composte, che non sono casi

---

correnti in un punto O e tre punti $O_1\, O_2\, O_3$, hanno O per punto triplo (triplanare) col cono osculatore fisso; il punto O, per il teorema dimostrato, dev'essere 12-plo per la Jacobiana e infatti questa è costituita dai tre piani $d_2\, d_3$, $d_3\, d_1$, $d_1\, d_2$ presi ciascuno due volte e dei tre coni quadrici circoscritti al triedro $d_1\, d_2\, d_3$ e passanti ciascuno per due de' punti fondamentali semplici.

Digitized by Google

particolari delle quartiche gobbe di 1ª o 2ª specie, non si possono assumere per curve fondamentali di un sistema omaloidico cubico:

a) Quella formata da quattro rette a due a due sghembe, giacchè ogni superficie di 3° ordine che le contenga, contiene pure le due rette che le incontrano tutte;

b) Quella formata da una conica e due rette sghembe, perchè ogni superficie di 3° ordine che le contenga, contiene pure la congiungente delle tracce delle due rette sul piano della conica;

c) Quella formata da due coniche che non s'incontrano, perchè l'intersezione dei piani di queste appartiene ad ogni superficie di 3° ordine passante per esse;

d) Quella formata da una cubica piana e una retta che non la taglia, perchè due tali linee, se stanno su una superficie di 3° ordine non degenere, si devono incontrare.

Resta da esaminare se lo possa una curva composta di una retta r e di una cubica gobba Γ.

Due qualunque fra le ∞^5 superficie di 3° ordine passanti per Γ e r si segano ancora in una curva razionale di 5° ordine, segante r in 4 punti e Γ in 8; quindi tre qualunque hanno soltanto 3 intersezioni mobili. Per estrarre da questo sistema ∞^5 un sistema omaloidico fa d'uopo conoscere due numeri x_1 e x_2 soddisfacenti le equazioni $x_1 + 3x_2 = 2$, $x_1 + 4x_2 = 2$. Ora queste danno $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; perciò: *tutte le superficie di terzo ordine passanti per la retta* r, *la cubica gobba* Γ *e due punti assegnati ad arbitrio* F_1 *e* F_2, *formano un sistema omaloidico* (3, 5) *di genere* 1. Di questo sistema la Jacobiana è una superficie di 8° ordine, avente r e Γ per linee triple, F_1 e F_2 per punti doppi. Una corda di Γ appoggiata a r sta evidentemente sulla Jacobiana: la quale pertanto comprende la superficie rigata di 4° grado R avente Γ per linea doppia e r per retta semplice; tale superficie sega in 5 rette ogni elemento del sistema omaloidico. Consideriamo poi il piano $\pi_1 \equiv F_1 r$ e in esso il fascio di coniche di cui sono punti base F_1 e le tracce di Γ; ogni conica di questo fascio sega la Jacobiana (da cui si sia già separata R) in 9 punti e quindi sta su di essa. Talchè la Jacobiana comprende il piano π_1; similmente si vede che essa comprende il piano $\pi_2 \equiv F_2 r$. Tolti R, π_1 e π_2 resta della Jacobiana una superficie di secondo ordine contenente Γ, F_1, F_2 (e determinata inconseguenza); la quale interseca qualsia superficie del sistema omaloidico in una cubica gobba contenente i punti F_1 e F_2, segante Γ in 5 punti e r in 2.

Digitized by Google

Da queste proprietà della Jacobiana del sistema diretto, emerge tosto che il sistema inverso ha per linee fondamentali una retta tripla t, due rette doppie d_1 e d_2, e una curva razionale di 5° ordine S semplice per tutte le superficie del sistema; t incontra d_1 e d_2 mentre d_1 e d_2 sono fra loro sghembe. S ha t per bisecante, d_1 e d_2 per trisecanti: ciò risulta, ad es., dalla rappresentazione univoca di una superficie di 5° ordine del sistema inverso che si desume dalle cose anzidette.

La Jacobiana del sistema inverso (*) comprende i piani td_1 e td_2 (da contarsi ciascuno due volte); poi la superficie di 4° ordine di cui t_1 t_2 d sono rette doppie e S è linea semplice; finalmente la superficie di 8° ordine che ha t per linea quintupla, d_1 e d_2 per linee triple e S per linea doppia.

5. I due sistemi (3, 5) ora ottenuti sono gli unici di questi ordini e genere 1, perchè è facile escludere l'esistenza di sistemi analoghi con linee di contatto.

Per dedurre ora un sistema (3, 6) di genere 1, tentiamo di prendere per linea fondamentale una cubica piana C. Sono ∞^{10} le superficie di 3° ordine contenenti C; due qualunque di esse si tagliano ancora in una curva di ordine 6 e genere 4 segante C in 6 punti. Per ciò si otterrà da questo sistema ∞^{10} un sistema

---

(*) Per rendersi ragione di alcune fra queste asserzioni, nonchè di altre analoghe che seguiranno, è necessario conoscere (almeno il primo fra) i seguenti teoremi:

1°. *Il numero dei punti con cui la curva* C′ *corrispondente a un punto qualunque* P *di una linea fondamentale* f *dello spazio* S *incontra una linea fondamentale* f′ *dello spazio* S′, *è uguale alla molteplicità della linea* f *per la superficie corrispondente alla linea* f′.

2°. *La molteplicità di un punto fondamentale* F′ *di* S′ *per la curva* C′ *corrispondente a un punto qualunque* P *di una linea fondamentale* f *di* S, *è uguale alla molteplicità della linea* f *per la superficie corrispondente al punto* F′.

Queste proposizioni, le cui analoghe nel piano sono notissime, si possono dimostrare con ragionamenti analoghi a quelli in uso per rendere palese la verità di queste. Si osservi infatti, riguardo al 1° teorema, che ai ρ punti comuni a C' e f' deve corrispondere un egual numero di punti riuniti in P; onde P, il quale è un punto qualunque di f, dev'essere ρ-plo per la superficie corrispondente a f'. E, per il 2°, si noti che ai ρ punti di C' riuniti in f' devono corrispondere sulla superficie relativa a F', altrettante curve coincidenti con f.

Digitized by Google

omaloidico solo quando si conoscerà una soluzione in numeri interi e positivi delle equazioni $x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7$, $x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 11$; ma una tale soluzione non esiste, dunque *una cubica piana non può servire come unica linea fondamentale di un sistema omaloidico composto di superficie generali di* 3° *ordine.*

Se invece si considerano le ∞^9 superficie di 3° ordine che contengono una cubica gobba f e si nota che due qualunque di esse s'intersecano ancora in una curva di 6° ordine e genere 3 tagliante la cubica in 8 punti, si perverrà alle equazioni

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6\,, \quad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9\,,$$

le quali ammettono una e una sola soluzione in numeri interi e positivi, cioè $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. In conseguenza: *tutte le superficie di terz'ordine passanti per una cubica gobba* f *e aventi con un piano* φ *in un punto* F *un contatto di second'ordine, formano un sistema omaloidico il cui inverso è di sest'ordine.*

A fine di caratterizzare la trasformazione razionale individuata da questo sistema, conviene ricorrere alla rappresentazione su un piano Π di una delle superficie del sistema. Se $A_1 \dots A_6$ sono i punti fondamentali della rappresentazione e si assume come linea fondamentale del sistema una cubica gobba f di cui l'imagine sia $(A_1^2 \dots A_6^2)_5$ e per punto fondamentale F quello avente per imagine G, allora la rete ausiliaria sarà $(A_1 \dots A_6 G^3)_4$. Siccome la Jacobiana di questa rete consta delle sei rette $A_i G$ $(i = 1, \dots, 6)$ e della cubica $(A_1 \dots A_6 G^2)_3$ e siccome ad esse corrispondono sulla superficie sei coniche e una cubica gobba, così il sistema omaloidico inverso è costituito da ∞^3 superficie di 6° ordine dotate di una comune retta tripla Δ e di una comune curva doppia di 6° ordine. La Jacobiana di questo sistema si compone di una superficie di 3° ordine (presa 4 volte) avente Δ per linea doppia e Γ per semplice, e di una di 8° ordine avente Δ e Γ per linee triple.

Le altre proprietà della corrispondenza si possono dimostrare nel modo seguente (*). Consideriamo nel primo spazio una su-

(*) Il ragionamento seguente è applicabile in un gran numero di casi e conduce a conseguenze su cui mi riserbo ritornare in altra occasione. Qui voglio rilevare come l'analogo nel piano porga delle dimostrazioni, diverse dalle consuete, per alcune formole concernenti le corrispondenze razionali d'ordine qualunque n fra due piani α e β. A tale scopo chiamiamo r_1 r_2 . .

Digitized by Google

perficie Φ d'ordine ξ la quale abbia f per linea $x-$ pla e F per punto $y-$ plo; supponiamo che le corrisponda nel secondo

---

r_k le molteplicità delle curve della rete omaloidica di α nei relativi punti fondamentali $A_1\ A_2 \ldots A_k$; $s_1\ s_2 \ldots s_k$ le molteplicità delle curve della rete omaloidica di β nei relativi punti fondamentali $B_1\ B_2 \ldots B_k$; chiamiamo finalmente λ_{ij} quel numero che esprime tanto le molteplicità di A_i per la curva corrispondente a B_j, quanto le molteplicità di B_j per la curva corrispondente a A_i. Consideriamo poi nel piano α la curva:

$$\Gamma\,(A_1^{x_1}\ A_2^{x_2} \ldots A_k^{x})_\xi$$

e quella che le corrisponde nel piano β:

$$\Delta(B_1^{y_1}\ B_2^{y_2} \ldots B_k^{y_k})_\eta\ .$$

Eguagliando fra loro il numero dei punti non fondamentali comuni a Γ e a una retta supposta prima arbitraria e poi passante per uno dei punti A, al numero dei punti non fondamentali comuni a Γ e alla linea che corrisponde a quella retta, si ottengono le $k+1$ equazioni seguenti:

$$(1)\quad \xi = n\eta - \sum_{i=1}^{i=k} s_i y_i\ , \qquad x_j = r_j\eta - \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_{ji}\, y_i \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento dopo avere scambiati fra loro i due piani, si ottengono le altre $k+1$ equazioni

$$(2)\quad \eta = n\xi - \sum_{j=1}^{j=k} r_j\, x_j\ , \qquad y_i = s_i\,\xi - \sum_{j=1}^{j=k} \lambda_{ji}\, x_i \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

Ora le (1) si possono considerare come un sistema di $k+1$ equazioni fra le quantità $\eta\ y_1 \ldots y_k$: dico che *il determinante di questo sistema non è nullo*, Infatti, ove esso lo fosse il sistema sarebbe o impossibile o indeterminato; la prima ipotesi è da escludersi perchè il modo in cui furono ottenute le (1) assicura che esse sono fra loro compatibili; la seconda ipotesi si può pure rigettare perchè essa trarrebbe seco che, comunque si scegliessero i numeri $\xi\ x_1\ x_2 \ldots x_k$, alcuni dei numeri $\eta\ y_1\ y_2 \ldots y_k$ sarebbero conseguenze degli altri, cioè alcune delle singolarità di Δ in $B_1\ B_2 \ldots B_k$ sarebbero dipendenti dalle altre, e ciò non è vero perchè per $\xi=1,\ x_1=0, \ldots, x_k=0$ si ottiene per curva Δ un elemento della rete omaloidica di β del quale le singolarità nei punti fondamentali sono fra loro indipendenti.

Essendo pertanto diverso da 0 il determinante del sistema (1) questo si potrà risolvere rispetto alle quantità $\eta\ y_1\ y_2 \ldots y_k$: il risultato di tale operazione è il sistema (2). Talchè (1) e (2) sono sistemi equivalenti; ed essendo

Digitized by Google

spazio una superficie Φ' d'ordine ξ' avente Γ per linea x'-- pla e Δ per y'— pla. Alla intersezione di Φ' con una retta qualunque r' del secondo spazio, corrispondono i punti non fondamentali comuni a Φ e alla curva che corrisponde ad r' nel primo spazio; siccome questa è di 6° ordine, ha F per punto triplo e sega f in 8 punti, così si avrà:

$$\xi' = 6\xi - 8x - 3y .$$

Si seghi invece Φ' con una retta appoggiata in un punto a Γ; notando che al punto d'appoggio corrisponde una conica passante per F e trisecante f, e ragionando come dianzi si perverrà a un'equazione che, tolta dalla precedente, porge

$$x' = 2\xi - 3x - y .$$

Si seghi da ultimo Φ' con una retta appoggiata in un punto a Δ; tenendo conto del fatto che al punto d'incontro corrisponde una

---

i loro coefficienti interi, i determinanti dei due sistemi saranno fra loro eguali e varranno $\varepsilon = \pm 1$ (questo segno è realmente indeterminato, dipendendo dall'ordine in cui si considerano i punti fondamentali): siccome questi determinanti non differiscono fra loro che per lo scambio delle verticali con le orizzontali, così basterà che scriviamo

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdot & s_k \\ r_1 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdot & \lambda_{1k} \\ r_2 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdot & \lambda_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_k & \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & & \lambda_{kk} \end{vmatrix} = \varepsilon$$

Ogni termine di uno fra gli anzidetti determinanti differisce dal complemento algebrico del suo omologo nell'altro pel fattore ε: scaturisce da quest'osservazione anzitutto l'eguaglianza

$$(4) \quad n = \varepsilon \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdot & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdot & \lambda_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \cdot & \lambda_{kk} \end{vmatrix} ;$$

inoltre, chiamando Λ_{ij} il complemento algebrico di λ_{ij} in quest'ultimo determinante, sarà

$$(5) \qquad s_j = (-1)^j \varepsilon \sum_{i=1}^{i=k} \Lambda_{ij} r_i$$

Le (3) (4) (5) sono le relazioni che intendevamo dimostrare.

Digitized by Google

cubica piana trisecante f e avente F per punto doppio, si ottiene, procedendo come dianzi,

$$y' = 3\xi - 3x - 2y.$$

Risolvendo le tre equazioni precedenti rispetto a ξ, x, y si trova:

$$\xi = 3\xi' - 7x' - y'$$
$$x = \xi' - 3x'$$
$$y = 3\xi' - 6x' - 3y'.$$

Ora queste tre equazioni si sarebbero potute ottenere direttamente scambiando le veci dei due spazi nel ragionamento precedente: soltanto sarebbe stato necessario conoscere che cosa corrisponda nel secondo spazio a una retta qualunque del primo, a una retta segante f, a una passante per F; ma tutte queste informazioni, che si potrebbero ottenere non senza difficoltà direttamente, sono offerte dalle tre equazioni ultimamente scritte. Infatti se esse si imaginano ottenute in modo analogo a quelle in cui furono stabilite le tre precedenti, riusciranno palesi i significati geometrici dei loro coefficienti, sarà chiaro cioè che a una retta qualunque del primo spazio corrisponde nel secondo una cubica gobba segante Γ in 7 punti e Δ in 1, che a un punto di f corrisponde una trisecante di Γ, che finalmente a *un punto dell'intorno di* F corrisponde una cubica avente Δ per corda e Γ per 6 — secante. Ne deduciamo che la parte di 8° ordine della Jacobiana del sistema inverso non è che il luogo delle trisecanti di Γ, onde questa curva è di genere 3; ne desumiamo ancora che la Jacobiana del sistema diretto è formata dal piano φ, toccato da tutte le superficie del sistema, e da una superficie di 7° ordine di cui f è linea tripla e F è punto triplo uniplanare con φ per relativo piano tangente (*).

(*) ***Come si comporti la Jacobiana di un sistema lineare in un punto nel quale tutte le superficie del sistema hanno con un piano fisso un contatto d'ordine superiore.*** Sia φ una forma lineare delle $x_1\ x_2\ x_3$ e f_i una forma di grado i delle stesse variabili; allora

$$f \equiv f_0\ \varphi\, x_4^{n-1} + f_1 \varphi\, x_4^{n-2} + \ldots + f_{r-2} \varphi\, x_4^{n-r+1} + f_r\ x_4^{n-r} + \ldots + f_{n-1} x_4 + f_n = 0$$

rappresenterà una superficie d'ordine n avente col piano $\varphi = 0$ nel punto

Tali proprietà sono sufficienti per determinare come sia rappresentata su un piano del primo spazio la superficie di 6° ordine

---

$x_1=x_2=x_3=0$ un contatto d'ordine $r-1$ (che supporremo maggiore di 1); siano $g=0$, $h=0$, $k=0$ le equazioni di altre tre superficie analoghe. Se calcoliamo il Jacobiano delle quattro forme f, g, h, k e l'ordiniamo secondo le potenze discendenti di x_4 otterremo come termini di grado più elevato il seguente

$$F=\begin{vmatrix} f_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_1}x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_1}x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_1}x_4^{n-2} \\ f_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_2}x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_2}x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_2}x_4^{n-2} \\ f_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_3}x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_3}x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_3}x_4^{n-2} \\ (n-1)f_0\varphi x_4^{n-2} & (n-2)g_1\varphi x_4^{n-3} & (n-2)h_1\varphi x_4^{n-3} & n-2)k_1\varphi x_4^{n-3} \end{vmatrix}$$

e i tre che da esso derivano con scambi di f, g, h, k e cambiamenti di segno del secondo e quarto. Ora si trova facilmente essere

$$F=f_0\varphi^3x_4^{4n-7}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial k_1}{\partial x_3} \\ (n-1)\varphi & -g_1 & -h_1 & -k_1 \end{vmatrix}=-n\varphi^4x_4^{4n-8}\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial k_1}{\partial x_3} \end{vmatrix};$$

quindi intanto si vede che il punto $x_1=x_2=x_3=0$ è quadruplo per la Jacobiana e che il relativo cono osculatore è il piano $\varphi=0$ preso quattro volte. Ma per vedere meglio il modo di comportarsi della Jacobiana in detto punto, determiniamo di quale molteplicità esso sia per la sezione di questa superficie col piano anzidetto; basterà perciò porre $\varphi=0$ nell'equazione della Jacobiana e sviluppare il risultato secondo le potenze discendenti di x_4. Ora, supponendo anzitutto $r<n$, si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\varphi=0}=f_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_4^{n-1}+f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_4^{n-2}+\ldots+f_{r-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_4^{n-r+1}+\frac{\partial f_r}{\partial x_i}x_4^{n-2}+$$

$$+\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i}x_4^{n-r+1}+\ldots+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i}x_4+\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\ (i=1,2,3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_{\varphi=0}=\qquad(n-r)f_r x_4^{n-r-1}+\ldots+2f_{n-2}x_4+f_{n-1};$$

Digitized by Google

che gli corrisponde nel secondo. Alle sezioni piane di questa corrispondono ∞^3 cubiche circoscritte a un triangolo $A_1 A_2 A_3$; alla retta tripla Δ corrisponde una retta del piano di rappresentazione; e alla curva doppia Γ una curva di 7° ordine avente $A_1 A_2 A_3$ per punti tripli. Le sezioni principali delle superficie corrispondono alle rette del piano di rappresentazione; emerge da ciò che tutte le superficie di 6° ordine avente comuni con quella

---

quindi per $\varphi = 0$ nella Jacobiana i termini di grado più alto in x_4 sono

$$(n-r) f_0 x_4^{4n-4-3r} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_3} \\ o & g_r & h_r & k_r \end{vmatrix}.$$

ed i tre analoghi. Segue da ciò che :

In un punto nel quale tutte le superficie d'ordine n *di un sistema lineare hanno con un piano dato un contatto d'ordine* $r-1$, *ove* $2 < r < n$, *la Jacobiana del sistema ha un punto quadruplo; il relativo cono osculatore è il piano tangente comune alle superficie del sistema preso quattro volte, piano il quale taglia la Jacobiana in una curva avente quel punto per* $3r$*-plo.*

Dei due casi esclusi, $r = 2$ e $r = n$, il primo fu già studiato in una nota precedente, mentre l'altro esige una considerazione a parte. In vero, se $r = n$, è

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \varphi \left\{ (n-1) f_0 x_4^{n-2} + (n-2) f_1 x_4^{n-3} + \ldots + 2 f_{n-3} x_4 + f_{n-2} \right\}$$

e simili espressioni hanno $\frac{\partial g}{\partial x_4}, \frac{\partial h}{\partial x_4}, \frac{\partial k}{\partial x_4}$. Ne viene che il Jacobiano ha per fattore φ, epperò: *Qualunque sia* n *il piano col quale tutte le superficie di ordine* n *del sistema hanno un contatto d'ordine* $n-1$, *fa parte della Jacobiana del sistema; se* $n = 2$ *la parte residua di Jacobiana ha in generale il punto di contatto comune per punto triplo conico* (ed è in conseguenza un cono cubico avente per vertice quel punto), *mentre se* $n > 2$ *la parte residua di Jacobiana ha il punto di contatto comune per punto triplo unipolare in cui il piano tangente è il piano anzidetto.*

Un esempio del caso $n = 2$ è offerto dal sistema omaloidico composto delle quadriche passanti per tre punti O_1 O_2 O_3 e tangenti in un quarto punto O a un piano ω : la Jacobiana consta allora di ω e dei tre piani OO_2O_3, $OO_3 O_1$, $OO_1 O_2$ (Cremona, *Annali di Matematica*, t. V_2 p. 151).

Digitized by Google

rappresentata gli elementi singolari formano un sistema omaloidico; talchè *la detta superficie fa parte di un solo sistema omaloidico, il quale è da essa individuato.*

6. Per determinare le trasformazioni (3, 6) che non sono casi particolari della precedente, considereremo le superficie cubiche passanti per tre rette a due a due sghembe e poi quelle che passano per una retta e si toccano lungo un'altra.

Nel primo caso, chiamiamo $r_1 r_2 r_3$ le tre rette fondamentali e notiamo che esse stanno su ∞^7 superficie di 3° ordine. Due tali superficie si tagliano ancora in una curva di 6° ordine e genere 1 avente per quadrisecanti $r_1 r_2 r_3$, onde tre hanno 6 intersezioni mobili. Segue da ciò che per desumere da questo sistema ∞^7 un sistema omaloidico si deve conoscere una soluzione intera positiva delle equazioni $x_1 + 3x_2 = 4$, $x_1 + 4x_2 = 5$; tale soluzione è unica ed è $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Epperò *tutte le superficie di 3° ordine contenenti tre rette* $r_1 r_2 r_3$, *passanti per un punto* F *e tangenti a un piano* τ *in un punto* T *costituiscono un sistema omaloidico il cui inverso è di 6° grado.*

La Jacobiana di tale sistema è una superficie di 8° ordine avente $r_1 r_2 r_3$ per rette triple, F per punto doppio e T per punto quadruplo nel quale il cono osculatore comprende il piano τ. Ne viene che le ∞^1 rette secanti $r_1 r_2 r_3$ appartengono alla Jacobiana: il loro luogo è una quadrica, secante in altre 3 rette ogni superficie del sistema omaloidico. Inoltre, se consideriamo una conica bisecante r_1, incontrante in un punto tanto r_2 quanto r_3 e tangente in T al piano τ, essa starà completamente sulla Jacobiana, la quale pertanto contiene il piano Tr_1; similmente essa contiene i piani Tr_2 e Tr_3: ciascuno di questi piani taglia ogni superficie del sistema in una conica variabile. La parte residua di Jacobiana è la superficie di 3° ordine individuata dalle condizioni di contenere le rette $r_1 r_2 r_3$, di avere F per punto doppio, di toccare in T il piano τ: tale superficie si può considerare come il luogo delle ∞^1 cubiche gobbe di cui $r_1 r_2 r_3$ sono corde, di cui F è un punto, di cui τ è piano tangente in T.

Da ciò risulta: 1° ai piani del primo spazio corrispondono superficie di 6° ordine aventi comuni una conica tripla Γ, tre rette doppie $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ e una cubica gobba semplice Λ; 2° alle rette del primo spazio corrispondono cubiche gobbe seganti Γ in 3 punti, ogni retta Δ in 1 punto e Λ in 2 punti.

Digitized by Google

La situazione relativa degli elementi fondamentali del secondo spazio si palesa rilevando la struttura della Jacobiana del sistema inverso. Questa superficie consta del piano di Γ, preso 2 volte; di una quàdrica contenente l'$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, presa 3 volte; e di tre rigate di 4° grado aventi tutte per linee semplice Λ e due delle rette Δ e per linee doppie la terza di queste rette e la conica Γ.

Ogni superficie del sistema inverso è rappresentata univocamente sul corrispondente piano in modo che alle sezioni piane delle superficie corrispondono ∞^3 cubiche piane circoscritte a un triangolo: una determinata fra queste cubiche rappresenta la conica tripla, mentre le rette doppie corrispondono a tre rette uscenti dai vertici di questo triangolo. Sulla superficie si trovano sei rette semplici, ognuna delle quali ne incontra altre due soltanto.

7. Per studiare l'altra trasformazione (3, 6) di genere 1 che ancora rimane, consideriamo le ∞^6 superficie di 3° ordine tangenti fra loro lungo la retta t (*) e segantisi in una retta s

---

(*) *Numero delle condizioni lineari a cui equivale per una superficie il dovere toccarne un'altra della stessa specie lungo una retta data.* In coordinate omogenee x_i l'equazione generale di una superficie d'ordine n contenente la retta $x_1 = x_2 = 0$ è $x_1 f_1 + x_2 f_2 = 0$, ove f_1 e f_2 sono forme quaternarie di grado $n-1$. Se in ogni punto di quella retta la superficie possiede un piano tangente assegnato dovranno f_1 e f_2, quando si ponga in esse $x_1 = x_2 = 0$; differire da due date forme binarie $\varphi_1(x_1 x_2)$, $\varphi_2(x_1 x_2)$ per un fattore costante, ne viene che l'equazione generale di tale superficie sarà

$$(1)\quad f_o^{(n)} + \left\{ x_3 f_o^{(n)} + x_4 f_1^{(n)} \right\} + \left\{ x_3^2 f_o^{(n-1)} + x_3 x_4 f_1^{(n-1)} + x_4^2 f_2^{(n-1)} \right\} +$$
$$\ldots + \left\{ x_3^{n-2} f_o^{(2)} + x_3^{n-3} x_4 f_1^{(2)} + \ldots + x_4^{n-2} f_{n-2}^{(2)} \right\} + a \left\{ x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 \right\} = 0$$

ove $f_k^{(l)}$ è una forma binaria di grado l in x_1 e x_2; o più semplicemente

$$(2)\qquad a \left\{ x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 \right\} + F = o$$

ove F è una forma quaternaria di grado n soggetta alla condizione di mancare dei termini che sono in x_1 e x_2 di grado inferiore a 2. Il numero delle costanti che si trovano nella (1) è:

$$1 + 1.(n+1) + 2.n + 3(n-1) + \ldots + (n-1)3 =$$
$$= \left\{ 1.(n+1) + 2.n + 3\,(n-1) + \ldots + (n-1).3 + n.2 + (n+1).1 \right\} - 3n$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 3n\,;$$

(sghemba con t). Due qualsivogliano fra tali superficie si tagliano ancora in una curva razionale di 6° ordine 5—secante di t e 4—secante di s; mentre tre arbitrarie hanno 4 intersezioni mobili. Per conseguenza, a fine di separare da questo sistema ∞^6 un sistema omaloidico è necessario e sufficiente considerare le superficie di esso che contengono tre punti arbitrari $F_1 F_2 F_3$.

La Jacobiana del sistema omaloidico (3, 6) ora costruito è di 8° ordine, ha $F_1 F_2 F_3$ per punti doppi, s per linea tripla e t

---

quindi: *per una superficie d'ordine* n *il doverne toccare un'altra lungo una retta equivale in generale a* 3n *condizioni lineari semplici.*

Ma questo numero subisce in molti casi delle modificazioni le quali si possono determinare nel modo seguente.

Consideriamo due superficie Σ e Σ' d'ordine n aventi comuni delle linee semplici o multiple e di più una retta a appoggiata a queste in punti $I_1 I_2 \ldots I_k$ che per entrambe le superficie siano multipli secondo i numeri $m_1 m_2 \ldots m_k$; per ciascuna delle superficie il dovere contenere, oltre quelle linee, questa retta implica $(n+1)-(m_1+m_2+\ldots+m_k)$ condizioni. Ora ogni piano π per r taglia ciascuna delle superficie in una curva d'ordine $n-1$ avente per i punti $I_1 I_2 \ldots I_k$ per multipli secondo risp. m_1-1, m_2-1, $\ldots$, m_k-1 curva che incontra a in un numero di punti dato da $(n-1)-$
$-\{(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_k-1)\}=(n-1)-(m_1+m_2+\ldots+m_k)+k$.
Variando π attorno ad a, nascono in tal modo su a due involuzioni proiettive di punti di ordine eguale a quest'ultimo numero; i punti comuni a due loro gruppi corrispondenti sono punti di contatto delle due superficie: tolti i contatti che hanno luogo nei punti $I_1 I_2 \ldots I_k$ ne rimangono $2\{(n-1)-$ $-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\}+k$. Ne viene che affinchè le due superficie si tocchino lungo a è necessario e sufficiente abbiano $2\{(n-1)-(m_1+m_2+$ $+\ldots+m_k)\}+k+1$ punti di contatto su a in località diverse da' punti I. Questo numero è quello delle condizioni lineari semplici assorbite dal dovere le due superficie Σ e Σ' toccarsi lungo la retta a supposta già comune ad esse. Talchè possiamo concludere:

Se due superficie d'ordine n *hanno comuni delle linee che siano incontrate da una data retta in punti i quali siano per entrambe multipli secondo i numeri* $m_1 m_2 \ldots m_k$, *allora il dovere una di esse toccare l'altra in tutti i punti di quella retta equivale a* $3\{n-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\}+k$ *condizioni lineari semplici.*

Se si suppone $k=0$ si ritrova la proposizione dimostrata dianzi analiticamente.

Digitized by Google

per linea quintupla (*). La composizione di essa si determina, ad esempio, ricorrendo alla rappresentazione univoca su un piano Π di una superficie φ del sistema. Detti infatti $A_1 \dots A_6$ i punti fondamentali di questa rappresentazione, se $(A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)_2$ è l'imagine di t e $(A_1 A_3 A_4 A_5 A_6)_2$ quella di s, se inoltre $G_1 G_2 G_3$ sono le imagini di $F_1 F_2 F_3$; alle sezioni di φ colle altre superficie del nostro sistema omaloidico corrisponderanno le ∞^2 curve $(A_1^2 A_2 G_1 G_2 G_3)_3$. Perciò l'intersezione di φ colla Jacobiana del sistema si compone

α) della quartica gobba rappresentata dalla conica $A_1 A_2 G_1 G_2 G_3$, quartica la quale passa pei punti $F_1 F_2 F_3$ e ha per trisecanti s e t;

β) delle coniche rappresentate dalle rette $A_1 G_i$ $(i = 1, 2, 3)$, coniche passanti per F_i e seganti in 1 punto s e in 2 punti t;

γ) dalle rette rappresentate da' punti $A_3 A_4 A_5 A_6$ e dalla retta $A_1 A_2$, rette appoggiate tutte alle rette s e t.

(*) *Una retta di contatto per tutte le superficie di un sistema lineare, di quale molteplicità è per la Jacobiana del sistema?* Per rispondere a tale questione applichiamo il risultato espresso dalla equazione (2) della nota precedente e supponiamo che il sistema lineare che consideriamo sia individuato dalle quattro superficie

$$a(x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2) + F = 0\,,\quad b(x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2) + G = 0,\quad c(x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2) + H = 0,$$
$$d(x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2) + K = 0\,.$$

Con una semplice trasformazione del determinante dei primi membri di queste equazioni si trova che, come equazione della Jacobiana, si può prendere

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_1} & \varphi_1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \varphi_2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial H}{\partial x_3} & \frac{\partial K}{\partial x_3} & x_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F}{\partial x_4} & \frac{\partial G}{\partial x_4} & \frac{\partial G}{\partial x_4} & \frac{\partial K}{\partial x_4} & x_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ a & b & c & d & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ora nello sviluppo di questo determinante ogni termine è almeno di 5° grado nelle coordinate x_1, x_2. Perciò è lecito asserire che: *una retta lungo la quale si toccano tutte le superficie di un sistema lineare è in generale quintupla per la Jacobiana del sistema medesimo,*

Digitized by Google

Ora il luogo della quartica α) è la quadrica $s\,t\,F_1\,F_2\,F_3$ e i luoghi delle tre serie di coniche β) non sono altro che i piani tF_1. tF_2, tF_3; per conseguenza il luogo delle rette γ) è una superficie di 3° grado avente s per direttrice doppia e t per direttrice semplice: siccome questa rigata non sega altro che in queste sette rette la superficie φ, così essa deve toccarla lungo la retta t, epperò essa rigata è definita dalle condizioni di avere s per direttrice doppia e di toccare lungo t una e quindi tutte le superficie del sistema omaloidico.

Il sistema inverso risulta di superficie di 6° ordine aventi a comune una retta quadrupla q, tre rette doppie $d_1\,d_2\,d_3$ e una curva razionale di 5° ordine $\Lambda.q$ è incontrato dalle tre rette d_i ($i=1, 2, 3$) e il piano $q\,d_i$ corrisponde al punto F_i; di Λ, q è bisecante mentre le d_i sono trisecanti. Oltre ai tre piani anzidetti, presi due volte ognuno, della Jacobiana del sistema inverso fa parte la rigata di 4° grado della quale q è retta tripla e gli altri elementi fondamentali del sistema sono linee semplici; e ancora un luogo di 10° ordine il quale non è se non la superficie di 5° ordine avente q per retta tripla, $d_1\,d_2\,d_3$ per doppie e Λ per linea semplice, da contarsi due volte.

La rappresentazione univoca per una superficie ψ del sistema inverso che scaturisce da quanto precede è tale che le sezioni piane di ψ hanno per imagine ∞^3 cubiche passanti per un punto M e tangenti in un altro punto N a una retta n; la retta quadrupla corrisponde a una conica passante per i punti M e N; delle rette doppie sono imagini tre rette per N e della quintica semplice una cubica piana tangente a n in N e avente per punto doppio M.

Quanto precede dimostra che le trasformazioni (3, 6) diverse dalle precedenti ne sono casi particolari. Cerchiamo se esistano delle trasformazioni (3, 7): bisognerà perciò considerare le superficie di 3° ordine passanti per una conica o per una coppia di rette oppure tangenti fra loro lungo una retta. Per ottenere in corrispondenza un sistema omaloidico si deve risolvere il primo, il secondo o il terzo dei seguenti sistemi:

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 9 \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 14$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 12$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7 \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 10\ .$$

Digitized by Google

Ora i primi due sistemi non hanno alcuna soluzione intera e positiva, mentre il terzo ha l'unica $x_1 = x_3 = 1$. In tal caso, se si rappresenta una superficie φ del sistema omaloidico sul piano II per modo che le sue sezioni piane corrispondano alle curve $(A_1 \dots A_6)_3$ e si suppone che $(A_5 A_6)_1$ rappresenta la retta t lungo cui ha luogo il contatto, le sezioni di φ con le altre superficie del sistema corrisponderanno a una rete del tipo seguente

$$(A^3_1 \dots A^3_4 A_5 A_6 M N^3)_7 ;$$

ma tutti gli elementi di questa rete si spezzano in una parte fissa, che è la conica $A_1 \dots A_4 N$ e una parte mobile: quella rappresenta la sezione prodotta nella superficie φ dal piano che contiene la retta t e il punto avente per imagine N, questa una curva di 5° ordine e genere 1 non incontrante l'anzidetta conica. Ciò dimostra che il sistema ottenuto non è omaloidico.

Similmente, la ricerca delle trasformazioni razionali (3, 8) di genere 1, si fa dipendere dalla risoluzione del sistema

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 12 , \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 19 ;$$

e siccome esso non ha alcuna soluzione intera positiva, così si conclude la non esistenza di trasformazioni dell'anzidetta specie.

Da ultimo, poichè il sistema

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 16$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 = 26 .$$

ha la soluzione (unica) $x_1 = x_5 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, sembra che esista una trasformazione (3, 9) determinata da una superficie generale di 3° ordine. Ma notiamo che rappresentando nel modo consueto una delle superficie dal sistema, le ∞^2 curve in cui essa è tagliata dalle altre superficie del sistema corrispondono a una rete del seguente tipo $(A^3_1 \dots A^3_6 M N^5)_9$; ora tutte queste curve si spezzano nella parte fissa $(A_1 \dots A_6 N^2)_3$ e in una parte mobile; la prima delle quali è l'imagine della sezione fatta nella superficie considerata dal piano che la tocca nel punto rappresentato da N, mentre la seconda rappresenta una superficie di 6° ordine e genere 1 non segante l'anzidetta sezione. Ciò prova che il sistema ottenuto non è omaloidico e ci abilita a concludere:

Digitized by Google

Non esistono trasformazioni razionali nelle quali in uno dei due spazi il sistema omaloidico sia formato da superficie generali di 3° ordine e nell'altro spazio consti di superficie d'ordine superiore a 6.

Genova, 20 Dicembre 1890.

Sopra alcune curve singolari.

Nota del Prof. GIUSEPPE PEANO

Lo Staudt, nel § 11 della sua Geometria di posizione, tratta per via sintetica, di alcune proprietà della tangente e del piano osculatore ad una curva qualunque. Queste proprietà si dimostrano in calcolo infinitesimale colla formula di Taylor; quindi si suppone che le funzioni che si considerano siano sviluppabili con questa formula. Invece lo Staudt non assoggetta le curve ch'egli considera ad alcuna condizione, salvo quella della continuità. Io mi propongo di dimostrare con esempi che quelle condizioni restrittive sono necessarie, e che quindi le proposizioni enunciate dallo Staudt non sono rigorosamente vere; e pubblico questi esempi, che credo nuovi, colla speranza di invogliare qualcuno a rendere rigorose le proposizioni e dimostrazioni di Staudt, senza abbandonare il campo sintetico.

Lo Staudt al N. 144 enuncia una proposizione, che in linguaggio ordinario suona: « Se P e P' sono due punti d'una curva piana, avente tangente in ogni suo punto, col tendere di P' a P, il punto d'incontro delle tangenti t e t' in P e P' ha per limite il punto P ».

Si possono invece dare delle curve, per cui, col tendere di P' a P, il punto $t\,t'$ non tenda ad alcun limite. Sia l'equazione $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (e per $x = 0$, sia $y = 0$); la y è funzione continua di x; perciò questa equazione rappresenta una curva

Digitized by Google

continua, passante per l'origine, e poichè $\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0$, avente ivi per tangente l'asse delle x. Considerando un altro punto qualunque di ascissa x, si avrà $\frac{dy}{dx} = y' = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, e il punto d'incontro della tangente ivi colla tangente all'origine avrà per ascissa

$$x - \frac{y}{y'} = x - \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}},$$

e per ordinata 0. Facendo tendere x verso 0, l'ascissa $x - \frac{y}{y'}$, non tende ad alcun limite, ma ha per estremi oscillatorii $-\infty$ e $+\infty$. Quindi il punto d'incontro della tangente in P colla tangente in O non tende alcun limite; ma preso ad arbitrio un punto A sull'asse delle x, in ogni arco di curva, arbitrariamente piccolo, avente un estremo in O, ci saranno sempre dei punti in cui la tangente viene a passare per A. In questa curva, y', col tendere di x a zero, non tende ad alcun limite, ma ha per estremi oscillatorii -1 e $+1$; quindi la tangente in P non tende ad alcun limite col tendere di P verso O.

Nell'esempio precedente la curva è incontrata dall'asse delle x in infiniti punti nelle vicinanze dell'origine. La curva

$$y = x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

è incontrata da ogni retta in un numero finito di punti; ed ha le stesse proprietà della precedente.

Si possono dare delle curve per cui col tendere di P' a P, la tangente t' abbia per limite t, senzachè il punto tt' tenda ad alcun limite. Sia la curva:

$$y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Essa passa per l'origine, ed ha ivi per tangente l'asse delle x. Si ha $y' = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, e $\lim_{x=0} y' = 0$; onde la tangente

Digitized by Google

nel punto di ascissa x ha per limite la tangente nell'origine. Ma l'ascissa del punto d'incontro delle due tangenti

$$x - \frac{y}{y'} = x - \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{3\,x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{2}}$$

col tendere di x a zero non tende ad alcun limite, ed ha per estremi oscillatorii $-\infty$ e $+\infty$.

Si possono dare delle curve per cui, col tendere di P' a P, la tangente t' abbia per limite t, e il punto $t\,t'$ tenda ad un limite, senzachè il limite di questo punto sia P. Sia la curva di equazione

$$y = x^{\frac{2}{3}} + x^2\left(\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3} - \cos^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}\right).$$

Essa passa per l'origine, ed ha ivi per tangente l'asse delle y. Si ha:

$$y' = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3} - \frac{2}{x^2}\,\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3} + \operatorname{sen}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}}{\cos^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}} + 2\,x\left(\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3} - \cos^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}\right).$$

Il terzo termine in y' tende a 0; la somma dei due primi termini si può scrivere

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{5}{3}} - 2\,\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3} + \operatorname{sen}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}}{\cos^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}}\right).$$

Entro le parentesi, il primo termine tende a zero; nel secondo termine il numeratore è compreso fra 1 e $\sqrt[3]{4}$; il denominatore è, in valor assoluto minore dell'unità; quindi il secondo termine è in valor assoluto maggiore di 2. Moltiplicando per $\frac{1}{x^2}$, che tende ad ∞, si deduce $\lim\limits_{x=0} y' = \infty$; e si ha pure

$\lim_{x=0} xy' = \infty$. Quindi la tangente nel punto di ascissa x ha per limite l'asse delle y, cioè la tangente nell'origine; il punto d'incontro delle due tangenti, il quale ha per ascissa 0, e per ordinata $y - xy'$, col tendere di x a zero, poichè $\lim y = 0$ e $\lim xy' = \infty$, tende verso il punto all'infinito dell'asse delle y.

Analogamente, ammessa puramente la continuità d'una curva gobba, se P e P' sono due punti di essa, t e t' le tangenti, π e π' i rispettivi piani osculatori, non si possono enunciare, con Staudt, le proposizioni:

« Il piano π è il limite del piano passante per t e parallelo a t' » (N. 146).

« Il piano π è il limite del piano Pt' » (N. 148).

« La retta t è il limite della retta $\pi\pi'$ » (id.).

« Il punto P è il limite del punto $t\pi'$ » (id.).

« Il punto P è il limite del punto $t'\pi$ » (id.).

Sull'accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno a un punto;

Nota di ENRICO NOVARESE

Abbiasi una figura invariabile la quale ruoti intorno ad un punto, e si consideri l'accelerazione di 2° ordine che un punto qualunque della figura ha in un istante qualsiasi. W. SCHELL, nel suo ben noto trattato *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, si è proposto di determinare le projezioni di detta accelerazione sopra tre assi coordinati speciali particolarmente notevoli (V. 1ª ediz., pp. 479-480, 2ª ediz., pp. 562-563 del Vol. I). Egli è giunto a certi risultati nella 1ª edizione del libro e a risultati un po' differenti nella 2ª edizione. Ora a me non sembrano pienamente esatti nè gli uni nè gli altri: e perciò, considerato l'importanza e la notorietà dell'opera del Prof. SCHELL, stimo

Digitized by Google

non inopportuno l'esporre qui una soluzione della questione accennata, soluzione ottenuta con un metodo affatto diverso da quello dello SCHELL e, per quanto mi pare, sicuro da ogni obbiezione.

Nella Nota che ho l'onore di presentare all'Accademia, do altresì qualche formola, che ritengo nuova, intorno alla curvatura ed alla torsione della trajettoria di un punto qualunque del sistema mobile.

I.

Siano Ox, Oy, Oz tre assi ortogonali immobili uscenti dal centro della rotazione. Siano, per la fine del tempo t, OI la *parte positiva* dell'asse istantaneo di rotazione (*), a, b, c i coseni direttori di OI; ω il valore assoluto della velocità angolare, p, q, r le projezioni di questa sugli assi. Avremo

$$p=\omega a\,, \qquad q=\omega b\,, \qquad r=\omega c \qquad \ldots (1)$$

e, derivando rispetto a t (**),

$$p'=\omega' a+\omega a'\,, \quad \text{ecc.} \qquad \ldots (2)\,,$$

e

$$p''=\omega'' a+2\,\omega' a'+\omega a''\,, \quad \text{ecc.} \qquad \ldots (3)\,.$$

Consideriamo due segmenti (*Strecken*, *vettori*) ψ e χ, le cui projezioni sugli assi siano uguali rispettivamente ad a', b', c' e ad a'', b'', c''. Il segmento ψ è ciò che lo SCHELL chiama la *Wechselgeschwindigkeit* dell'asse istantaneo OI e che io, adottando una denominazione che ho usato altra volta (***), preferisco chiamare la *velocità sferica* dell'asse medesimo nel suo moto assoluto. Se immaginiamo una sfera di centro O e di raggio 1, e diciamo C, Γ le linee secondo cui la superficie di tale sfera interseca rispettivamente il cono immobile (C) e il cono mobile (Γ) degli assi istantanei di rotazione, ψ è la velocità con cui il punto P

(*) Cioè, la parte a cui deve addossarsi un osservatore avente i piedi in O per vedere la rotazione istantanea *farsi* da sinistra a destra.

(**) Qui ed in seguito indico con accenti le derivazioni rispetto al tempo.

(***) V. il mio *Studio sulla accelerazione di ordine* n *nel moto di una retta* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 24 febbraio 1889).

Digitized by Google

di contatto delle due linee si sposta tanto sulla C quanto sulla Γ. Analogamente, il segmento χ è l'*accelerazione sferica* di 1° ordine dell'asse istantaneo (nel suo moto assoluto) o, in altri termini, l'accelerazione di 1° ordine del moto del punto P sulla linea C.

Ritenendo le lettere ψ e χ per designare i valori assoluti dei due segmenti considerati, scriveremo come segue le (2) e (3)

$$\left.\begin{aligned} p' &= \omega' a + \omega\psi \cos(\psi x) \\ q' &= \omega' b + \omega\psi \cos(\psi y) \\ r' &= \omega' c + \omega\psi \cos(\psi z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2'),$$

$$\left.\begin{aligned} p'' &= \omega'' a + 2\,\omega'\psi \cos(\psi x) + \omega\chi \cos(\chi x) \\ q'' &= \omega'' b + 2\,\omega'\psi \cos(\psi y) + \omega\chi \cos(\chi y) \\ r'' &= \omega'' c + 2\,\omega'\psi \cos(\psi z) + \omega\chi \cos(\chi z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3')\ (^{***}).$$

Notiamo ancora le relazioni seguenti, che ci occorreranno più innanzi

$$\cos(\chi\psi) = \frac{a'a'' + b'b'' + c'c''}{\psi\chi} = \frac{\frac{1}{2}\frac{d.\psi^2}{dt}}{\psi\chi} = \frac{\psi'}{\chi} \quad \ldots (4),$$

come può anche vedersi immediatamente avvertendo che il prodotto $\chi \cos(\chi\psi)$ esprime l'accelerazione tangenziale di 1° ordine del moto assoluto di P; e

$$\cos(\chi, OI) = \frac{a a'' + b b'' + c c''}{\chi} = -\frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{\chi} = -\frac{\psi^2}{\chi} \quad (5).$$

Ciò premesso, riesce facilissima la ricerca proposta. Si con-

---

(*) Queste formole sono suscettive di una notevole interpretazione.

Le (2') dicono che l'accelerazione angolare di 1° ordine del sistema mobile è la somma geometrica: 1° di un segmento $= \omega'$, parallelo all'asse istantaneo, volto pel verso OI o pel verso opposto secondochè $\omega' \gtrless 0$, 2° di un segmento $= \omega\psi$, avente la direzione ed il verso di ψ. Questa proposizione è conosciuta (Resal, *Cinématique pure*, p. 114; Schell, op. cit., 2ª ediz., p. 477 del vol. I).

Le formole (3') esprimono il teorema analogo per l'accelerazione angolare di 2° ordine, teorema che non credo notorio. E ognun vede come si estenderebbe il teorema all'accelerazione angolare d'ordine n, introducendo le accelerazioni sferiche successive (fino all'ordine $n-1$ incl.) dell'asse istantaneo,

Digitized by Google

sideri un punto qualunque della figura mobile; e siano, alla fine del tempo t, M (x, y, z) la posizione da esso occupata, v la sua velocità, $J^{(2)}$ la sua accelerazione di 2° ordine. Derivando due volte le formole notissime

$$v_x = qz - ry$$
$$v_y = rx - pz$$
$$v_z = py - qx\,,$$

si ottengono le projezioni di $J^{(2)}$ sugli assi:

$$\left.\begin{aligned} J_x^{(2)} &= -3(qq' + rr')x + (r\omega^2 + 2pq' + p'q - r'')y + \\ &\quad + (-q\omega^2 + rp' + 2r'p + q'')z \\ J_y^{(2)} &= (-r\omega^2 + pq' + 2p'q + r'')x - 3(rr' + pp')y + \\ &\quad + (p\omega^2 + 2qr' + q'r - p'')z \\ J_z^{(2)} &= (q\omega^2 + 2rp' + r'p - q'')x + \\ &\quad + (-p\omega^2 + qr' + 2q'r + p'')y - 3(pp' + qq')z \end{aligned}\right\} \ldots(6).$$

Supponiamo ora che gli assi coordinati, fin qui arbitrarj, siano quelli adottati dallo SCHELL. E cioè: per semiasse positivo delle z prendiamo OI; per semiasse positivo delle x la retta condotta da O nella direzione e pel verso della velocità sferica ψ; per semiasse positivo delle y la posizione che assumerebbe il semiasse positivo Ox dopo aver ruotato intorno ad OI di 90° pel verso della rotazione istantanea. (L'asse delle y sarà parallelo alla normale comune ai due coni (C) e (Γ) nel punto P). La questione da risolvere è ridotta a vedere che cosa valgano per questa scelta particolare di assi le quantità p, q, r, p', q', r', p'', q'', r''. Le prime sei si hanno immediatamente: attualmente

$$a = 0\,, \qquad \cos(\psi x) = 1\,,$$
$$b = 0\,, \qquad \cos(\psi y) = 0\,,$$
$$c = 1\,, \qquad \cos(\psi z) = 0\,;$$

e però [form. (1) e (2')]

$$p = 0\,, \qquad p' = \omega\psi\,,$$
$$q = 0\,, \qquad q' = 0\,,$$
$$r = \omega\,, \qquad r' = \omega'\,.$$

Digitized by Google

Per avere p'', q'', r'' occorre conoscere i coseni direttori di χ rispetto agli assi attuali; ora, nell'ipotesi fatta,

$$\cos(\chi x) = \cos(\chi \psi) = \frac{\psi'}{\chi} \qquad \text{[per la form. (4)]},$$

$$\cos(\chi z) = \cos(\chi, OI) = -\frac{\psi^2}{\chi} \qquad \text{[per la form. (5)]},$$

$$\cos(\chi y) = \frac{\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4}}{\chi} ;$$

e quindi [form. (3')]

$$p'' = 2\,\omega'\psi + \omega\psi' ,$$
$$q'' = \omega\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4} ,$$
$$r'' = \omega'' - \omega\psi^2 .$$

Il radicale $\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4}$ è da prendersi positivo o negativo secondochè l'accelerazione χ fa angolo acuto od ottuso coll'asse delle y, vale a dire secondochè il cono immobile (C) è nel punto P concavo o convesso verso le y positive. Ma possiamo trovare delle espressioni più semplici di $\chi \cos(\chi y)$ e, per conseguenza, di q''. Poichè ψ' esprime l'accelerazione tangenziale del moto assoluto del punto P, $\chi^2 - \psi'^2$ esprimerà il quadrato dell'accelerazione normale χ_n del moto stesso: ma $\chi_n = \frac{\psi^2}{\mathbf{r}}$, detto $\mathbf{r}$ il valore assoluto del raggio di curvatura della linea C nel punto P; dunque $\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4} = \psi^2 \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}^2} - 1}$. Od anche $\chi \cos(\chi y)$ rappresenta la projezione sull'asse Oy dell'accelerazione χ, la qual projezione si riduce a quella dell'accelerazione χ^n e però vale $\frac{\psi^2}{\mathbf{r}} \cos(\chi_n y)$. D'altra parte, se denotiamo con R il raggio di curvatura principale del cono (C) nel punto P (*), abbiamo, pel teorema di MEUSNIER,

$$\mathbf{r} = R \cos(\chi_n y)$$

(*) Cioè il raggio di curvatura della sezione fatta dal piano condotto per P normalmente alla generatrice OI.

Digitized by Google

uguaglianza che è sempre vera in grandezza e in segno, purchè si convenga di prendere R positivo o negativo secondochè il cono (C) volge nel punto P la concavità verso le y positive oppure verso le y negative. Quindi $\chi \cos(\chi y)$ è anche uguale a $\frac{\psi^2}{R}$. Riassumendo:

$$q'' = \omega\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4} = \omega\psi^2\sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} = \frac{\omega\psi^2}{r}\cos(\chi_n y) = \frac{\omega\psi^2}{R}.$$

Di queste varie espressioni adotteremo l'ultima.

Sostituendo nelle eq. (6) i valori trovati di p, q, ecc., otteniamo

$$\left.\begin{aligned} J_x^{(3)} &= -3\omega\omega' x + (\omega^3 - \omega'' + \omega\psi^2)y + \omega\psi\left(\omega + \frac{\psi}{R}\right)z \\ J_y^{(3)} &= -(\omega^3 - \omega'' + \omega\psi^2)x - 3\omega\omega' y - (2\omega'\psi + \omega\psi')z \\ J_z^{(3)} &= \omega\psi\left(2\omega - \frac{\psi}{R}\right)x + (2\omega'\psi + \omega\psi')y \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Queste sono le formole richieste che esprimono le projezioni di $J^{(3)}$ sugli assi speciali assunti dallo SCHELL. Parmi inopportuno il rilevare le varie differenze che esistono tra queste formole e quelle analoghe date nelle due edizioni della *Theorie* ecc. Osservo soltanto che, delle quantità qui usate, non comparisce nelle formole dello SCHELL il raggio R: vi figurano per contro quantità da noi non introdotte e cioè l'accelerazione angolare di 1° ordine α, la derivata $\frac{di}{dt}$, essendo di « l'angolo compreso tra le direzioni di α e di $\alpha + d\alpha$ » e l'angolo $\varkappa$ che il piano di queste due rette fa col piano zx. Tale divario proviene dall'espressione di q'' adoperata dallo SCHELL, espressione assai diversa dalle nostre: $q'' = \alpha \operatorname{sen} \varkappa \frac{di}{dt}$. Quest'espressione è esatta.

Digitized by Google

II.

Farò un'applicazione delle formole (7) a determinare la torsione in M della trajettoria descritta dal punto considerato.

Siano ρ il raggio di curvatura, τ il raggio di torsione della trajettoria predetta nel punto M. Considerando l'accelerazione di 1° ordine, si può determinare ρ in funzione di ω, di ψ e delle coordinate di M. Ecco l'espressione di ρ data dallo Schell nella 1ª edizione (p. 411) del suo trattato (posto, per brevità, $u^2 = x^2 + y^2$):

$$\rho = \frac{\omega u^3}{\sqrt{(\omega u^2 + \psi y z)^2 + \psi^2 y^2 u^2}},$$

che si può scrivere, chiamando a la distanza invariabile del punto che si considera dal centro O della rotazione,

$$\rho = \frac{\omega u^3}{\sqrt{\omega^2 u^4 + 2\omega\psi y z u^2 + a^2 \psi^2 y^2}} \quad \ldots (8).$$

Analogamente, valendoci dell'accelerazione di 2° ordine, possiamo determinare τ in funzione di ω, ψ, R e delle coordinate del punto M. Infatti, dalle eq. (7) si deduce facilmente la projezione $J_b^{(2)}$ di $J^{(2)}$ sulla binormale in M alla trajettoria considerata (*). D'altra parte, per la teoria del moto di un punto,

$$J_b^{(2)} = \frac{v^3}{\rho\tau} = \frac{\omega^3 u^3}{\rho\tau}:$$

sostituendo quivi a $J_b^{(2)}$ l'espressione dedotta dalle (7) e a ρ l'espressione fornita dalla (8), si trova

$$\tau = \frac{\omega(\omega^2 u^4 + 2\omega\psi y z u^2 + a^2\psi^2 y^2)}{\omega\psi\left(2\omega - \frac{\psi}{R}\right) x u^2 + (\omega\psi' - \omega'\psi) y u^2 + 3\omega\psi^2 x y z} \quad \ldots (9)$$

Le formole (8) e (9) sono suscettibili di una trasformazione

(*) I coseni direttori di questa binormale sono proporzionali a

$$\psi x y, \quad \psi y^2, \quad \omega u^2 + \psi y z.$$

Digitized by Google

degna di menzione. È noto (*) che, se R_1 è il raggio di curvatura principale del cono mobile (Γ) nel punto P,

$$\frac{\omega}{\psi}=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}.$$

(Quest'uguaglianza è vera in ogni caso, purchè si estenda a R_1 la convenzione già fatta per R, cioè si consideri ciascuno dei due raggi R e R_1 come positivo o negativo, secondochè il cono rispettivo è (nel punto P) concavo verso le y positive ovvero verso le y negative). Mediante questa relazione, possiamo eliminare dalle (8) e (9) ω e ψ. Designando con K la curvatura relativa $\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}$, con σ l'arco della linea C, e avvertendo che

$$\frac{\omega\psi'-\omega'\psi}{\psi^2}=-\frac{1}{\psi}\frac{d\left(\frac{\omega}{\psi}\right)}{dt}=-\frac{K'}{\sigma'}=-\frac{dK}{d\sigma},$$

le espressioni di ρ e di τ prendono questa forma notabile:

$$\rho=\frac{Ku^3}{\sqrt{K^2u^4+2\,Kyzu^2+a^2y^2}}$$

$$\tau=\frac{K^2u^4+2\,Kyzu^2+a^2y^2}{\left(2\,K-\frac{1}{R}\right)xu^2-\frac{1}{K}\frac{dK}{d\sigma}yu^2+3\,xyz}.$$

(*) SCHELL, op. cit., 2ª ediz., p. 268 del vol. I.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Gennaio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Fabretti, Vice-Presidente, Rossi, Pezzi, Cognetti e Peyron che fa le veci di Segretario.

Il Socio Peyron legge il verbale della seduta precedente il quale viene approvato.

Presenta poi, per incarico del Presidente, la splendida opera che S. E. il Generale Menabrea, Socio nazionale non residente, invia alla Classe da Parigi, ed è *Le Mémorial des Saints* par A. Pavet de Corteille (Paris, 1889), in due volumi in-folio, magnificamente stampati, dei quali il primo contiene il testo arabico, ed il secondo la traduzione francese, col titolo *Le Mémorial des Saints traduit par le manuscrit ouïgur de la Bibliothèque nationale*. All'illustre Socio così sempre zelante della nostra Accademia pur tra le sue gravi occupazioni, saranno rese grazie per un dono che e dall'Autore e da chi lo trasmise ha singolare pregio.

Il Socio Giuseppe Carle, per incarico del chiarissimo Professore Emilio Brusa della R. Università di Torino, fa omaggio all'Accademia di varie sue pubblicazioni, accennando al loro con-

Digitized by Google

tenuto, e notando la estesa e varia operosità scientifica dimostrata in esse dall'egregio Autore, operosità di cui son prova le opere recate in dono, e singolarmente registrate nella bibliografia a stampa in calce alla dispensa 5ª degli *Atti* dell'Accademia.

Il Socio Domenico PEZZI offre da parte dell'Autore, cav. Giovanni ORMEZZANO, il libro *Cenni storici sul R. Collegio Carlo Alberto per gli studenti delle provincie e sulle varie fondazioni al medesimo annesse*. Torino, 1891, 1 vol. in-8°. Il Socio PEZZI pone in rilievo l'importanza e la specialità del lavoro nella storia subalpina; accenna come egli stesso potè valersene prima della sua pubblicazione per cortesia dell'Autore, e ne riassume i pregi notando un grande studio di esattezza e amore dell'argomento.

Il Socio Francesco ROSSI presenta la trascrizione, con la traduzione italiana, di un testo copto, nel quale sono ricordati i principali fatti del Divin Salvatore; ma il loro racconto è interrotto ad ogni pagina da lacune dovute a rotture del papiro. Con questo lavoro ha termine la pubblicazione dei papiri copti pervenuti al nostro Museo di Antichità colla celebre collezione dei monumenti egizi del DROVETTI. Il lavoro del Socio Prof. ROSSI è approvato ad unanimità per la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Digitized by Google

LETTURE

Del processo formativo dello Stato moderno;

Nota del Socio Prof. GIUSEPPE CARLE

(Letta nell'adunanza del 4 Maggio 1890).

SOMMARIO.

1. Del Medio Evo, qual periodo di incubazione di una nuova forma di organizzazione sociale. — 2. Insufficienza del feudo e del municipio per l'uomo dell'età moderna. — 3. Tendenza del feudo e dei municipî a riunirsi in aggregazioni più vaste. — 4. Delle Leghe o *Societates* dei Comuni, in quanto servirono a preparare quest'aggregazione più vasta. — 5. Come all'uscire del Medio Evo esistessero allo stato diffuso ed incoerente gli elementi primordiali dello Stato moderno. — 6. Leggi che ne governarono la naturale formazione. — 7. Origine pressochè contrattuale del potere sovrano nel primo formarsi dello Stato moderno e conseguenze che ne derivarono. — 8. Contributo speciale arrecato dall'Italia alla formazione dello Stato moderno.

1. Se un tempo si parlava soltanto del Medio Evo come di un'epoca di tenebre e di confusione, ora tutti son concordi nel riconoscere la sua importanza nella storia della convivenza sociale, e nel considerare il Medio Evo come un periodo di transizione della *città antica* allo *Stato moderno.* Sotto un aspetto il Medio Evo fu un crogiuolo, in cui la civiltà antica si venne dissolvendo ne' suoi elementi primordiali, e sotto un altro esso fu un periodo di incubazione di una nuova forma d'organizzazione sociale. Quella stessa varietà degli elementi, che vennero a trovarsi di fronte durante l' Evo di Mezzo, mentre fece durare più lungamente questo periodo di incubazione, contribuì a rendere più ricca, armonica e coerente la nuova organizzazione sociale.

Questo è certo, che nel Medio Evo si incontrarono non solo, ma dovettero convivere insieme sulla medesima terra stirpi, che avevano dimenticata l'origine comune, e che si trovavano in condizioni sociali completamente diverse. Ne conseguì, che fra i popoli moderni non ve ne ha forse alcuno, il quale appartenga esclusivamente a questa o a quella stirpe originaria; ma tutti uscirono

Digitized by Google

dall'intreccio e dalla mescolanza di stirpi diverse, che si sovrapposero le une alle altre per modo, che i varii popoli in tanto si possono assegnare piuttosto ad una che ad un'altra stirpe, in quanto si riguardi all'elemento, che ebbe prevalenza in ciascuno di essi (1).

Questa mescolanza e questo intreccio di stirpi produsse poi eziandio uno scambio ed un immedesimarsi reciproco delle attitudini originarie proprie di ciascuna stirpe, come pure un incontrarsi ed un contemperarsi a vicenda dei concetti e delle istituzioni sociali, che erano stati specialmente svolti da ciascuna stirpe nei periodi anteriori di convivenza sociale. Di qui derivò, che ciascun popolo moderno perdette bensì quelle fattezze caratteristiche e decise, che distinguevano nettamente il tipo Ellenico dall'Italico e dal Teutonico (2), ma venne ad un tempo guadagnando in quelle facoltà, che poco esplicate nella sua stirpe originaria si trovavano invece maggiormente sviluppate nelle altre stirpi, con cui venne a trovarsi in contatto. Frattanto si vennero eziandio incontrando i concetti della *città* e dello *Stato*, che già si erano sviluppati in Grecia ed in Roma, i concetti delle *individualità* e della *nazione armata*, che erano sopratutto vigorosi presso le popolazioni germaniche (3) e il concetto infine di una grande repubblica, riunita nella medesima religione e raccolta sotto il medesimo impero, da cui uscirono poi le grandi concezioni della Chiesa e dell'Impero. Per tal modo il *cristianesimo* somministrò la nuova *base etica* e *morale*, *l'antichità classica* arrecò una larga messe di *concetti civili* e *politici*, mentre l'*elemento germanico* pose in comune il sangue, l'ardor giovanile, la labo-

---

(1) È anche degno di nota, che siccome le varie genti, che dovettero convivere insieme sul medesimo suolo nel Medio Evo, discendevano per la maggior parte dalla medesima stirpe Aria, così esse, non trovandosi a troppa distanza fra di loro nella loro costituzione fisica e mentale, poterono imparentarsi fra di loro con reciproco vantaggio.

(2) Ho cercato di richiamare le differenze caratteristiche fra le genti Elleniche, Italiche e Germaniche ad una facoltà psicologica costitutiva dell'umana natura nell'opera: *La vita del diritto nei suoi rapporti colla vita sociale.* 2ª Edizione, Torino 1890, libro II, cap. I, pag. 56 a 77.

(3) L'esistenza contemporanea presso i primitivi Germani dei concetti della *individualità* e della *nazione armata*, i quali a prima giunta sembrano essere in antitesi fra di loro, trovasi dimostrata nell'opera sovra citata, lib. II, cap. IV, n. 93, pag. 171.

Digitized by Google

riosità instancabile e certi concetti, i quali, non essendosi ancora svolti nel periodo anteriore, erano chiamati a ricevere un grande sviluppo nell'avvenire.

Infine nello stesso Medio Evo, in uno spazio di tempo relativamente breve, si ricorsero, come in compendio, tutti quegli stadii di convivenza sociale, che l'umanità aveva già attraversato nei periodi anteriori, e per tal modo i popoli vennero in certa guisa rinnovando e rinfrescando tutti i concetti essenziali, che stanno a base della convivenza sociale ne' varii periodi del suo svolgimento. Le genti, infatti, per porre un argine alla forza ed alla violenza, che avevano dominato nel periodo delle invasioni, avevano cominciato coll'organizzarsi nei *feudi;* poscia, per sottrarsi alle angherie dei feudatari, avevano fatto risorgere la vita delle *città* e dei *municipi* con tutta quella serie di concetti, di sentimenti e di affetti, che l'avevano accompagnata nel periodo Greco-Romano (1).

Fu l'incontrarsi, il combattersi e quindi il contemperarsi di questi varii elementi, che produsse nella umanità un nuovo e potente *nisus naturae*, il quale, una volta che giunse a pervadere la compagine sociale, non doveva più arrestarsi, finchè non fosse riuscito a produrre ed a svolgere una nuova forma di organizzazione sociale.

2. A questo proposito è degno di nota, che mentre l'antichità Greco-Romana, allorchè pervenne al grande concetto della *città*, concentrò in essa tutte le sue energie e tutti i suoi entusiasmi, così invece non accadde nel Medio Evo, allorchè accanto ai *feudi* si riescì a far risorgere la vita della *città* e del *municipio*. Quasi si direbbe, che mentre la *città antica* per il Greco ed il Romano rappresentava il grande ideale dell'avvenire; per l'uomo invece del Medio Evo la *città* e il *municipio* non erano più che la rimembranza e come la sopravvivenza di un passato grande e glorioso; sopravvivenza, che per quanto viva e vigorosa non avrebbe mai potuto competere col ricordo, che ancora giganteggiava, di Atene e di Roma. Ben altro era il cumulo di idee vaghe e confuse, che fermentavano e si combattevano nel cervello immaginoso del cittadino del Medio Evo, che non quello

(1) Cfr. *La vita del diritto*, lib. III, cap. III.

Digitized by Google

che ispirava il cervello assestato ed equilibrato dei cittadini di Atene e di Roma. Questi avevano fermo e ben delineato nella loro mente l'ideale della *città*, non vedevano altro che la sua grandezza e la sua gloria, erano disposti a far cedere qualsiasi dissidio interno di fronte ad un pericolo esterno, mentre il cittadino del Medio Evo, per necessità di difesa, adattavasi bensì a vivere rinchiuso fra i fossi e fra le mura della propria terra, ma intanto col proprio pensiero oltrepassava la cerchia delle mura, partecipava alle lotte fra Chiesa e Impero, prendeva parte viva alle vicende ed alle sorti dei paesi vicini, intratteneva commercî con remotissimi paesi, e sentivasi così a disagio nella cerchia ristretta della propria città. Se a ciò si aggiungono l'alternarsi al comando delle varie fazioni, le cacciate in esilio del partito soccombente, l'aggirarsi dei fuorusciti di una in altra città, l'estensione sempre maggiore dei commercî, ed il fascino singolare, che esercitò sopra le più alte intelligenze dell'epoca, l'idea bensì metafisica ed astratta, ma pur sempre attraente e grandiosa di una *monarchia universale*, si potrà comprendere facilmente come più non esistesse la necessaria rispondenza fra la mente del cittadino del Medio Evo, piena ancora dei ricordi grandiosi di Roma e del suo impero, e la cerchia ristretta delle mura della città medio-evale. Di qui proviene in gran parte una singolare contraddizione, che presentano le repubbliche italiane dell'Evo di mezzo. Mentre esse da un lato pervengono ad un maraviglioso svolgimento di coraggio, di operosità e di senno, dall'altro invece appariscono pressochè insoddisfatte delle loro istituzioni sociali e politiche, poichè mancano delle due condizioni indispensabili per il mantenimento di qualsiasi organizzazione sociale, cioè della quiete e sicurezza, e di un graduato sviluppo delle loro istituzioni sociali. In esse infatti il corso degli eventi non conduce più a quello svolgimento della libertà e a quel progresso graduale delle istituzioni, che erasi più o meno avverato nelle città antiche, ma tende invece sempre più a restringere questa libertà e a concentrare il potere nelle mani di un solo o in quelle di un piccolo numero di persone (1).

É questa condizione psicologica e mentale dell'uomo di mezzo che può spiegarci, come le intelligenze più elette e più amanti

(1) Guizot, *Civilisation en Europe*. Leçon VII.

Digitized by Google

della patria e della libertà giungessero in quest'epoca a desiderare coll'Alighieri la venuta in Italia di Alberto Tedesco; e come il Segretario fiorentino, ispirandosi alle gesta di un principe energico e senza scrupoli, quale il duca Valentino Borgia, andasse poi in cerca di un altro principe, a cui potesse apprendere l'arte di mutare le *signorie* in *principati* ed in *regni*, e cercasse di far balenare agli occhi di lui l'alto ideale di cacciare dall'Italia tutti gli stranieri, mettendola in condizione di provvedere alla sua difesa con armi proprie e non con truppe mercenarie (1).

3. A queste cause psicologiche, che preparavano gli animi a vagheggiare, pressochè inconsapevolmente, un'aggregazione sociale più vasta, che non fosse il *feudo* e il *municipio*, si aggiungevano poi altre cause, le quali aiutavano e preparavano la formazione di questa aggregazione più vasta. Benchè i feudi ed i comuni *nel fatto* si trovino in lotte pressochè incessanti fra di loro, essi tuttavia *in idea* si ritengono far parte di una universale Repubblica cristiana, e come tali sono talvolta presi da entusiasmi comuni, che li inducono a stringersi insieme per compiere qualche grande intrapresa, quale fu, ad esempio, quella delle Crociate. Furono queste temporarie riunioni ed alleanze in un intento comune, che cominciarono a preparare lentamente la formazione di aggregazioni più vaste. Si notò a questo proposito dal Guizot, che in seguito alle Crociate cominciarono a scomparire i piccoli feudi, i quali vennero assorbiti ed incorporati nei feudi estesi e più vasti (2). Nelle Crociate infatti i piccoli feuda-

---

(1) Machiavelli, *Principe*, capo ultimo. Vuolsi notare al riguardo che la speranza riposta dal Machiavelli nel duca Valentino Borgia dovette essere abbastanza comune ai suoi tempi, in quanto che la morte del Valentino avrebbe dato argomento ad una specie di ballata popolare col seguente ritornello:

> Ognun cridi e pianga forte
> Cesar Borgia Valentino
> Che era in terra un Dio divino,
> Non sperar più, Italia, Corte.

Questa ballata trovasi riportata nel volume III della *Raccolta dei lamenti storici dei secoli XIV, XV, XVI*, fatta dal Medin e dal Frati, di cui può vedersi la recensione nella *Nuova Antologia* del 16 aprile 1890, p 760. Quanto poi al principe, a cui si indirizzavano le speranze del Machiavelli dopo la morte del duca Valentino, è da vedersi il Villari, *Nicolò Machiavelli*, vol. II, lib. 2°. cap. 4.

(2) Guizot, op. cit., Leçon VIII, verso il fine.

Digitized by Google

tari, che da sè non potevano bastare all'impresa, dovettero porsi al seguito dei più ricchi e dei più potenti, adattarsi a vivere con essi, dividerne la fortuna e le sorti. Allorchè poi questi grandi feudatari tornarono nelle loro terre, essi cominciarono a tener *corte aperta*, e si vennero atteggiando a *sovrani* di fronte ai loro vassalli, attirando nella propria orbita anche i piccoli feudatari, i quali si vennero così dileguando e scomparendo. Così pure, in seguito alle Crociate, accanto a quei *piccoli comuni*, che si erano formati all'ombra e sotto la protezione dei castelli feudali, cominciarono a svolgersi quei *grandi comuni*, in cui risorse l'antica vita municipale, e in cui la borghesia potè prendere un grande sviluppo ed esser posta in condizione di esercitare i grandi commerci coll'Oriente e coll'Occidente.

Ciò tutto attesta, che fin d'allora cominciava ad arrestarsi quel movimento di *dissoluzione*, che aveva frantumato l'impero romano in tante piccole aggregazioni feudali e municipali, e cominciava invece ad operarsi un movimento in senso contrario, un movimento cioè di *integrazione*, per cui i piccoli gruppi feudali e municipali tendevano ad incorporarsi in aggregazioni più vaste (1).

4. Questo movimento d'integrazione ebbe poi, specialmente nel nostro paese, ad essere aiutato da un'altra causa esteriore, che consistette nelle lotte che i Comuni italiani ebbero a sostenere contro l'Impero. A questo proposito ebbe a notare acutamente il professore Cipolla nelle sue lezioni di storia moderna, che questi conflitti contro un nemico comune indussero i Municipii italiani a stringersi in *leghe* od in *societates*, le quali debbonsi considerare come un primo passo per il loro incorporarsi in aggregazioni più vaste (2). Vero è, che queste leghe avevano soltanto uno scopo transitorio,

(1) Quanto alle forze di *dissoluzione* e di *integrazione* dell'organismo sociale, che trovansi alle prese fra di loro durante il Medio Evo, vedi la *Vita del diritto*, lib. III. cap. I.

(2) Ricavo questo concetto dalle *Lezioni* litografate di storia moderna del prof. CIPOLLA, fatte all'Università di Torino nell'anno scolastico 1885-86, che devo alla cortesia stessa dell'autore. Tale concetto trovasi svolto in dette *Lezioni* da pag. 9 a 21, ove sono anche citati alcuni dei documenti, sui quali si appoggia, fra cui importantissimo quello relativo al giuramento dei *Rectores*.

Digitized by Google

che era quello della comune difesa, ma siccome il pericolo era permanente, e perdurava ancora quando la lotta era finita, poichè questa poteva sempre rinnovarsi, così queste *leghe* acquistavano ancor esse un carattere permanente, e finivano per dare origine ad un ente collettivo, il quale aveva un'esistenza propria e distinta da quella dei singoli Comuni, che entravano a costituirlo ed era governato da un'autorità diversa da quella, che imperava nei singoli Comuni, autorità che era affidata all'assemblea dei *rectores*. Per tal guisa, anche negli esordî dell'età moderna, sarebbesi manifestata una legge storica, non dissimile da quella, che aveva governato il formarsi della città antica frammezzo alle primitive comunanze di villaggio. A quel modo infatti, che la *città antica* sarebbe uscita dal confederarsi di vari gruppi gentilizî in un intento di comune difesa, confederazione che col tempo condusse alla incorporazione e alla fusione di questi varii gruppi in un'unica città (1), così anche nell'età moderna la prima formazione degli enti collettivi superiori ai Comuni e delle assemblee dei loro rappresentanti sarebbe pure il frutto di una specie di confederazione, in un intento parimente di difesa, confederazione, che col tempo doveva poi preparare il terreno alla fusione ed incorporazione di queste varie terre sotto una medesima signoria. Le *leghe* infatti e le assemblee dei *rectores*, che dapprima si formano in un intento di comune difesa, facendosi pressochè permanenti, si vengono eziandio estendendo ad altri scopi, e cominciano così a costituire quell'anello della tradizione, che ha sempre avuto così grande importanza nella formazione delle aggregazioni sociali. A ciò si aggiunge, che siccome il formarsi e l'estendersi di queste *leghe* e delle loro *assemblee* era anche aiutato da quella tendenza inconsapevole alla formazione di aggregazioni più vaste, che cominciava in certo qual modo a preludere al formarsi del *sentimento nazionale*, così esse finirono per preparare a poco a poco il terreno a queste aggregazioni più estese, le quali a ragione si potrebbero considerare

(1) Cfr. il FUSTEL DE COULANGES, *La cité antique*, liv. III; SCHOEMANN, *Antiquités grecques*, trad. Galuski, IIe partie, chap. Ier, ed anche il mio lavoro sulle *Origini del diritto romano*, lib I, cap. I, nel quale ho cercato di dimostrare che Roma cominciò dall'esistere come città federale fra varie comunanze di villaggio, e solo più tardi si cambiò in una città chiusa e fortificata nelle proprie mura.

Digitized by Google

col Cipolla come *embrioni di piccoli Stati* (1). Quando poi i Comuni e le Repubbliche, dopo aver percorso rapidamente lo stadio del loro rapido risorgimento, finirono per cadere sotto la signoria di questa o di quella famiglia prevalente, era naturale che questa famiglia non dovesse più starsi paga a primeggiare nella cerchia ristretta della città, ma cercasse di estendere il suo potere a quella aggregazione più vasta, di cui era entrata a far parte la città caduta sotto la sua signoria. È in questa guisa, che cominciarono a formarsi le *signorie* ed i *principati*, che già si possono considerare come altrettanti piccoli Stati, i quali, malgrado l'origine diversa, presentano in ciò un'analogia colle Corti di quei grandi feudatarii, che si erano formati assimilando ed assorbendo i piccoli feudi, da cui erano circondati.

Ciò dimostra, che quel movimento di *integrazione*, che erasi iniziato fin dal periodo delle Crociate, non venne più ad interrompersi, nè fra i feudi, nè fra i municipî. A quel modo che nei paesi, ove prevaleva l'ordinamento feudale, vennero scomparendo i piccoli feudi per dar luogo a dominii più estesi, che prendono il nome di *contee*, di *ducati*, di *marchesati* e persino di *regni*; così nei paesi, ove prevaleva il sistema municipale, ora col prevalere di una città sopra le altre, ed ora collo stringersi delle varie città in *leghe* ed *alleanze*, si vengono delineando, al disopra delle singole città, le *signorie* ed i *principati*. Solo havvi questa differenza, che mentre nelle *Corti* dei grandi feudatari, che già cominciavano ad atteggiarsi a sovrani, continuano a dominare i gusti e le aspirazioni del Medio Evo, nelle *signorie* e nei *principati* invece, che, sopra tutto in Italia, vennero a sovrapporsi allo splendido svolgimento dei *municipii*, viene a rinascere il culto dell'antichità, e così anche il gusto delle lettere e delle arti, che già opera una specie di reazione contro il Medio Evo (2).

5. Di qui è lecito inferire, che per l'età moderna nè il *feudo*, nè il *municipio* potevano essere la forma definitiva della organizzazione sociale; ma che l'uno e l'altro dovevano invece servire di transizione ad una nuova forma di convivenza civile e

(1) Cipolla, *Lezioni* sopra citate, pag. 10.

(2) Cfr. Lemonnier, *Les origines des temps modernes*, nella *Revue internationale de l'Enseignement supérieur*, 15 janvier 1890.

Digitized by Google

politica. All'uscire del Medio Evo si cercherebbe indarno quest'aggregazione sociale più vasta; ma si trovano già di fronte gli elementi, che dovevano concorrere alla sua formazione, i quali solo abbisognavano di un'occasione per stringersi e coordinarsi insieme. Nella società medio-evale coesistevano la *nobiltà*, il *clero*, la *borghesia*, le *arti* ed i *mestieri*, ma questi elementi erano ancora in quello stato di lotta, che suol precedere il coordinamento, e quindi non potevano ancora meritarsi quel nome di *popolo*, il quale, fin dai tempi antichi, non aveva indicato una agglomerazione qualsiasi, ma un complesso di ordini e di ceti « *iuris consensu et utilitatis comunione sociatus* » (1). Nel Medio Evo parimenti si trovavano contrapposti poteri di carattere *civile*, *militare*, *ecclesiastico*, e poteri di origine *feudale*, *municipale*, *pontificia*, *imperiale*, *sovrana*, *divina*; ma tutti questi poteri si aggiravano confusi ed indistinti, contendevano fra di loro quanto ai rispettivi confini, e non riuscivano ancora a coordinarsi e ad armonizzarsi per modo da meritare il nome di un vero e proprio *governo*. Da ultimo vi esistevano bensì dei *feudi*, dei *municipii*, delle *leghe* o *societates* di Comuni, delle *signorie*, dei *principati* e cominciavano perfino già ad abbozzarsi delle *monarchie* e dei *regni*, ma tutti questi elementi erano ancora in cozzo fra di loro, agivano ciascuno per proprio conto, senza cooperare ad un intento comune, e senza riuscire così a costituire un vero e proprio *Stato*. Vi esistevano perciò gli elementi primordiali di un organismo più vasto, ma essi esistevano ancora, per usare l'espressione dello Spencer, allo stato diffuso ed incoerente, si agitavano ciascuno nel proprio interesse particolare, senza riuscire a coordinarsi in un interesse collettivo e comune, ed a formare un tutto organico, che potesse meritare il nome di *popolo*, di *Stato* e di *governo*.

Non è già, che mancassero le aspirazioni e i tentativi per riunire questi elementi dispersi. Questi tentativi furono anzi ripetuti a più riprese, ora per parte della Chiesa e ora per parte dell'Impero, i quali contendevano fra loro per giungere alla supremazia universale (2). Nella realtà tuttavia nè l'una nè l'altro poterono riuscire nel proprio intento, perchè mentre essi erano in

---

(1) CICER., *De Rep.*, I, 25

(2) GUIZOT, *Civilisation en Europe*, Leç. X^{me}.

Digitized by Google

lotta fra di loro, le minori aggregazioni sociali, e quelli, che le governavano, proseguirono gradatamente quella opera d'integrazione, che già avevano iniziata, e finirono così per riuscire ad una formazione novella, che cercò di svincolarsi ad un tempo dalla Chiesa come dall'Impero.

L'età moderna infatti non si arrestò allo sminuzzamento feudale e municipale, e non pervenne neppure a quella universale monarchia, tanto vagheggiata nell'Evo di mezzo, ma finì per delineare e tratteggiare presso a poco una concezione di mezzo, che è quella dello *Stato moderno*: il quale da un lato riuscì ad organizzare nel proprio seno i *feudi* ed i *municipii*, senza asservirsi nè alla Chiesa, nè all'Impero, e dall'altro entrò a far parte di una società più vasta, la quale aveva un'esistenza più *morale* che *giuridica*, che è quella dell'*umanità civile*. A quel modo pertanto, che la *città antica* venne ad essere costrutta coi ruderi di un periodo anteriore, che fu il periodo gentilizio e patriarcale, così anche lo *Stato moderno* fu costrutto coi ruderi del Medio Evo e fu determinato dal coordinarsi dei *feudi* e dei *municipi* sotto una medesima autorità sovrana. A quel modo parimenti che la *città antica* stentò lungamente prima di spogliarsi affatto da quell'impronta gentilizia, che era propria di quell'organizzazione, che l'aveva preceduta e preparata (1), così anche lo *Stato moderno* dovette subire una lunga evoluzione e ricorrere perfino a vere e proprie rivoluzioni, prima di svincolarsi affatto da quell'involucro feudale, e da quell'atmosfera di idee e di concetti, fra cui erasi venuto formando.

6. Questa formazione dello Stato presentasi in ogni paese con certi caratteri peculiari, che dovrebbero essere desunti dalla storia e dall'ambiente particolare, in cui venne a formarsi ogni singolo Stato: ma ciò non impedisce, che frammezzo alla varietà dei particolari si possano discoprire certe leggi comuni e costanti, che governarono il processo formativo dello Stato moderno.

Nel medio evo, frammezzo a quell'aureola di unità vaga ed indeterminata, che era mantenuta dai concetti di Chiesa e d'Impero, gli elementi veramente vivi e vigorosi erano i *feudi* ed i *municipi*, i quali erano in antitesi e in lotta fra di loro e si

---

(1) Cfr. CARLE, *Le origini del diritto romano*, lib. I e II.

Digitized by Google

ispiravano a concetti compiutamente diversi. Mentre i *feudi* erano derivati dal disperdersi dell'esercito conquistatore sul territorio conquistato, i *comuni* invece erano provenuti dal formarsi di nuove plebi intorno ai castelli feudali. I primi si erano svolti sopratutto nel *contado*, ed avevano dato origine all'*aristocrazia feudale*, mentre i secondi si erano svolti fra le mura della città, e avevano dato origine a quella *borghesia*, che doveva poi costituire il *terzo stato*. Quelli erano il portato diretto del medio evo, mentre i comuni avevano già fatto risorgere l'antica vita municipale, e rappresentavano una specie di reazione contro l'organizzazione feudale. Era quindi impossibile, che i feudi ed i municipii, avendo aspirazioni diverse, potessero coesistere in pace fra di loro.

Ne conseguì pertanto, che gli albori dello Stato moderno cominciarono a comparire in un'atmosfera di lotta e di conflitto. Furono prima le lotte fra Chiesa ed Impero, che porsero occasione allo svolgersi autonomo ed indipendente dei *feudi* e dei *municipî*, poscia furono le lotte fra i *feudi* e più tardi quelle fra i *municipî*, che cominciarono ad eliminare i piccoli feudi ed i piccoli comuni, facendoli entrare a far parte di aggregazioni più vaste; da ultimo furono le lotte fra il *feudo* ed il *municipio*, che resero possibile lo svolgersi di quel potere sovrano, che doveva poi coordinare gli elementi in conflitto ed essere il centro unificatore dello Stato moderno.

A questo proposito vuolsi notare, che così i *feudi* come i *municipii*, ancorchè in realtà si fossero del tutto svincolati da qualsiasi autorità superiore, non avevano tuttavia la pretesa di essere del tutto indipendenti e sovrani. Gli uni e gli altri conservavano ancor sempre il ricordo confuso di un *sovrano di diritto*, da cui dovevano dipendere in altri tempi, cosicchè essi non solo non avevano riluttanza a collocarsi sotto la protezione di un *sovrano*, ma erano invece propensi ad invocarne l'aiuto. La ricostruzione di questo *potere sovrano*, il cui ricordo non era ancora del tutto scomparso, era da una parte il pensiero riposto di quelle grandi famiglie feudali, che per la loro potenza potevano aspirarvi, e dall'altra era anche l'aspirazione inconsapevole de' popoli stanchi di vivere fra le lotte e le violenze. Questo sovrano, che era lungi e che era circondato da una aureola di legittimità, da una parte appariva come il capo e il principe dei feudatari, e dall'altra come il protettore dei deboli, come il di-

Digitized by Google

fensore delle plebi, come un giudice di pace universale (1). Di qui conseguì, che, frammezzo alle lotte dei feudi e dei comuni, venne lentamente idealizzandosi la figura di questo sovrano, il quale, ora appoggiandosi ai *comuni* ed ora ai *feudatari*, ora come capo dell'*aristocrazia feudale*, ed ora come protettore della *borghesia* della città, finì per cambiare la propria persona, la propria autorità e la città, in cui risiedeva, in un centro potente di unificazione. Sarebbe certo di grande interesse il seguire le vicissitudini e le peregrinazioni di questo sovrano, più di nome che di fatto, il quale cerca in tutti i modi di ricostruire e di riafferrare un potere ormai ridotto ad una semplice rimembranza del passato. Egli non ha dapprima una sede fissa, ma va peregrinando per i paesi, a cui si estende la sua sovranità nominale, come per ricordare ai suoi sudditi la propria esistenza e il cómpito, che egli crede essergli direttamente affidato dalla divinità. Sonvi di questi re feudali, la cui vita è una peregrinazione non interrotta (2); ed è notabile la quantità di atteggiamenti diversi, talora pressochè contraddicentisi fra di loro, che essi cercano di assumere per giungere alla ricostruzione del proprio potere. Essi si presentano ora come delegati della divinità, ma intanto sono custodi gelosi delle prerogative del potere civile di fronte al potere spirituale ed ecclesiastico; ora si atteggiano a vicari dell'imperatore, il che non impedisce che si presentino al cancelliere dell'Impero colla spada sguainata, come avrebbe fatto Pietro I di Savoia; ora infine si presentano come capi della gerarchia feudale, il che non vieta che siano ad un tempo i protettori del popolo e della plebe contro le angherie dei feudatari. Tuttavia fra questi atteggiamenti, che assume il sovrano, esercita certamente una massima influenza sui popoli quello per cui egli appariva qual depositario e protettore dell'ordine pubblico e quale amministratore della giustizia. È sopratutto sotto questo

(1) Questa singolare ricostruzione del potere sovrano cominciò principalmente a verificarsi quanto all'amministrazione della giustizia, e le vicende di essa possono essere seguite nelle sue diverse fasi, sopratutto nella storia della Francia. È a vedersi in proposito HENRION DE PANSEY, *De l'autorité judiciaire*, Introd. chap. IV et V; GUIZOT, *Civilisation en France*, IV, Paris, 1846, pag. 185; PARDESSUS, *Essai sur l'histoire de l'organisation judiciaire*, pag. 129.

(2) Una descrizione veramente magistrale di questo re feudale in peregrinazione occorre nel SUMMER MAINE, *Early Law and Custom*, London, 1883.

Digitized by Google

aspetto, che il sovrano finì per essere in certo modo idealizzato dal popolo, e per assumere tutti i caratteri di una magistratura sovrana, centro e vincolo della società, imposta da Dio e desiderata dai popoli, appoggiata dalle tradizioni del passato e resa necessaria dalle esigenze del presente.

7. È sopratutto questo concetto ideale, che si erano formati del sovrano, i *feudi* ed i *municipî*, il *contado* e la *città*, l'*aristocrazia* e la *borghesia*, che serve a spiegare le *sottomissioni volontarie* dei *feudatari* e le *dedizioni spontanee* delle *città* e dei *municipî*. Vuolsi tuttavia notare, che così le une come le altre non solevano essere incondizionate, ma erano il più spesso accompagnate da stipulazioni e da accordi, che determinavano da una parte i *diritti* e le *obbligazioni* del *sovrano*, e dall'altra le *prerogative* dei *feudatari* o le *franchigie* e le *libertà*, che dovevano esser riconosciute nei *popoli*. Di qui deriva questa importantissima conseguenza, che il potere sovrano nell'età moderna non compare più illimitato e senza confine, come il potere regio nell'antichità, il quale erasi dapprima modellato sul potere del patriarca, ma viene invece ad avere un'origine pressochè contrattuale, in quanto esso è temperato dai *poteri locali*, limitato dalle *assemblee* dei *grandi* e dei *rappresentanti dei Comuni*, ed è contenuto anche in certi confini da speciali *patti* ed *accordi*.

Finchè il *sovrano* attende a raccogliere i poteri dispersi, esso si sottopone di buon grado a questi limiti e confini; ma appena esso riesce a consolidarsi e ad affermarsi fra gli elementi in contrasto, ora per ambizione di potere, ed ora per la necessità di giungere ad una pronta e rapida unificazione dello Stato, egli dimentica talora i patti e gli accordi, e tenta pressochè dappertutto di realizzare la formola di Luigi XIV: « *lo Stato sono io* ». È soprattutto in questo periodo di assoluta prevalenza del potere sovrano, che si opera la pronta unificazione dello Stato moderno. È in questo periodo infatti, che a quelle *soldatesche*, che formavano il contingente posto a carico dei singoli feudi e dei municipii, sottentrano gli *eserciti stanziali*, i quali continuano per qualche tempo ad essere composti di truppe mercenarie, finchè più tardi si introduce poi una *leva generale*, la cui formazione finirà per essere governata da leggi uguali per tutto lo Stato. È allora parimenti, che alle *prestazioni* de' vassalli ed ai

Digitized by Google

sussidii dei Comuni, che presentano ancora qualche analogia coi *donativi* corrisposti ai re primitivi dell'antichità, sottentra una organizzazione regolare dei *tributi* e delle *imposte* È allora infine, che ad un numero indefinito di giurisdizioni laiche, ecclesiastiche, feudali, municipali, privilegiate e speciali, viene a surrogarsi a poco a poco un'unica giurisdizione, organizzata in base a certe leggi ed inspirata al principio che la *giustizia emana dal Re*. Questo pertanto è il vero momento storico, in cui quegli elementi, che esistevano allo stato diffuso ed incoerente, vengono attraendosi fra di loro e componendosi insieme in una nuova forma di organizzazione sociale. Tutti i *poteri*, così d'*origine feudale* come di *origine municipale*, cominciarono dal riconoscere un unico potere sovrano, che prende il nome di *governo;* così pure i *ceti*, le *classi*, le *corporazioni*, che prima erano in lotta, cominciarono a riguardarsi come parte di un tutto, che con vocabolo antico chiamavasi *popolo*, e che con vocabolo più moderno si chiamerà poi anche *nazione*. Infine i *feudi* e i *municipii* e tutte le aggregazioni minori cominciarono a perdere gradatamente le funzioni di carattere esclusivamente politico, civile e militare, le quali finiscono per accentrarsi in un organismo più vasto e complesso, che viene ad essere l'*organo del diritto* e a prendere l'appellazione di *Stato*.

Intanto però questo periodo, che da un lato favorì grandemente l'unificazione dello Stato moderno, da un altro fu anche quello, in cui gli Stati moderni corsero grave pericolo di cadere sotto il potere assoluto del *sovrano*; quando gli stessi precedenti storici, fra cui erasi formato lo Stato moderno, non avessero preparato il terreno ad una potente riscossa per parte dei popoli. Questi infatti, mentre furono disposti a subire un potere pressochè assoluto finchè si trattò della unificazione dello Stato, cominciarono più tardi a ricordare i patti e gli accordi, che erano intervenuti fra essi ed il sovrano, e presero a guardare con ammirazione la costituzione politica dell'Inghilterra, che pressochè sola fra gli altri Stati moderni era riuscita a formare lo Stato, senza concentrare tutti i poteri in un'unica mano. Per tal modo l'Inghilterra porse ai popoli moderni un modello di costituzione, analogo a quello che Roma aveva offerto alla città antica, in cui la vita pubblica non fu determinata dal sovrapporsi di un solo elemento su tutti gli altri, ma bensì dalla cooperazione e dal reciproco controllo del Re, dei Lord e dei rappresentanti dei

Digitized by Google

Comuni (1). Essa somministrò come una specie di esemplare tipico di quella costituzione politica, che poteva convenire allo *Stato moderno*. Di qui il lungo studio, che posero costantemente nella costituzione inglese i popoli moderni, i quali cominciarono dall'ammirarla in *teoria*, dietro la descrizione ideale, che ebbe a farne il Montesquieu (2), poi cercarono di tradurla nei *fatti*, dopo che la Rivoluzione francese dimostrò che anche in tema di costituzione conveniva tener conto dei precedenti storici.

Per tal modo nella età moderna anche l'assolutismo rappresenta un periodo di transizione, che potè forse essere opportuno per giungere all'unificazione dello Stato, ma che non avrebbe mai potuto perpetuarsi fra popoli, i quali, riandando la propria storia, venivano a riconoscere, che il potere sovrano era uscito da convenzioni e da accordi fra essi ed il sovrano, e che il potere di quest'ultimo nelle sue origini era limitato dalle assemblee dei Grandi e da quelle dei rappresentanti dei Comuni.

Di qui intanto deriva la conseguenza importantisssima, che nello Stato moderno anche le forme di governo furono in certo modo preparate dai precedenti storici, fra cui esso erasi formato: precedenti, che dovevano condurre a poco a poco allo svolgimento di una forma di governo, che finì per convertirsi nell'aspirazione comune di tutti i popoli moderni. Questa forma di governo chiamasi opportunamente *costituzionale*, perchè fissa in un patto o statuto fondamentale i diritti essenziali dei popoli e i confini da cui è circondato il potere sovrano; dicesi *mista*, perchè suppone l'intreccio e il concorso di tutti gli elementi, che parteciparono alla formazione dello Stato. per l'esercizio del potere sovrano; ed è da ultimo *rappresentativa*, perchè le vaste proporzioni dello Stato moderno avrebbero impedito a questi vari elementi l'intervento diretto nell'esercizio del potere sovrano. Il *re* pertanto ed anche il *presidente* costituzionale nell'esercizio del suo potere viene ad essere rappresentato dai *ministri*, l'*aristocrazia* dal *senato*, ed il *popolo* dalla *camera dei deputati*.

8. A compimento del quadro vuolsi qui porre in rilievo il contributo del tutto speciale, che l'Italia ebbe a recare nella

(1) Cfr. Boutmy, *Le développement de la constitution et de la société politique en Angleterre*. Paris, 1889.

(2) Montesquieu, *Esprit des lois*, liv. XI, chap. 6.

Digitized by Google

formazione dello Stato moderno. Questa posizione speciale del nostro paese dipende da ciò, che mentre nel resto di Europa prevalse il sistema feudale, nell'Italia invece ricevette uno svolgimento del tutto peculiare l'ordinamento municipale. Mentre i Comuni, che si svolsero sopratutto nei paesi del Nord, furono, per dir così, come un'emanazione e come un ulteriore sviluppo dello stesso ordinamento feudale, i Comuni invece, che si svolsero in Italia, dopo aver avuto pressochè le stesse origini, finirono per rannodarsi alle tradizioni del loro passato, e giunsero così a far risorgere e rifiorire tutto quel complesso di concetti civili e politici, che già si erano svolti nella *città antica*. L'Italia a questo proposito era in una condizione tutta sua propria, come quella, che aveva subito, più che accettato, l'ordinamento feudale, e perchè in essa duravano più vive e vigorose le tradizioni del passato. Essa pertanto restituì allo *Stato moderno* la coltura antica; contribuì a diffondere il gusto delle arti e delle lettere in tutte le corti di Europa; e per tal modo, mentre il resto dell'Europa era ancora nel medio evo, essa aveva già ravvivati i commerci, la letteratura e l'arte, e aveva cominciato a servirsi dell'antichità per combattere il medio evo. A quel modo infatti, che furono le città e le repubbliche italiane, che, frammezzo alla complicazione delle leggi, delle consuetudini e degli statuti del medio evo, cominciarono a far risorgere lo studio della giurisprudenza romana, così organica e coerente in tutte le sue parti, così fu eziandio la copiosa letteratura politica italiana, che cominciò a rimettere in onore ed in circolazione quella messe copiosa di concetti civili e politici, che si erano svolti nell'antichità, e che non potevano essere trascurati nel primo formarsi degli Stati moderni.

Non è improbabile, che questa condizione speciale, in cui si trovò l'Italia, possa essere stata una delle cause, che abbiano ritardato la propria unificazione, perchè quanto più si manteneva vivo e vigoroso il ricordo della *città antica*, tanto più era difficile operare la transizione allo *Stato moderno*; ma intanto essa finì per arrecare all'opera comune certi elementi, che ancor mancavano negli altri Stati, cioè il senso della proporzione e della misura, il gusto delle lettere e delle arti, l'amore delle libertà pubbliche e municipali, e per meritarsi così un posto del tutto suo proprio nello svolgimento di alcuni concetti, che pur dovevano esser messi a contributo nella formazione dello Stato mo-

Digitized by Google

derno. Di qui la ricchezza della letteratura politica italiana in questo periodo storico, e l'influenza dalla medesima esercitata presso quei sovrani, che mentre in teoria ne ripudiavano le dottrine, le venivano invece adottando nella pratica (1).

Di qui intanto derivò una differenza importantissima fra la formazione dello Stato in Italia e quella degli altri Stati di Europa. Mentre gli altri Stati escono direttamente dall'ordinamento feudale e la loro formazione è determinata da una specie di accentramento lento e graduato, che si opera intorno ad un sovrano di origine feudale; l'Italia invece, sia per la parte maggiore, che prese alle lotte fra Chiesa e Impero, e sia anche perchè aveva nel proprio seno molte grandi città, di cui una sola poteva avere una incontrastabile preponderanza sopra tutte le altre, e questa era la sede del Papato, sia infine perchè a nessun principe italiano riuscì di sovrapporsi a tutti gli altri, non potè giungere così prontamente alla propria unità di Stato. Essa dovette prima attraversare come un periodo di transizione, in cui riuscì soltanto alla formazione di piccoli Stati, di cui alcuni di *origine feudale*, come il regno di Napoli e quello del Piemonte, ed altri invece di origine *municipale*, come le *signorie*, che finirono per sovrapporsi alle Repubbliche italiane. Fu questa spartizione in Stati diversi, che fece di essa una facile preda per l'occupazione straniera, e fu anche essa che produsse un maturarsi più lento del *sentimento nazionale*. Questo tuttavia, ancorchè compresso più volte dalle occupazioni straniere, ebbe sempre ad erompere più vivo e vigoroso dopo le medesime (2), e condusse ad una rapida e solida formazione dello Stato Italiano, appena potè qui verificarsi quel processo, che già erasi avverato in altri Stati d'Europa, per cui un principe di stirpe italiana percorse in certo modo tutti i gradi della gerarchia feudale, finchè non giunse ad affermarsi re d'Italia per grazia di Dio e per volontà della Nazione.

(1) Non potrei quindi dividere l'opinione del Lemonnier nell'articolo sovra citato, nel quale sostiene che l'Italia, mentre ebbe parte nel far risorgere il culto delle lettere e delle arti, non avrebbe invece partecipato alla formazione dello Stato moderno, il quale sarebbe uscito per intero dall'ordinamento feudale.

(2) Cfr. il notevole articolo pubblicato dall'onorevole Franchetti nella *Nuova Antologia* del 1° aprile 1890, col titolo: *L'unità italiana nel* 1799, vol. 26, pag. 404 a 438.

Digitized by Google

Il Socio F. Rossi presenta la trascrizione, con traduzione italiana dal copto, di un sermone sulla Passione di Nostro Signore Gesù Cristo, pronunziato da un patriarca ed arcivescovo di Roma, che il testo designa come *il secondo dopo Pietro, il grande apostolo.* Ma il nome è andato perduto nella rovina delle prime linee, che col titolo del sermone portavano anche il nome dell'autore. Il testo si compone oggi ancora di trentanove fogli di papiro, ma tutti ridotti in così cattivo stato, che i meno danneggiati sono quelli che presentano, nel principio e nel fine delle loro pagine, lacune di solo due o tre linee.

È degna tuttavia di speciale menzione la data ricordata nella prima pagina con queste parole: *fu pronunziato* (il sermone) nel *giorno che fu battezzato Didimo Giudeo ed Archisinagogo, sotto il consolato dell'Imperatore Claudio, in cui venne decretata la cacciata di tutti i Giudei da Roma, risparmiando solo Didimo a causa delle sue grandi ricchezze.* Cosicchè l'espulsione dei Giudei da Roma, menzionata anche da Svetonio nella vita di quest'Imperatore, e posta da Orosio coi più antichi scrittori nell'anno nono dell'impero di Claudio, sarebbe avvenuta, secondo il nostro testo, nell'anno settimo, in cui fu quest'Imperatore per la quarta volta console.

A questo sermone fanno seguito parecchi frammenti, appartenenti a testi diversi, ed in ultimo la traduzione italiana del vangelo apocrifo di Nicodemo, già da lui pubblicato nel solo testo copto.

Con questo lavoro, che venne approvato per la stampa nei volumi delle Memorie, l'autore termina la pubblicazione dei papiri copti, pervenuti al Museo di Antichità di Torino dalla celebre collezione dei monumenti egizii del Drovetti.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

GIUNTA ACCADEMICA PER IL PREMIO BRESSA

Programma per l'ottavo premio Bressa

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottor Cesare Alessandro BRESSA, ed al Programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1890 si chiuse il Concorso per le opere scientifiche e scoperte fattesi nel quadriennio 1887-90, a cui erano chiamati Scienziati ed Inventori di tutte le nazioni.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1889, è aperto il Concorso per l'ottavo premio BRESSA, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi solamente **Scienziati ed Inventori Italiani**.

Questo Concorso sarà diretto a premiare quello Scienziato italiano che durante il quadriennio 1889-92 « a giudizio dell'Accademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la più insigne ed utile scoperta, o prodotto l'opera più celebre in fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non escluse la geologia, la storia, la geografia e la statistica. »

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1892.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **10416** (diecimila quattrocentosedici).

Digitized by Google

Chi intende presentarsi al Concorso dovrà dichiararlo, entro il termine sopra indicato, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia e inviare l'opera con la quale concorre. L'opera dovrà essere stampata; non si tiene alcun conto dei manoscritti. Le opere dei Concorrenti, che non venissero premiati, saranno loro restituite, quando ne venga fatta domanda entro sei mesi dal giorno dell'aggiudicazione del premio.

Nessuno dei Soci nazionali residenti o non residenti dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia dà il premio allo Scienziato che essa ne giudica più degno, ancorchè non si sia presentato al Concorso.

Torino, 1° *Gennaio* 1891.

Il Presidente dell'Accademia
M. LESSONA.

Il Segretario della Giunta
A. NACCARI.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 14 al 28 Dicembre 1890

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

	Donatori
* Anales de la Sociedad cientifica Argentina; t. XXX, entrega 5, Buenos Ayres, 1890; in-8°.	Soc. scientifica Argentina (Buenos Aires).
* Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie — Comptes rendus des séances de l'année 1890; Novembre. Cracovie, 1890; in-8°.	Acc. delle Scienze di Cracovia.
* Annales de l'École polytechnique de Delft; t VI, 1• livraison. Leide, 1890; in-4°.	Scuola politecnica di Delft.
* Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 1. London, 1890; in 8°.	R. Soc. astron. di Londra.
* Transactions of the Manchester geological Society; etc, vol. XXI, part. 1. Manchester, 1890; in-8°.	Soc. geologica di Manchester.
Geological and natural History Survey of Canada, Alfred R. C. SELWYN Director: List of Canadian *Hepaticae*, by Wm. Hy. PEARSON. Montreal, 1890; 1 fasc. in-8°.	Comitato di geol. e st. nat. del Canadà (Montreal).
— Catalogue of Canadian plants; part. V, *Acrogens;* by John MACOUN. Montreal, 1890; in-8°.	Id.

Digitized by Google

Società Reale di Napoli.

* Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sez. della Società Reale di Napoli); serie 2ª, vol. IV, fasc. 9-11. Napoli, 1890; in-4°.

R. Accademia Medico-chirurg. di Napoli.

Resoconto delle adunanze e dei lavori della Reale Accademia medico-chirurgica di Napoli, etc.; t. XLIII (gennaio-dicembre 1889). Napoli, 1890; in-4°.

La Redazione (Parigi).

Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc, publiées par A. Gouguenheim; t. XVI, n. 12. Paris, 1890; in 8°.

Società degli Spettr. ital. (Roma).

Memoria della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XIX, disp. 10. Roma, 1890; in-4°.

R. Accademia dei Fisiocritici di Siena.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena; serie 4ª, vol. II, fasc. 7-8. Siena, 1890; in-8°.

Museo di Zool. e Anatomia comp. (Torino).

Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Torino; vol. V, n. 74-92. Torino, 1890; in-8°.

Soc. meteor. ital. Torino.

* Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, ecc.; serie 2ª, vol. X, n. 11. Torino, 1890; in-4°.

Soc. sismologica del Giappone (Yokoama).

* Transaction of the scismological Society of Japan; vol. XV. Jokoama, 1890; in-8°.

L'Autore.

Prof. C. Giacomini — I cervelli dei Microcefali. Torino, 1890; 1 vol. in-8°.

L'A.

Principes de Géologie; explication de l'époque quaternaire sans hypothèses; par H. Hermite. Neuchatel, 1891; 1 vol. in-8°.

L'A.

Studio geologico delle colline di Cherasco e di La Morra in Piemonte, del Dott. Federico Sacco (Estr. dal *Bollettino del R. Comitato geol.*, anno 1888, n. 3-4); 1 fasc. in-8°.

L'A.

I Colli Braidesi; Studio geologico del Dott. Federico Sacco (Estr. dagli *Annali della R. Accademia di Torino*, vol. XXXI, 1888); 1 fasc. in-8°.

L'A.

Il Pliocene entroalpino di Valsesia; Studio del Dott. Federico Sacco (Estr. dal *Bollettino del R. Comitato geol. italiano*, anno 1888, n. 9-10); 1 fasc. in-8°.

L'A.

Les conglomérats du *Flysch*, par le Dr. F. Sacco (Extr. du *Bulletin de la Soc. belge de Géol., de Paleont. et d' Hydrologie*, t. III, 1889, séance du 24 mars, pp. 149-162): 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

La conca terziaria di Varzi (S. Sebastiano): Studio geologico del Dott. Federico SACCO (Estr. dal *Bollettino del R. Comitato geol.*, anno 1889, n. 9-10): 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

Sur la position stratigraphique des charbons fossiles du Piémont, par M. Fréd. SACCO (Extr. du *Bulletin de la Soc. Géol. de France*: 3e série, t. XVIII, pag. 235): 1 fasc. in-8°. — L'A.

Sopra un progetto di serbatoio in Valle Usseglia presso Torino; Osservazioni geologiche del Dott. Federico SACCO. Torino, 1889; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Sopra due tracciati per un tronco della linea ferroviaria Torino-Chieri-Piovà-Casale; Osservazioni geologiche del Dott. Federico SACCO. Torino, 1889; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Dott. Federico SACCO — La Caverna ossifera del Bandito in Val Gesso. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Città di Torino — Relazione sopra un progetto di derivazione d'acqua dal torrente Giandone; del Dott. Federico SACCO. Torino, 1890; 1 fasc. in-4°. — L'A.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 21 Dicembre 1890 al 4 Gennaio 1891

Donatori

* Johns Hopkins University Circulars, etc.; vol. X, n. 84. Baltimore, 1890; in-4°. — Università J. HOPKINS (Baltimora).

Allgemeine Geschichte in Einzeldarstellungen etc.; IV, 3. Geschichte des zweiten Kaiserreiches und des Königreiches Italien; von Const. BULLE Berlin, 1890; 1 vol. in-8°. — Berlino. * *

* Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVII, cuaderno 6. Madrid, 1890; in-8°. — R. Accademia di Storia di Madrid.

* Bulletin des séances de la Société des Sciences de Nancy; n. 3-5; in-8°. — Soc. delle Scienze di Nancy.

* Mémoires de la Société nationale des Antiquaires de France; 5e série, t. X Paris, 1890; in-8°. — Soc. nazionale degli Antiquari di Francia (Parigi).

—— Bulletin de la Soc. nat. des Antiquaires de France, 1888 Paris, 1 vol. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Circolo delle Libr. franc. (Parigi). Cercle de la Librairie, Boulevard Saint-Germain, 117, Paris. Bulletin bibliographique de La Librairie française, paraissant quatre fois par an: 4° année, n. 4. Paris, 1890; in-8°.

Ministero delle Finanze (Roma). Statistica del commercio speciale di importazione dal 1° gennaio al 30 novembre 1890. Roma, 1890; 1 fasc. in-8° gr.

R. Accademia de. Lincei (Roma). * Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; vol. VI, fasc. 11, 2° sem. 1890. Roma 1890; in-8° gr.

Bibliot. nazionale Vitt. Emanuele (Roma). Biblioteca nazionale centrale di Vittorio Emanuele in Roma — Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. V, n. 3, marzo 1890. Roma, 1890; in-8° gr.

L'Editore. Oeuvres complètes de Saint Avit, Évèque de Vienne; nouvelle édition publiée, pour les Facultés catholique de Lyon en témoignage de leur piété filiale envers S. S. Léon XIII, par le Chanoine Ulysse Chevalier, Prof. d'histoire ecclesiastique aux mêmes Facultés, Corr. de l'Institut. Lyon, 1890; 1 vol. in-8°.

L'Autore. Prof. Dr. H. Curto — Die Figur des Mephisto in Goethe'schen Faust. Turin, 1890; 1 vol. in-8°.

Il Comm. G. B. De Rossi. * Bullettino di Archeologia cristiana del Comm. Giovanni Battista De Rossi, serie 5ª, anno I, n. 1. Roma, 1890; in-8° gr.

L'A. Notice de quelques bijoux d'or au nom de Constantin; par M. Mowat. Paris, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'A. Antigüedades de Costa Rica, por el Dr. H. Polakowsky (Páginas sacadas de los *Anales del Museo Nacional.* San José, 1890; 1 fasc. in-8° gr.

L'A. Prof. Ugo Rosa — Aggiunte a « *L'Elemento tedesco nel dialetto piemontese* ». Bra, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — — Ugo Rosa — Arrivo in Susa della Principessa Chiara Gonzaga, e passaggio del Moncenisio nel 1481. Torino, 1890; 3 pag. in-16°.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.

249 (850) 5 III-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 5ª, 1890-91

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Gennaio 1891

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Presidente ricorda con parole di vivo rimpianto la recente perdita del Professore Antonio STOPPANI, Socio Corrispondente dell'Accademia per la sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia, e dell'illustre estinto commemora le molte benemerenze scientifiche e le insigni virtù civili.

Fra le opere stampate che giunsero recentemente in dono all'Accademia viene segnalato un lavoro del Socio corrispondente Ernesto HAECKEL, col titolo: *Plankton - Studien; Vergleichende Untersuchungen über die Bedeutung und Zusammensetzung der Pelagischen Flora.*

Vengono letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i cinque lavori seguenti:

Digitized by Google

1° « *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva;* » Nota del Socio D'Ovidio;

2° *Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno* 1890 *all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dal* Dott. G. B. Rizzo, *Assistente all'Osservatorio stesso;* (*)

3° « *Sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici;* » Nota del Dott. G. Errera, presentata dal Socio Cossa.

4° « *Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei mammiferi;* » Studio del Dott. Romeo Fusari, Prof. di Anatomia umana normale nell' Università di Ferrara, presentata dal Socio Bizzozero;

5° « *Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato uditivo dei Teleostei;* » del Dott. Pietro De-Vescovi, presentate dal Socio Camerano.

Infine lo stesso Socio Camerano, condeputato col Socio Bizzozero, legge una sua Relazione sopra un lavoro dei Dottori Saverio Monticelli e Cesare Crety, intitolato: « *Ricerche intorno alla sottofamiglia delle Solenophorinae.* » La Classe, accogliendo le conclusioni favorevoli della Relazione, ammette prima questo lavoro alla lettura, e poscia ne delibera la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

(*) Queste *Osservazioni* sono pubblicate in un fascicolo separato, che va unito agli *Atti* dell'Accademia.

Digitized by Google

LETTURE

Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva;

Nota di ENRICO D'OVIDIO

§. 1. Due coniche A e C di un piano ammettono in generale uno, ed un solo, triangolo autoconiugato comune, che è triangolo diagonale così del quadrangolo completo dei 4 punti I_0, I_1, I_2, I_3 comuni a A e C come del quadrilatero completo delle 4 tangenti t_0, t_1, t_2, t_3 comuni a A e C. Lo chiameremo triangolo *principale*, e ne indicheremo con O_1, O_2, O_3 i vertici, con o_1, o_2, o_3 i lati.

Siano x_1, x_2, x_3 e ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate omogenee di un punto P e di una retta r del piano rispetto al triangolo principale. Le equazioni di A e C come luoghi assumono allora la forma canonica (*)

$$a_{xx} \equiv \Sigma a_h x^2_h = 0, \quad c_{xx} \equiv \Sigma c_h x^2_h = 0 \quad (h = 1, 2, 3) \;;$$

e le equazioni delle polari di $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ rispetto a A e C saranno

$$a_{xx'} = a_{x'x} \equiv \Sigma a_h x'_h x_h = 0\,, \quad c_{xx'} = c_{x'x} \equiv \Sigma c_h x'_h x_h = 0\;,$$

e i discriminanti di a_{xx}, c_{xx}

$$a \equiv a_1 a_2 a_3\,, \quad c \equiv c_1 c_2 c_3\;.$$

Posto $a_h \alpha_h = 1$, $c_h \gamma_h = 1$, le equazioni di A e C come inviluppi saranno

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv \Sigma \alpha_h \xi^2_h = 0, \quad \gamma_{\xi\xi} \equiv \Sigma \gamma_h \xi^2_h = 0\;,$$

(*) Questa ipotesi nulla detrae alla generalità delle formole, poichè i coefficienti della equazione di una conica ridotta a forma canonica si sanno esprimere mediante i coefficienti della equazione data nella forma più generale.

Digitized by Google

e le equazioni dei poli di $r'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ rispetto a A e C

$$\alpha_{\xi\xi'} = \alpha_{\xi'\xi} \equiv \Sigma \alpha_h \xi'_h \xi_h = 0 \quad , \quad \gamma_{\xi\xi'} = \gamma_{\xi\xi'} \equiv \Sigma \gamma_h \xi_h \xi_h = 0 \quad ,$$

e i discriminanti di $\alpha_{\xi\xi}$, γ_ξ

$$\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{a}, \quad \gamma \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{1}{c} \quad .$$

Se P, P' sono poli di r, r' rispetto a A o C, si ha

$$a_{xx'} = \alpha_{\xi\xi'} \quad \text{o} \quad c_{xx'} = \gamma_{\xi\xi'} \quad ,$$

e in particolare

$$a_{xx} = \alpha_{\xi\xi} \quad \text{o} \quad c_{xx} = \gamma_{\xi\xi} \quad .$$

Per due punti P, P' si hanno [ponendo $(xx')_h = x_k x'_l - x_l x'_k$, e indicando con hkl le permutazioni pari 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2] le identità

$$a_{xx} a_{x'x'} - a^2_{xx'} = \Sigma a_k a_l (xx')^2_h = a\, \alpha_{(xx')(xx')} \, , \; c_{xx} c_{x'x'} - c^2_{xx'} = c\, \gamma_{(xx')(xx')} \, ,$$

ed analogamente per due rette r, r'

$$\alpha_{\xi\xi}\, \alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'} = \alpha\, a_{(\xi\xi')(\xi\xi')} \, , \quad \gamma_{\xi\xi}\, \gamma_{\xi'\xi'} - \gamma^2_{\xi\xi'} = \gamma\, c_{(\xi\xi')(\xi\xi')} \; ;$$

è noto che, se P', r' son fissi e P, r variabili,

$$a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'} = 0 \; , \quad \alpha_{\xi\xi}\, \alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'} = 0$$

sono le equazioni delle tangenti da P' a A e dei punti rA; e analogamente per C.

Una conica qualunque del fascio AC, del quale I_0, I_1, I_2, I_3 sono i punti base, ha come autoconiugato il triangolo $O_1 O_2 O_3$, ed ha l'equazione

$$\lambda\, a_{xx} + \mu\, c_{xx} = 0 \quad \text{o} \quad \sum \frac{\xi^2_h}{\lambda\, a_h + \mu\, c_h} = 0 \quad .$$

In particolare l'equazione della coppia di rette $(I_0 I_h, I_k I_l)$ incrociate in O_h è

$$a_h\, c_{xx} - c_h\, a_{xx} = (ac)_l\, x^2_k - (ac)_k\, x^2_l = 0 \quad ;$$

Digitized by Google

e disponendo sempre le coordinate di punti o rette nell'ordine $h\,k\,l$, abbiamo

$$I_0\left[\sqrt{(ac)_h}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\,,\ \sqrt{(ac)_l}\right]\ ,\quad I_h\left[-\sqrt{(ac)_h}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\,,\ \sqrt{(ac)_l}\right]\ ,$$
$$I_0 I_h\left[0\,,\ -\sqrt{(ac)_l}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\right]\ ,\quad I_k I_l\left[0\,,\ \sqrt{(ac)_l}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\right]\ .$$

Una conica qualunque della schiera AC, che ha per rette basi t_0, t_1, t_2, t_3, ha come autoconiugato il triangolo o_1, o_2, o_3, ed ha l'equazione

$$\lambda\,\alpha_{\xi\xi}+\mu\,\gamma_{\xi\xi}=0 \quad \text{o} \quad \sum\frac{x^2_h}{\lambda\,\alpha_h+\mu\,\gamma_h}=0\ .$$

In particolare, l'equazione della coppia di punti $(t_0 t_h, t_k t_l)$, posti su o_h, è

$$\alpha_h\,\gamma_{\xi\xi}-\gamma_h\,\alpha_{\xi\xi}=(\alpha\gamma)_l\,\xi^2_k-(\alpha\gamma)_k\,\xi^2_l=0\ ,$$

ed abbiamo

$$t_0\left[\sqrt{(\alpha\gamma)_h}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]\ ,\quad t_h\left[-\sqrt{(\alpha\gamma)_h}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]\ ,$$
$$t_0 t_h\left[0\,,\ -\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right]\ ,\quad t_k t_l\left[0\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right]\ (*).$$

Gl'invarianti simultanei di a_{xx}, c_{xx} sono

$$s\equiv\Sigma\,a_h\,a_k\,c_l\quad ,\quad s'\equiv\Sigma\,a_h\,c_k\,c_l\ ,$$

e l'equazione delle tre coppie di rette $(I_0 I_h, I_k I_l)$ è

$$a\,c_{xx}^3-s\,c_{xx}^2\,a_{xx}+s'\,c_{xx}\,a_{xx}^2-c\,a_{xx}^3=0\ ;$$

del pari gl'invarianti simultanei di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ sono

$$\sigma\equiv\Sigma\,\alpha_h\,\alpha_k\,\gamma_l\quad ,\quad \sigma'\equiv\Sigma\,\gamma_h\,\gamma_k\,\gamma_l\ ,$$

(*) Supposti reali i coefficienti delle equazioni generali delle due coniche A e C, ossia supposti reali i due sistemi polari che determinano A e C, i punti I_0, I_1, I_2, I_3 possono essere tutti reali distinti, 2 reali distinti e 2 imaginarî coniugati, tutti imaginarî a due a due coniugati. Nel 1° caso il loro quadrangolo ha 3 coppie di lati reali distinte, nel 2° e nel 3° una coppia reale e due imaginarie coniugate.

Lo stesso dicasi delle rette t_0, t_1, t_2, t_3 e delle tre coppie di vertici del loro quadrilatero.

Digitized by Google

e l'equazione delle tre coppie di punti $(t_0 t_h \,.\, t_k t_l)$ è

$$\alpha \gamma^2_{\xi\xi} - \sigma \gamma^2_{\xi\xi} \alpha_{\xi\xi} + \sigma' \gamma_{\xi\xi} \alpha^2_{\xi\xi} - \gamma \alpha^2_{\xi\xi} = 0 \ .$$

E si noti che

$$s = a \Sigma \alpha_h c_h \ , \ s' = c \Sigma a_h \gamma_h \ , \ \sigma = \alpha \Sigma a_h \gamma_h \ , \ \sigma' = \gamma \Sigma \alpha_h c_h \ ,$$

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} \ , \ \frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} \ .$$

Il covariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx} è

$$u^2_{xx} \equiv \sum (\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k) x^2_h = \frac{1}{ac} \sum a_h c_h (a_k c_l + a_l c_k) x^2_h \ ;$$

e quello di $\alpha_{\xi\xi} . \gamma_{\xi\xi}$ (ossia il controvariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx}) è

$$\chi^2_{\xi\xi} \equiv \sum (a_k c_l + a_l c_k) \xi^2_h = \frac{1}{\alpha\gamma} \sum \alpha_h \gamma_h (\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k) \xi^2_h \ .$$

Le coordinate delle rette a_0, a_h e c_0, c_h tangenti risp. a A e C nei punti I_0, I_h, sono

$$a_0 \left[a_h \sqrt{(ac)_h}, a_k \sqrt{(ac)_k}, a_l \sqrt{(ac)_l}\right] \ , \ a_h \left[- a_h \sqrt{(ac)_h}, a_k \sqrt{(ac)_k}, a_l \sqrt{(ac)_l}\right] ,$$

$$c_0 \left[c_h \sqrt{(ac)_h}, c_k \sqrt{(ac)_k}, c_l \sqrt{(ac)_l}\right] \ , \ c_h \left[- c_h \sqrt{(ac)_h}, c_k \sqrt{(ac)_k}, c_l \sqrt{(ac)_l}\right] ;$$

e le coordinate dei punti A_0, A_h e C_0, C_h di contatto delle t_0, t_h con A e C

$$A_0 \left[\alpha_h \sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \alpha_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] , \ A_h \left[-\alpha_h \sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \alpha_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] ,$$

$$C_0 \left[\gamma_h \sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] , \ C_h \left[-\gamma_h \sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] .$$

I poli $c_0 c_h$, $c_k c_l$ delle rette $I_0 I_h$, $I_k I_l$ rispetto a C stanno su o_h ed hanno le coordinate

$$c_0 c_h \left[0, - c_l \sqrt{(ac)_l} \ , \ c_k \sqrt{(ac)_k}\right] \ , \ c_k c_l \left[0, c_l \sqrt{(ac)_l} \ , \ c_k \sqrt{(ac)_k}\right] ;$$

e le polari $C_0 C_h$, $C_k C_l$ dei punti $t_0 t_h$, $t_k t_l$ passano per O_h ed hanno le coordinate

$$C_0 C_h \left[0, - \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \ , \ \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right] \ , \ C_k C_l \left[0, \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \ , \ \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right] .$$

Digitized by Google

La conica C' polare-reciproca di C rispetto a A ha l'equazione

$$c'_{xx} \equiv \sum \frac{a^2_h}{c_h} x^2_h = 0 \quad \text{o} \quad \gamma'_{\xi\xi} \equiv \sum \frac{\alpha^2_h}{\gamma_h} \xi^2_h = 0 \ ,$$

passa per A_0, A_1, A_2, A_3, tocca a_0, a_1, a_2, a_3, ed ha per triangolo autoconiugato $O_1 O_2 O_3$.

Come covariante delle forme a_{xx} e c_{xx}, deve c'_{xx} esprimersi linearmente per mezzo di esse e di u_{xx}; e lo stesso vale per $\gamma'_{\xi\xi}$ rispetto a $\alpha_{\xi\xi}, \gamma_{\xi\xi}, \chi_{\xi\xi}$; infatti

$$c\, c'_{xx} = s'\, a_{xx} - a\, c\, u_{xx} \ , \quad \gamma\, \gamma'_{\xi\xi} = \sigma'\, \alpha_{\xi\xi} - \alpha\, \gamma\, \chi_{\xi\xi} \ .$$

§. **2**. Assumiamo la conica A come assoluto per una determinazione metrica proiettiva nel suo piano, e ricordiamo le formole che definiscono la distanza (segmento) fra due punti P, P', la distanza (angolo) fra due rette r, r', e quella fra un punto P e una retta r: (*)

$$PP' = \frac{1}{2i}\, l \frac{a_{xx'} + i\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}}{a_{xx'} - i\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}} \ ,$$

$$\cos PP' = \frac{a_{xx'}}{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'}}} \ , \qquad \operatorname{sen} PP' = \frac{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}}{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'}}} \ ,$$

(*) Cfr. *Studio sulla Geometria proiettiva* di E. D'Ovidio (Annali di Matematica, t. VI, s. 2, 1873), ovvero *Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Memorie dei Lincei, v. I, 1877).

La quantità, di cui nell'espressione della distanza PP' si prende il logaritmo, è uno dei due rapporti anarmonici (reciproci fra loro) dei due punti P e P' e dei due punti che la retta PP' ha comuni con A. Scelto questo rapporto anarmonico, è definita la distanza PP' a meno di un multiplo di π, e però rimane ambiguo il segno di $\cos PP'$, $\operatorname{sen} PP'$. Lo stesso dicasi per rr' e Pr. Di qui segue che nelle relazioni metriche che noi troveremo il segno preposto ai seni e coseni sarà fino a un certo punto arbitrario. Qualche disaccordo nei segni, che potrà riscontrarsi fra le nostre relazioni e quelle note della Geometria euclidea, è spiegato da questa osservazione: che, se si percorre il contorno del triangolo principale nel verso indicato dall'ordine $O_1O_2O_3$, quando poi i vertici O_2 e O_3 vanno all'infinito e i lati O_1O_2, O_1O_3 divengono due assi cartesiani, uno di questi due lati non viene più percorso in quel verso ma nel verso contrario.

Digitized by Google

$$rr' = \frac{1}{2i} l \frac{\alpha_{\xi\xi'} + i\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}}{\alpha_{\xi\xi'} - i\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}} ,$$

$$\cos rr' = \frac{\alpha_{\xi\xi'}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'}}} , \quad \operatorname{sen} rr' = \frac{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'}}} ,$$

$$\operatorname{sen} Pr = \frac{\Sigma x_h \xi_h}{\sqrt{a_{xx}\alpha_{\xi\xi}}} ;$$

cosicchè due rette, o due punti, coniugati rispetto a A si diranno *ortogonali o normali o perpendicolari*, come pure un punto e la sua polare rispetto ad A.

Ciò premesso: $s = 0$, ovvero $\sigma' = 0$, è la condizione per l'esistenza di una e quindi ∞ terne di punti di C mutuamente ortogonali; e $s' = 0$, ovvero $\sigma = 0$, è la condizione per l'esistenza di una e quindi ∞ terne di tangenti di C mutuamente ortogonali. Il luogo dei punti comuni a due tangenti ortogonali di C è la conica U di equazione $u_{xx} = 0$, che passa per gli 8 punti $A_0, \dots, C_0, \dots$ ed ha il triangolo principale $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato; e l'inviluppo delle rette unienti due punti ortogonali di C è la conica V di equazione $\chi_{\xi\xi} = 0$, che tocca le 8 rette $a_0, \dots, c_0, \dots$, ed ha il triangolo principale $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato.

Più generalmente: il luogo dei punti, da cui escono due tangenti di C formanti un angolo φ, è la quartica (*)

$$4 u^2_{xx} \operatorname{tg}^2 \varphi + ac a_{xx} c_{xx} = 0 ;$$

e variando φ si ha un fascio di curve passanti per $A_0, \dots, C_0, \dots$ ed ivi tangenti U (**). Del pari l'inviluppo delle rette secanti C in due punti di distanza δ è la curva di 4ª classe

$$4 \chi^2_{\xi\xi} \operatorname{tg}^2 \delta + \alpha\gamma \alpha_{\xi\xi} \gamma_{\xi\xi} = 0 ,$$

(*) Cfr. Clebsch-Lindemann *Vorlesungen über Geometrie*, pag. 281, osservando che $\frac{e^{2i\varphi} - 1}{e^{2i\varphi} + 1} = i \operatorname{tg} \varphi$.

(**) Cfr. Salmon *Higher plane curves*, cap. *Quartics*, per le proprietà delle quartiche dedotte dalla equazione $UW = V^2$, ove $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ rappresentano coniche. La nostra quartica è l'inviluppo della conica $\lambda^2 a a_{xx} + 4\lambda u_{xx} \operatorname{tg} \varphi - c c_{xx} = 0$ variabile con λ.

Digitized by Google

e variando δ si ha una schiera di curve tangenti a $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ dove queste toccano V.

Due triangoli coniugati rispetto a A si diranno *ortogonali* e sono omologici. Vi sono ∞^3 triangoli *autortogonali*.

Uno fra essi, il principale, è autoconiugato rispetto a C.

$O_1 O_2 O_3$ e $o_1 o_2 o_3$ costituiscono rispettivamente l'unica terna di punti o di rette mutuamente ortogonali e coniugate rispetto a C. Le rette per O_k sono ortogonali a o_k; e in particolare le tangenti r_k, r'_k da O_k a C, che toccano nei punti Co_k. Per C, come per A, O_k e o_k sono centro ed asse di omologia armonica. È facile vedere che le corde di C passanti per O_k sono bisecate ivi e da o_k. Diremo O_1, O_2, O_3 e o_1, o_2, o_3 *centri ed assi principali* di C.

Per due punti $P(0, -x_k, x_l)$ $P'(0, x_k x_l)$ armonici rispetto a O_k e O_l si ha

$$\cos PP' = \frac{-a_k x^2_k + a_l x^2_l}{a_k x^2_k + a_l x^2_l}, \quad \text{sen}^2 PP' = \frac{4\, a_k a_l x^2_k x^2_l}{(a_k x^2_k + a_l x^2_l)^2},$$

$$\text{tg}^2 \frac{1}{2} PP' = \frac{a_k x^2_k}{a_l x^2_l};$$

e si noti che $PP' = \widehat{O_h P, O_h P'}$.

Pei punti Co_h, cioè $P_h \left[0, -\sqrt{c_l}, \sqrt{-c_k}\right]$, $P'_h \left[0, \sqrt{c_l}, \sqrt{-c_k}\right]$, che diremo *vertici* di C, si ha (*)

$$\cos P_h P'_h = -\frac{a_k c_l + a_l c_k}{a_k c_l - a_l c_k} = \frac{\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k}{\alpha_k \gamma_l - \alpha_l \gamma_k},$$

$$\text{sen}^2 P_h P'_h = -\frac{4\, a_k a_l c_k c_l}{(a_k c_l - a_l c_k)^2} = -\frac{4\, \alpha_k \alpha_l \gamma_k \gamma_l}{(\alpha_k \gamma_l - \alpha_l \gamma_k)^2},$$

$$\text{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h = -\frac{a_k c_l}{a_l c_k} = -\frac{\alpha_l \gamma_k}{\alpha_k \gamma_l},$$

(*) Occorrono sovente le identità che qui registriamo una volta per tutte:

$$\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k = \frac{a_k c_l + a_l c_k}{a_k a_l c_k c_l},$$

$$(\alpha\gamma)_h = -\frac{(ac)_h}{a_k a_l c_k c_l}, \quad \alpha_h (\alpha\gamma)_h = -\frac{c_h (ac)_h}{ac},$$

$$\Sigma\, a_k (ac)_k = 0, \quad \Sigma\, c_k (ac)_k = 0,$$

Digitized by Google

e quindi

$$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} P_1 P'_1 \,.\, \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} P_2 P'_2 \,.\, \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} P_3 P'_3 = -1 \ .$$

Si noti che $P_h P'_h = r_h r'_h$.

Sia P' un punto di C: la retta coniugata di $O_h P'$ rispetto a C e passante per O_h forma fascio con o_h e con la tangente t' in P', ha l'equazione $c_k x'_k x_k + c_l x'_l x_l = 0$, e incontra C in due punti, uno dei quali è $P''(\pm x'_h \sqrt{c_k c_l}\,,\, c_l x'_l\,,\, -c_k x_k')$. Ora si ha

$$\mathrm{tg}^2 O_h P' = \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{a_h x'^2_h} \ , \quad \mathrm{tg}^2 O_h P'' = \frac{a_l c^2_k x'_k + a_k c^2_l x'^2_l}{a_h c_k c_l x'^2_h} \ ,$$

$$\mathrm{tg}^2 O_h t' = \frac{c^2_h x'^2_h}{a_h (\alpha_k c^2_k x'^2_k + \alpha_l c^2_l x'^2_l)} \ ;$$

onde le relazioni

$$\mathrm{tg}^2 O_h P' + \mathrm{tg}^2 O_h P'' = -\frac{c_h (a_k c_l + a_l c_k)}{a_h c_k c_l} = \text{cost.} \ ,$$

$$\mathrm{tg}^2 O_h t' \,.\, \mathrm{tg}^2 O_h P'' = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \text{cost.} \ ,$$

generalizzazione di due noti teoremi di APOLLONIO.

§. **3.** Essendo $t_0, \ldots$ tangenti a C ed all'assoluto A, diremo *fuochi* di C i loro 6 punti d'incontro $t_0\,, t_1\,, \ldots$, e porremo $F_h \equiv t_0 t_h\,, F'_h \equiv t_k t_l$. È chiaro che, mentre l'involuzione delle coppie di rette coniugate rispetto a C e passanti per un punto fisso possiede una sola coppia ortogonale, l'involuzione diviene ortogonale quando il punto è un fuoco, e solo allora.

Consideriamo una retta $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, i suoi poli rispetto a

---

$$\alpha_k (\alpha\gamma)_k + \alpha_l (\alpha\gamma)_l = -\alpha_h (\alpha\gamma)_h = \frac{c_h (ac)_h}{ac} \ ,$$

$$\alpha_k (\alpha\gamma)_k - \alpha_l (\alpha\gamma)_l = 3\, \alpha_k \alpha_l \gamma_h - \sigma = \frac{3\, a_h c_k c_l - s'}{ac} \ ,$$

$$\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k = (\alpha\gamma)_h (2\, \alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma') = \frac{1}{a^2 c^2}\, a_h c_k (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_h) ,$$

ed altre analoghe, in tutte le quali è lecito scambiare le lettere greche con le italiche.

Digitized by Google

A e C, e la retta di questi poli $p\left[(\alpha\gamma)_1\xi_2\xi_3, (\alpha\gamma)_2\xi_3\xi_1, (\alpha\gamma)_3\xi_1\xi_2\right]$, cioè la perpendicolare a r dal suo polo rispetto a C; sicchè reciprocamente r passa pei poli di p. I punti $ro_h(0, \xi_l, -\xi_k)$, $po_h\left[0, (\alpha\gamma)_l\xi_k, -(\alpha\gamma)_k\xi_l\right]$ hanno costante il prodotto dei rapporti delle loro coordinate, che è $\frac{(\alpha\gamma)_l}{(\alpha\gamma)_k}$; e però sono coniugati in un'involuzione, i cui punti doppi sono F_h, F'_h. O altrimenti: rotando r intorno a un punto di o_h, i suoi poli rispetto a A e C descrivono sulle due polari di quel punto due punteggiate proiettive di cui O_h è un punto unito, e quindi prospettive; ossia p roterà intorno a un punto. E siccome quando r passa per O_h la p diviene o_h, così quel punto sta su o_h. Si hanno così su o_h coppie di punti in corrispondenza univoca ed evidentemente reciproca, cioè in involuzione; ed è chiaro che F_h, F'_h ne sono i punti doppî. Quindi le r, p sono in armonia con le rette unienti il punto rp a F_h e F'_h; e in particolare, la tangente e la normale in un punto P di C sono in armonia coi raggi focali PF_h, PF'_h.

Tutte le coniche della schiera AC, incluse le 3 coppie di punti (F_h, F'_h), sono *confocali* a C. Ciascuna è individuata da una tangente; e per ogni punto ne passano due, le cui tangenti in quel punto sono ortogonali ed in armonia con le tangenti tirate a ogni altra conica della schiera, nonchè con le rette che vanno a F_h e F'_h.

Si ha

$$\cos F_hF'_h = \frac{\alpha_k(\alpha\gamma)_k - \alpha_l(\alpha\gamma)_l}{\alpha_k(\alpha\gamma)_k + \alpha_l(\alpha\gamma)_l} = \frac{\sigma - 3\alpha_k\alpha_l\gamma_h}{\alpha_h(\alpha\gamma)_h} = \frac{3a_hc_kc_l - s'}{c_h(ac)_h},$$

$$\text{sen}^2 F_hF'_h = \frac{4\,\alpha_k\alpha_l(\alpha\gamma)_k(\alpha\gamma)_l}{\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h} = \frac{4\,c_kc_l(ac)_k(ac)_l}{c^2_h(ac)^2_h},$$

$$\text{tg}^2\tfrac{1}{2}F_hF'_h = \frac{\alpha_l(\alpha\gamma)_l}{\alpha_k(\alpha\gamma)_k} = \frac{c_l(ac)_l}{c_k(ac)_k},$$

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}F_1F'_1 \,.\, \text{tg}\tfrac{1}{2}F_2F'_2 \,.\, \text{tg}\tfrac{1}{2}F_3F'_3 = 1\;,$$

$$\text{tg}^2\tfrac{1}{2}F_hF'_h : \text{tg}^2\tfrac{1}{2}P_hP'_h = -\gamma_l(\alpha\gamma)_l : \gamma_k(\alpha\gamma)_k = -a_l(ac)_l : a_k(ac)_k\;.$$

E si noti che $F_hF'_h = \widehat{O_hF_h, O_hF'_h}$.

Digitized by Google

Diremo *direttrici* le rette $C_0C_1, \ldots$ polari dei fuochi rispetto a C, e porremo $d_h \equiv C_0 C_h$ polare di F_h, $d'_h \equiv C_k C_l$ polare di F'_h. Due rette r, p perpendicolari in F_h formano con d_h un triangolo autoconiugato rispetto a C; ogni retta r' pel punto pd_h ha il polo su r, e però questi due punti sono ortogonali, e le rette da F_h ai due punti $r'C$ sono armoniche con r, p. Ed altre proprietà si potrebbero dimostrare.

Si ha

$$\cos d_h d_h' = \frac{a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k - a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l}{a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k + a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l},$$

$$\operatorname{sen}^2 d_h d'_h = \frac{4 a_k a_l \gamma^2_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_k (\alpha\gamma)_l}{[a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k + a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l]^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_h d'_h = \frac{\alpha_k \gamma_l^2 (\alpha\gamma)_l}{\alpha_l \gamma_k^2 (\alpha\gamma)_k} = \frac{a^2_l c_k (ac)_l}{a_k c_l (ac)_k},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} d_1 d'_1 \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_2 d'_2 \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_3 d'_3 = 1 \;,$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_h d'_h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h = -\gamma_l (\alpha\gamma)_l : \gamma_k (\alpha\gamma)_k = -a_l (ac)_l : a_k (ac)_k \;,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F_h F'_h : \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_h d'_h = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h \;.$$

Le direttrici d_h, d'_h sono ortogonali a o_h nei due punti $D_h \left[0, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]$, $D'_h \left[0, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}, -\gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]$; e si ha $D_h D'_h = d_h d'_h$.

§. **4**. Per una retta qualunque r si ha

$$\operatorname{sen} r F_h = \frac{\xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}} \sqrt{a_k (\alpha\gamma)_l + a_l (\alpha\gamma)_k}},$$

$$\operatorname{sen} r F'_h = \frac{\xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} + \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\sigma_{\xi\xi}} \sqrt{a_k (\alpha\gamma)_l + a_l (\alpha\gamma)_k}},$$

onde le relazioni

$$\sum c_h (ac)_h \operatorname{sen} r F_h = 0 \;,$$

$$c_h (ac)_h \operatorname{sen} r F_h - c_k (ac)_k \operatorname{sen} r F'_k + c_l (ac)_l \operatorname{sen} r F'_l = 0 \;,$$

$$c_h (ac)_h (\operatorname{sen} r F_h + \operatorname{sen} r F'_h) + c_k (ac)_k (\operatorname{sen} r F_k - \operatorname{sen} r F'_k) = 0 \;,$$

$$\frac{\operatorname{sen} r F_h + \operatorname{sen} r F'_h}{\operatorname{sen} r F_k - \operatorname{sen} r F''_k} + \frac{\operatorname{sen} r F_h - \operatorname{sen} r F'_h}{\operatorname{sen} r F'_l + \operatorname{sen} r F'_l} = 1 \;.$$

Digitized by Google

Inoltre si ha

$$\operatorname{sen} rF_k \operatorname{sen} rF'_k = \frac{(\alpha\gamma)_k \xi^2_l - (\alpha\gamma)_l \xi^2_k}{c_{\xi\xi}\left[a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k\right]} ,$$

onde

$$\sum c^2_h (ac)^2_h \operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = 0 .$$

Si ha pure

$$\operatorname{sen} rF_h + \operatorname{sen} rF'_h = \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma)_k}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}}\sqrt{a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k}}\,\xi_l ,$$

$$\operatorname{sen} rF_h - \operatorname{sen} rF'_h = \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}}\sqrt{a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k}}\,\xi_k .$$

Suppongasi che r sia una tangente di C: allora (§ 1) $\gamma_h \alpha_{\xi\xi} = (\alpha\gamma)_k \xi^2_l - (\alpha\gamma)_l \xi^2_k$, e però sussisterà, oltre alle precedenti, la relazione

$$\operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = \frac{a_h c_l c_k}{c_h (ac)_h} = -\frac{\alpha_k \alpha_l \gamma_h}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h} = \text{cost. (con } h) ,$$

analoga ad una ben nota, e

$$\sum \frac{a_h c_k c_l}{\operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h} = 0 , \sum c_h (ac)_h \operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = s' ,$$

$$\sum \frac{a_l c^2_h (ac)_h}{(ac)_k} (\operatorname{sen} rF_h + \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 ,$$

$$\sum \frac{a_k c^2_h (ac)_h}{(ac)_l} (\operatorname{sen} rF_h - \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 .$$

Si noti che invece di $c_h(ac)_h$, $c_k(ac)_k$, $c_l(ac)_l$, in quelle relazioni che sono omogenee rispetto ad esse, si può scrivere le quantità proporzionali 1, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} F_l F'_l$, $\cot^2 \frac{1}{2} F_k F'_k$, nonchè quelle che si deducono permutando circolarmente hkl; del pari si può scrivere -1, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_l P'_l$, $\cot^2 \frac{1}{2} P_k P'_k$, o le analoghe terne, invece di $a_k c_k c_l, a_k c_l c_h, a_l c_h c_k$; come pure si può scrivere $\alpha_h(\alpha\gamma)_h$,... invece di $c_h(ac)_h$,... (mutando insieme s' in $-\sigma$); $\alpha_k \gamma_l \gamma_h$,... invece di $a_h c_k c_l$,...; $\frac{\alpha_h^2 \gamma_l (\alpha\gamma)_h}{(\alpha\gamma)_k}$,... invece di $\frac{a_l c_h^2 (ac)_h}{(ac)_k}$,...; $\frac{\alpha_h^2 \gamma_k (\alpha\gamma)_h}{(\alpha\gamma)_l}$,... invece di $\frac{a_k c_h^2 (ac)_h}{(ac)_l}$,...

Digitized by Google

Suppongasi r tangente a C': sarà

$$\sum \frac{(ac)_h}{a_l c^2_k (ac)_k} (\text{sen}\, rF_h + \text{sen}\, rF'_h)^2 = 0 \quad ,$$

$$\sum \frac{(ac)_h}{a_k c^2_l (ac)_l} (\text{sen}\, rF_h - \text{sen}\, rF'_h)^2 = 0 \quad ,$$

dove può scriversi $\frac{(\alpha\gamma)_h}{\gamma_l \alpha_k^2 (\alpha\gamma)_k}, \ldots$ invece di $\frac{(ac)_h}{a_l c_k^2 (ac)_k}, \ldots$, e $\frac{(\alpha\gamma)_h}{\gamma_k \alpha_l^2 (\alpha\gamma)_l}, \ldots$ invece di $\frac{(ac)_h}{a_k c^2_l (ac)_l}, \ldots$

Sia ora P un punto qualunque. Detta r la sua polare rispetto ad A, ed osservato che $PF_h - rF = Pr = \frac{\pi}{2}$, potremo in tutte le relazioni testè trovate sostituire $\cos PF_h$ a $\text{sen}\, rF_h$, e così pure $\cos PF'_h$ a $\text{sen}\, rF'_h$. Allora le ipotesi che r sia tangente di C o C' si mutano nelle ipotesi che P sia un punto di C' o di C.

Avremo anche

$$\text{sen}^2 PF_h = \cos^2 rF_h = \frac{\alpha_h (\alpha\gamma)_h \alpha_{\xi\xi} + \alpha_k \alpha_l \left| \xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \right|^2}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h \alpha_{\xi\xi}}$$

$$= \frac{\alpha_h (\alpha\gamma)_h a_{xx} + \alpha_k \alpha_l \left[a_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - a_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \right]^2}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h a_{xx}} \quad ,$$

e analogamente per $\text{sen}^2 PF'_h = \cos^2 rF'_h$.

§ 5. Per un punto qualunque P abbiamo

$$\text{sen}\, Pd_h = \frac{x_l \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - x_k \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k}} \quad ,$$

$$\text{sen}\, Pd'_h = \frac{x_l \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} + x_k \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k}} \quad ,$$

e ne deduciamo

$$\sum a_h (ac)_h \sqrt{s - 2\, a_k a_l c_h} \,.\, \text{sen}\, P\, d_h = 0 \quad ,$$

$$a_h (ac)_h \sqrt{s - 2\, a_k a_l c_h} \,.\, \text{sen}\, Pd_h - a_k (ac)_k \sqrt{s - 2\, a_l a_h c_k} \,.\, \text{sen}\, Pd'_k$$
$$+ a_l (ac)_l \sqrt{s - 2 a_h a_k c_l} \,.\, \text{sen}\, Pd'_l = 0 \quad ,$$

Digitized by Google

$$\operatorname{sen} Pd_h \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{\gamma^2_k (\alpha\gamma)_k x^2_l - \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l x^2_k}{a_{xx} [\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k]} ,$$

$$\sum a^2_h (ac)^2_h (s - 2 a_k a_l c_h) \operatorname{sen} Pd_h \operatorname{sen} Pd'_h = 0 ,$$

$$\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{2 \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma_k^2 (\alpha\gamma)_k}} x_l ,$$

$$\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{-2 \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k}} x_k .$$

Se P è un punto di C, sarà anche

$$\sum \frac{a_h (ac)_h (s - 2 a_k a_l c_h)}{a_k (ac)_k} (\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 ,$$

$$\sum \frac{a_h (ac)_h (s - 2 a_k a_l c_h)}{a_l (ac)_l} (\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 .$$

Se invece P è un punto di C',

$$\sum \frac{a_l (ac)_h (s - 2 a_k a_l c_k)}{c^2_l a^2_k (ac)_k} (\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 ,$$

$$\sum \frac{a_k (ac)_h (s - 2 a_k a_l c_h)}{c^2_k a^2_l (ac)_l} (\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 .$$

Si noti: che invece di $a_h (ac)_h, \ldots$ si possono scrivere le quantità loro proporzionali

$$-1,\ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_l F'_l : \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l,\ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k : \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_k F'_k ,$$

nonchè quelle che se ne ottengono permutando hkl circolarmente; invece di $s - 2 a_k a_l c_h, \ldots$ le

$$-1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l - \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k ,\ 1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l - \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k ,$$
$$1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l + \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k ,$$

od altre proporzionali; invece di

$$a_h (ac)_h \sqrt{s - 2 a_k a_l c_h} ,\ \ldots \text{ le } \gamma_h (\alpha\gamma)_h \sqrt{2 \alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma'} ,\ \ldots ;$$

invece di

$$\frac{a_h (ac)_h (s - 2 a_k a_l c_h)}{a_k (ac)_k} ,\ \ldots \text{ le } \frac{(\alpha\gamma)_h (2 \alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma')}{\gamma_k (\alpha\gamma)_k} ,\ \ldots ,\ \text{ecc.}$$

Digitized by Google

Sia ora r una retta arbitraria: potremo in queste relazioni mutare $\operatorname{sen} Pd_h$, $\operatorname{sen} Pd'_h$ in $\cos rd_h$, $\cos rd'_h$, bastando portare P nel polo di r. Ai casi che P stia su C o C' corrispondono i casi che r tocchi C' o C.

§. 6. Dalle date espressioni di $\operatorname{sen}^2 PF_h$ e $\operatorname{sen}^2 Pd_h$ si trae

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} =$$

$$\frac{\alpha_\gamma(\alpha\gamma)_h a_{xx} + \alpha_k\alpha_l\left[a_l x_l\sqrt{(\alpha\gamma)_k} - a_k x_k\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]^2}{\left[x_l\gamma_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k} - x_k\gamma_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]^2}\,\frac{2\alpha_h\gamma_k\gamma_l - \sigma'}{\alpha_h}\,.$$

Se P è un punto di C, e solo allora, la 1ª frazione del 2° membro risulta costante e vale $1:\gamma_k\gamma_l$; dunque sarà

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{\operatorname{sen}^2 PF'_h}{\operatorname{sen}^2 Pd'_h} = 2 - \frac{\sigma'}{\alpha_h\gamma_k\gamma_l} = \frac{s}{a_k a_l c_h} - 2 = \text{cost.}\ ,$$

relazione analoga ad una ben nota.

Da questa conseguono altre relazioni; p. e.

$$-\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = 1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}P_l P'_l + \cot^2\tfrac{1}{2}P_k P'_k\ ,$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}P_k P'_k\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} + \cot^2\tfrac{1}{2}P_h P'_h\frac{\operatorname{sen}^2 PF_k}{\operatorname{sen}^2 Pd_k} + 2 = 0\ ,$$

$$\sum\frac{c_h}{a_h}\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{s}{a} \quad \text{o} \quad \sum\frac{\alpha_h}{\gamma_h}\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{\sigma'}{\gamma}\ ;$$

nelle quali si può porre $F'_h, \dots, d'_h, \dots$ invece di $F_h, \dots, d_h, \dots$

Tenendo poi presenti le relazioni già dianzi trovate fra $\operatorname{sen} Pd_h, \dots$, otteniamo le seguenti, sempre quando P sia un punto di C:

$$\sum\sqrt{a_h c_h}\,(ac)_h \operatorname{sen} PF_h = 0\ ,$$

$$\sqrt{a_h c_h}\,(ac)_h \operatorname{sen} PF_h - \sqrt{a_k c_k}\,(ac)_k \operatorname{sen} PF'_k + \sqrt{a_l c_l}\,(ac)_l \operatorname{sen} PF'_l = 0\,.$$

$$\sum a_h c_h (ac)^2_h \operatorname{sen} PF_h \operatorname{sen} PF'_h = 0\ ,$$

$$\sqrt{a_h c_h}\,(ac)_h(\operatorname{sen} F_h + \operatorname{sen} PF'_h) + \sqrt{a_k c_k}\,(ac)_k(\operatorname{sen} PF_k - \operatorname{sen} PF'_k) = 0,$$

Digitized by Google

$$\sum \frac{c_h (ac)_k}{a_k (ac)_k} (\text{sen}\, PF_h + \text{sen}\, PF'_h)^2 = 0 \quad ,$$

$$\sum \frac{c_h (ac)_h}{a_l (ac)_l} (\text{sen}\, PF_h - \text{sen}\, PF'_h)^2 = 0 \quad .$$

Invece di $\sqrt{a_h c_h}\,(ac)_k, \ldots$, si possono scrivere le quantità proporzionali

$$i\,,\ \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_l F'_l : \text{tg} \tfrac{1}{2} P_l P'_l\,,\ \text{tg} \tfrac{1}{2} P_k P'_k : \text{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_k F'_k\,,$$

nonchè quelle che se ne deducono permutando circolarmente hkl; invece di $\sqrt{a_h c_k}\,(ca)_h, \ldots$ le $\sqrt{\alpha_h \gamma_h}\,(\alpha\gamma)_k, \ldots$; invece di $\frac{c^h (ac)_k}{c_k (ac)_k}, \ldots$ le $\frac{\alpha_k (\alpha\gamma)_k}{\alpha_k (\alpha\gamma)_k}, \ldots$; ecc.

Si noti che in tutte le relazioni qui accennate in luogo di $\text{sen}\, PF_h$, $\text{sen}\, Pd_h, \ldots$, si può sostituire $\cos rF_h$, $\cos rd_h, \ldots$ All'ipotesi che P stia su C corrisponde l'ipotesi che r tocchi C'.

§ 7. Vogliasi la podaria Φ di un punto fisso F rispetto a C. Una retta mobile uscente da F seca C' in due punti, cui corrispondono come polari rispetto ad A due tangenti di C ortogonali alla retta, e quindi due punti mobili della podaria Φ. Inoltre su ciascuna tangente da F a C due punti di Φ cadono in F. Dunque Φ è una quartica. Essa ha un punto doppio in F; tocca altrove le tangenti da F a C'; passa per $A_0, \ldots$; ed ha altri due punti doppî nei contatti G, G' delle tangenti da F ad A (giacchè per G passano due tangenti di C coi poli sulla FG, e del pari per C'). Dunque Φ è razionale.

Siano f_1, f_2, f_3 le coordinate di F. Una retta r, la cui perpendicolare da F contenga il polo di r rispetto a C, inviluppa (com'è facile vedere) la conica $\Sigma f_h (\alpha\gamma)_h \xi_k \xi_l = 0$, la quale è iscritta nel triangolo principale (e quindi in infiniti triangoli coi tre angoli retti). Le normali da F a C hanno i piedi nei punti di contatto di C con le tangenti comuni a C ed a questa conica, e però sono quattro. Questi punti di contatto sono i punti comuni a Φ e C; in essi dunque Φ e C si toccano.

Ma cerchiamo l'equazione di Φ. La perpendicolare da F a una retta qualunque r $(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0)$ è

$$\xi_1 \frac{(fx)_1}{a_1} + \xi_2 \frac{(fx)_2}{a_2} + \xi_3 \frac{(fx)_3}{a_3} = 0 \quad ,$$

Digitized by Google

e se (x_1, x_2, x_3) è l'intersezione di queste due rette, sarà

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a_1 q^{(1)}_{xx} : a_2 q^{(2)}_{xx} : a_3 q^{(3)}_{xx} \ ,$$

posto

$$q^{(h)}_{xx} \equiv [\,(fx)\,,\, ax\,]_h \ ;$$

e però, supponendo r tangente a C, si avrà l'equazione di Φ:

$$\Sigma\, a^2_h \gamma_h (q^{(h)}_{xx})^2 = 0 = c'_{q_{xx}\,,\,q_{xx}} \ ;$$

la quale prova che Φ è una quartica.

I punti comuni alle tre coniche $q^{(1)}_{xx} = 0$, $q^{(2)}_{xx} = 0$, $q^{(3)}_{xx} = 0$ son dati dalle equazioni $\frac{(fx)_1}{a_1 x_1} = \frac{(fx)_2}{a_2 x_2} = \frac{(fx)_3}{a_3 x_3} = \frac{0}{a_{xx}} = \frac{0}{a_{fx}}$; sicchè le tre coniche han comuni i tre punti F, G, G', e quindi appartengono a una rete.

Ciascuna conica della rete corrisponde univocamente alla coppia di punti in cui seca A (oltrechè in G e G'), od anche alla loro retta $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, od anche al polo P di questa retta rispetto ad A. L'equazione di una tal conica Q_r può ricever la forma $a_{xx} + k a_{fx} \xi_x = 0$, ove è posto $\xi_x \equiv \Sigma \xi_h x_h$ e k è dato dalla $1 + k \xi_f = 0$; e quindi la richiesta equazione sarà

$$q^{(\xi)}_{xx} \equiv a_{fx}\, \xi_x - a_{xx}\, \xi_f = \begin{vmatrix} a_{fx} & a_{xx} \\ \xi_f & \xi_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & a_3 x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma\, (fx)_h\, (\xi, ax)_h \ .$$

Essa mostra che Q_r passa per P, e che le rette r, GG' fanno fascio con le sue tangenti in F e P.

A rette r di un fascio corrispondono coniche Q_r di un fascio; e però a un punto corrisponde un punto, e ai punti di una retta r corrispondono univocamente i punti della conica corrispondente Q_r. I punti di A sono i punti uniti della corrispondenza.

Siano ora g_1, g_2, g_3 e g'_1, g'_2, g'_3 le coordinate di G e G': saranno $a_{fx} = 0$, $a_{gx} = 0$, $a_{g'x} = 0$ le equazioni di GG', FG, FG', e si avrà l'identità

$$a_{gx}\, a_{g'x} = a_{ff}\, a_{xx} - a^2_{fx} \ ,$$

e polarizzando rispetto a un punto $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$,

$$a_{gx}\, a_{g'x'} + a_{gx'}\, a_{g'x} = 2\,(a_{ff}\, a_{xx'} - a_{fx}\, a_{fx'}) \ ,$$

Digitized by Google

e applicando al punto P polo di r,

$$a_{gx}\xi_{g'}+a_{g'x}\xi_g=2\,(a_{ff}\xi_x-a_{fx}\xi_f)\ ,$$

onde

$$\xi_{g'}a_{fx}a_{gx}+\xi_g a_{fx}a_{g'x}=2(a_{ff}a_{fx}\xi_x+\xi_f a_{gx}a_{g'x}-a_{ff}\xi_f a_{xx})\ ,$$

ovvero

$$2\,a_{ff}q^{(\xi)}{}_{xx}=-2\,\xi_f a_{gx}a_{g'x}+\xi_{g'}a_{fx}a_{gx}+\xi_g a_{fx}a_{g'x}\ ;$$

la quale relazione conferma che Q_r è circoscritta al triangolo FGG'.

Le tangenti nei vertici di questo triangolo secano i lati opposti sulla retta $-\dfrac{a_{fx}}{2\,\xi_f}+\dfrac{a_{gx}}{\xi_g}+\dfrac{a_{g'x}}{\xi_{g'}}=0$, e Q_r si potrebbe far corrispondere univocamente a questa retta, variando r. Mediante le suddette identità l'equazione della medesima retta prende la forma $(a_{ff}a_{\xi\xi}+3\,\xi^2{}_f)\,a_{fx}-4\,a_{ff}\xi_f\xi_x=0$.

Ritornando alla corrispondenza fra Q_r e r, vediamo che alla retta o_h corrisponde la conica Qo_h, la quale passa pei due punti Ao_h e per O_h: essa non è altra che la $q^{(h)}{}_{xx}=0$. Alle rette GG', FG, FG' corrispondono le coppie di rette $(FG,\ FG')$, $(FG,\ GG')$, $(FG',\ GG')$. Alla polare di F rispetto a C corrisponde la

$$a_{fx}c_{fx}-c_{ff}a_{xx}=0=\Sigma\,(fx)_h\,(cf,\ ax)_h\ .$$

Alla polare di F rispetto a C' corrisponde la

$$a_{fx}c'_{fx}-c'_{ff}a_{xx}=0=\sum\frac{a_h\,a_l}{c_h\,c_l}\,(fx)_h\,(af,\ cx)_h\ .$$

Al punto O_h corrisponde il punto $o_h\,.\,O_hF$.

Essendo

$$-q^{(h)}{}_{xx}=a_{fx}x_h-f_h a_{xx}=a_{x\ ,\ fx_h-f_hx}\ ,$$

$$2\,a_{ff}q^{(h)}{}_{xx}=-2f_h a_{gx}a_{g'x}+g'_h a_{fx}a_{gx}+g_h a_{fx}a_{g'x}\ ,$$

l'equazione di Φ può scriversi sotto una 2^a e una 3^a forma:

$$a^2{}_{fx}c'_{xx}-2\,a_{fx}a_{xx}c'_{fx}+c'_{ff}a^2{}_{xx}=0=c'_{xa_{fx}-fa_{xx}\ ,\ xa_{fx}-fa_{xx}}\ ,$$

$$4\,c'_{ff}a^2{}_{gx}a^2{}_{g'x}+c'_{g'g'}a^2{}_{fx}a^2{}_{g'x}+c'_{gg}a^2{}_{fx}a^2{}_{g'x}$$

$$-2\,(2\,c'_{fg'}a_{gx}+2\,c'_{fg}a_{g'x}-c'_{gg'}a_{fx})\,a_{fx}a_{gx}a_{g'x}=0\ .$$

Digitized by Google

Ed essendo

$$q^{(\xi)}{}_{xx} = \Sigma \xi_h q^{(h)}{}_{xx} \ ,$$

l'equazione di Φ può assumere una 4ª forma:

$$(q^{(\;)}{}_{xx})^2 + (q^{(\xi')}{}_{xx})^2 + (q^{(\xi'')}{}_{xx})^2 = 0 \ ,$$

purchè

$$\frac{\xi_h \sqrt{c_h}}{a_h}, \quad \frac{\xi'_h \sqrt{c_h}}{a_h}, \quad \frac{\xi''_h \sqrt{c_h}}{a_h}$$

siano proporzionali ai coefficienti di una sostituzione ortogonale.

§ **8.** Ciascuna delle quattro forme dell'equazione di Φ mette in evidenza che la podaria ha per punti doppî F, G, G', e però è razionale. La 2ª forma mostra che Φ passa per i punti AC', ossia $A_0, \ldots$; che le tangenti da F a C' incontrano Φ in punti per cui $(a_{fx} c'_{fx} - c'_{ff} a_{xx})^2 = 0$, e però toccano Φ nei due punti diversi da G e G' che essa ha comuni con la conica della rete che corrisponde alla polare di F rispetto a C'; e che questi rimanenti due punti comuni a Φ e Q_r appartengono alla coppia di rette

$$c'_{xx} \xi^2_f - 2 \xi_f \xi_x c'_{fx} + c'_{ff} \xi^2_x = 0 = c'_{x\xi_f - f\xi_x ,\, x\xi_f - f\xi_x} \ ,$$

le quali passano per F e rispettivamente pei due punti $C'r$.

Poniamo

$$y_1 = -\frac{1}{2} a_{fx} \ , \quad y_2 = a_{gx} \ , \quad y_3 = a_{g'x} \ ,$$

vale a dire indichiamo con y_1, y_2, y_3 le coordinate del punto $P(x_1, x_2, x_3)$ rispetto al triangolo $FG'G$: allora la 3ª forma della equazione di Φ diviene

$$c'_{ff} y^2_2 y^2_3 + c'_{gg} y^2_3 y^2_1 + c'_{g'g'} y^2_1 y^2_2 + 2\,(c'_{gg'} y_1 + c'_{fg'} y_2 + c'_{fg} y_3)\, y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Se ora poniamo la corrispondenza birazionale (*)

$$z_1 : z_2 : z_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 \quad \text{o} \quad y_1 : y_2 : y_3 = z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2 \ ,$$

ove z_1, z_2, z_3 son coordinate di un punto rispetto al triangolo $FG'G$, la Φ corrisponderà punto per punto alla conica C'' di equazione

$$c'_{ff} z^2_1 + c'_{gg} z^2_2 + c'_{g'g'} z^2_3 + 2\,(c'_{gg'} z_2 z_3 + c'_{fg'} z_3 z_1 + c'_{fg} z_1 z_2) = 0$$

(*) Cfr. Salmon, *Higher plane curves*, cap. *Quartics*.

Digitized by Google

ossia

$$c'_{fz_1+gz_2+g'z_3,\; fz_1+gz_2+g'z_3} = 0 \ .$$

A una retta $\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0$ corrisponderà una conica della rete dianzi considerata $\eta_1 y_2 y_3 + \eta_2 y_3 y_1 + \eta_3 y_1 y_2 = 0$; e precisamente: a $z_1 = 0$ corrisponderà $y_2 y_3 = 0$ e così via, vale a dire che a GG', FG, FG' corrisponderanno le coppie di rette (FG, FG'), (FG', GG'), (FG, GG'); e in generale la Q_r corrisponderà alla retta r' di equazione $\xi_f z_1 + \xi_g z_2 + \xi_{g'} z_3 = 0$ ossia $\xi_{fz_1+gz_2+g'z_3} = 0$.

Insomma questa corrispondenza è diversa da quella che abbiamo considerata per la prima; ma le due rette r, r', cui corrisponde in esse una stessa Q_r sono rette corrispondenti fra loro nella omografia definita dalle

$$x_h = f_h z_1 + g_h z_2 + g'_h z_3 \ ,$$

od anche dalle

$$z_1 = a_{fx} : a_{ff} \ , \ \ z_2 = a_{g'x} : a_{gg'} \ , \ \ z_3 = a_{gx} : a_{gg'} \ .$$

In questa omografia F è un punto unito e GG' una retta unita, a G corrisponde G' e viceversa, a FG corrisponde FG' e viceversa. Inoltre a C' corrisponde C''; cosicchè noi potremmo far corrispondere Φ a C' punto per punto.

A una retta per F, $\eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0$, corrisponde un' altra retta per F, $\eta_3 y_2 + \eta_2 y_3 = 0$, oltre la retta GG'; a un punto di GG' un elemento di direzione uscente da F, e così via.

Alle coppie di punti d'incontro di C'' rispettivamente con GG', FG, FG' corrispondono le coppie di tangenti a Φ nei punti doppî F, G', G. Queste tre coppie di tangenti inviluppano una conica

$$c'_{ff}\eta_1^2 + c'_{gg}\eta_2^2 + c'_{g'g'}\eta_3^2 - 2\,(c'_{gg'}\eta_2\eta_3 + c'_{fg}\eta_3\eta_1 + c'_{fg'}\eta_1\eta_2) = 0 \ ,$$

la quale è l'inviluppo delle rette $\eta_1 y_1 + \ldots = 0$, cui corrispondono coniche $\eta_1 z_2 z_3 + \ldots = 0$ che posseggono triangoli circoscritti autoconiugati rispetto a C''.

Le stesse coppie di tangenti secano le GG', FG, FG' in tre coppie di punti di una conica

$$\frac{z_1^2}{c'_{ff}} + \frac{z_2^2}{c'_{gg}} + \frac{z_3^2}{c'_{g'g'}} + 2\left(\frac{c'_{gg'}}{c'_{gg}c'_{g'g'}} z_2 z_3 + \frac{c'_{fg}}{c_{ff}c'_{g'g'}} z_3 z_1 + \frac{c'_{fg}}{c'_{ff}c'_{gg}} z_1 z_2\right) = 0 \ .$$

Digitized by Google

Anche le coppie di rette che vanno dai tre punti doppî a toccare altrove Φ inviluppano una conica.

Le equazioni delle quattro tangenti doppie della quartica Φ sono compendiate nella

$$(c'_{gg'} y_1 + c'_{fg'} y_2 + c'_{fg'} y_3)$$
$$+ (y_1 \sqrt{c'_{gg}} \sqrt{c'_{g'g'}} + y_2 \sqrt{c'_{ff}} \sqrt{c_{g'g'}} + y_3 \sqrt{c'_{ff}} \sqrt{c'_{gg}}) = 0 \ ,$$

prendendo per ciascun radicale l'uno o l'altro suo valore.

§ 9. Se F cade su una delle $t_0, \ldots$, e sia t_0, G' diviene A_0, e la Φ si scinde nella retta t_0 (perchè t_0 tocca C e coincide con la retta che unisce F al polo A_0 di t_0 rispetto ad A) e in una cubica; la quale passa per F, ha un punto doppio in G, passa per $A_0, \ldots$, tocca le tangenti da F a C', e tocca C in tre punti, piedi delle tre normali condotte da F a C (oltre la t_0).

L'equazione della cubica si ottiene dalla 3ª forma dell'equazione di Φ osservando che adesso $c'_{g'g'} = 0$, sicchè nell'equazione compare il fattore $a_{g'x}$, soppresso il quale, rimane

$$4 c'_{ff} a^2_{gx} a_{g'x} + c'_{gg} a^2_{fx} a_{g'x}$$
$$- 2 (2 c'_{fg'} a_{gx} + 2 c'_{fg} a_{g'x} - c'_{gg'} a_{fx}) a_{fx} a_{gx} = 0 \ ,$$

ossia

$$c'_{ff} y_2^2 y_3 + c'_{gg} y_1^2 y_3 + 2 (c'_{gg'} y_1 + c'_{fg'} y_2 + c'_{fg} y_3) y_1 y_2 = 0.$$

Se poi F cade in un fuoco F_h, G diviene A_h, e Φ si scinde nelle due rette t_0, t_h e in una conica; la quale passa pei quattro punti $A_0, \ldots$, e tocca C nei due punti P_h, P'_h (piedi delle due normali da F_h); cosicchè la stessa conica è podaria anche del fuoco F'_h.

L'equazione della conica è

$$2 (c'_{ff} a_{gx} a_{g'x} - c'_{fg'} a_{fx} a_{gx} - c'_{g} a_{fx} a_{g'x}) + c'_{gg'} a_{fx}^2 = 0 \ ,$$

ossia

$$2 (c'_{gg'} y_1 + c'_{fg'} y_2 + c'_{fg} y_3) y_1 + c'_{ff} y_2 y_3 = 0 \ ,$$

e mediante le identità adoperate nel § precedente la equazione prende la forma

$$2 a_{ff} c'_{ff} a_{xx} - 4 a_{ff} a_{fx} c'_{fx} + (2 c'_{ff} + c'_{gg'}) a_{fx}^2 = 0 \ ,$$

Digitized by Google

dove

$$a'_f = -\frac{\alpha_h(\alpha\gamma)_h}{\alpha_k\alpha_l}, \quad c'_{gg'} = -2\gamma_h(\alpha\gamma)_h, \quad c'_{ff} = (\alpha\gamma)_h \frac{3\alpha_k\alpha_l\gamma_h - \sigma}{\alpha_k^2\alpha_l^2},$$

$$a_{fx} = -a_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} + a_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k},$$

$$c'_{fx} = -a^2_k \gamma_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} + a^2_l \gamma_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k}.$$

L'equazione complessiva delle coniche podarie dei fuochi, essendo un covariante di A e C, deve potersi porre sotto la forma

$$\sum \lambda\, a^{\mu}_{xx}\, c^{\nu}_{xx}\, u^{\rho}_{xx} = 0,$$

ove λ è un numero e μ, ν, ρ interi positivi di somma 3; ma non intendiamo di occuparcene.

§ **10**. Supponiamo ora che l'assoluto A, come inviluppo, si riduca ad una coppia di punti L, L'. Basterà supporre $\alpha_3 = 0$, onde

$$\alpha = 0, \; a_3 = \infty, \; \alpha a_{xx} = \alpha_1\alpha_2 x_3^2, \; (\alpha\gamma)_1 = \alpha_2\gamma_3, \; (\alpha\gamma)_2 = -\alpha_1\gamma_3.$$

Allora due delle t_0, t_1, t_2, t_3, p. e. t_0 e t_3, saranno le tangenti da L a C, e le altre due t_1, t_2 le tangenti da L' a C. I punti A_0, A_3, F_2 cadranno in L, e A_1, A_2 F'_2 in L'. La o_3 sarà la LL'. L'assoluto luogo sarà la retta LL' contata due volte.

Il punto O_3 sarà il centro al finito, e o_1, o_2 gli assi al finito di C. Le d_2, d_2 s'incontreranno al finito in O_3.

Le espressioni di $\cos rr'$, $\operatorname{sen} rr'$ sussisteranno; ma la distanza di due punti e quella fra un punto e una retta saran definite dalle formole

$$PP' = \lim \frac{\operatorname{sen} PP'}{\sqrt{\alpha}} = \lim \frac{\operatorname{tg} PP'}{\sqrt{\alpha}}, \quad Pr = \lim \frac{\operatorname{sen} Pr}{\sqrt{\alpha}} = \lim \frac{\operatorname{tg} Pr}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\text{per } \alpha_3 = 0.$$

Quindi sarà

$$\overline{P_1P'_1}^2 = -\frac{4\gamma_2}{\alpha_1\alpha_2^2\gamma_3}, \quad \overline{P_2P'_2}^2 = -\frac{4\gamma_1}{\alpha_1^2\alpha_2\gamma_3},$$

onde

$$\overline{P_1P'_1}^2 - \overline{P_2P'_2}^2 = -\frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_3}, \quad \left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right)^2 = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_1};$$

$$\overline{O_3P'}^2 + \overline{O_3P''}^2 = \text{cost.}, \quad O_3t'.\,O_3P'' = \text{cost.};$$

$$\overline{F_1F'_1}^2 = -\frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_3}, \quad \overline{F_2F'_2}^2 = \frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_3},$$

Digitized by Google

onde

$$\overline{F_1F'_1}^2 = -\overline{F_2F'_2}^2 = \overline{P_1P'_1}^2 - \overline{P_2P'_2}^2 ;$$

e

$$\overline{D_1D'_1}^2 = -\frac{4\gamma_2^3}{\alpha_2^2(\alpha\gamma)_3\gamma_3} = \frac{\overline{P_1P'_1}^4}{\overline{P_1P'_1}^2 - \overline{P_2P'_2}^2} ,$$

$$\overline{D_2D'_2}^2 = \frac{4\gamma_1^3}{\alpha_1^2(\alpha\gamma)_3\gamma_3} = \frac{\overline{P_2P'_2}^4}{\overline{P_2P'_2}^2 - \overline{P_1P'_1}^2} ,$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_3 d'_3 = -\frac{\alpha_1^2\gamma_2^2}{\alpha_2^2\gamma_1^2} = \left(\frac{D_1D'_1}{D_2D'_2}\right)^2 = -\left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right)^4 ;$$

onde

$$\left(\frac{F_1F'_1}{P_1P'_1}\right)^2 = \frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1\gamma_2} , \quad \left(\frac{F_2F'_2}{P_2P'_2}\right)^2 = -\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_2\gamma_1} ,$$

$$\left(\frac{P_1P'_1}{F_1F'_1}\right)^2 + \left(\frac{P_2P'_2}{F_2F'_2}\right)^2 = 1 ;$$

$$F_1F'_1 . D_1D'_1 = \overline{P_1P'_1}^2 , \quad F_2F'_2 . D_2D'_2 = \overline{P_2P'_2}^2 .$$

Per una retta qualunque r si avrà

$$(rF_1 + rF'_1) - (rF_2 - rF'_2) = 0 ,$$

$$(rF_1 - rF'_1) : (rF_2 + rF'_2) = i\,\xi_2 \sqrt{\alpha_2} : \xi_1 \sqrt{\alpha_1} ,$$

sicchè

$$(rF_1 - rF'_1) : (rF_2 - rF'_2) = \text{cost.}$$

per le rette passanti per uno stesso punto di LL'. E se r è tangente a C, sarà pure

$$rF_1 . rF'_1 = \tfrac{1}{4}\overline{P_2P'_2}^2 , \quad rF_2 . rF'_2 = \tfrac{1}{4}\overline{P_1P'_1}^2 .$$

Per un punto qualunque P si avrà

$$Pd_1 + Pd'_1 = D_1D'_1 , \quad Pd_2 - Pd'_2 = D_2D'_2 ,$$

mentre $Pd'_1 - Pd_1$, $Pd_3 + Pd'_3$ variano con $x_2 : x_3$, e $Pd_2 + Pd'_2$, $Pd_3 - Pd'_3$ con $x_1 : x_3$; e però son costanti pei punti di una retta per O_1 e rispettivamente per O_2.

Digitized by Google

Per un punto di C si avrà

$$\left(\frac{PF_1}{Pd_1}\right)^2=\left(\frac{PF'_1}{Pd'_1}\right)^2=\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1\gamma_2}=1-\left(\frac{P_2P'_2}{P_1P'_1}\right)^2,$$

$$\left(\frac{PF_2}{Pd_2}\right)^2=\left(\frac{PF'_2}{Pd'_2}\right)^2=\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_2\gamma_1}=-1+\left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right),$$

ed anche

$$PF_1+PF'_1=P_1P'_1\,,\quad PF'_2-PF_2=P_2P'_2\,.$$

Notiamo che si è supposto α_1 non 0, α_2 non 0. Siccome $\sigma=\alpha_1\alpha_2\gamma_3$, così C non contiene terne di punti ortogonali se non è $\gamma_3=0$, ossia se C non si scinde in due punti di o_3. E siccome $\sigma'=(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\gamma_3$, così C non avrà terne di tangenti ortogonali, se non quando i punti Co_3 sono in armonia con L e L', e quando C si scinde in due punti di o_3.

La conica U è ora $(\alpha_2x^2_1+\alpha_1x^2_2)x^2_3+\gamma_3(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)x^2_3=0$, che passa per L, L', e può dirsi un *circolo* di centro O_3.

La conica V è $c_2\xi^2_1+c_1\xi^2_2=0$, e però consta de' due punti Co_3.

La C', come inviluppo, si riduce a $\alpha^2_1c_1\xi^2_1+\alpha^2_2c_2\xi^2_2=0$, che è una coppia di punti di o_3; e come luogo si riduce a $x^2_3=0$, cioè alla retta o_3 contata due volte.

La podaria Φ di un punto F arbitrario è una quartica razionale, che ha per punti doppi F, L, L', tocca le rette da F ai due punti cui si è ridotta C', ecc. La sua equazione è

$$[\alpha^2_1\gamma_2(fx)^2_1+\alpha^2_2\gamma_1(fx)^2_2]\,x^2_3+\gamma_3[\alpha_2x_1(fx)_2-\alpha_1x_2(fx)_1]^2=0\ .$$

Le coniche (circoli) Q_{0_1}, Q_{0_2} divengono le coppie di rette $(FO_2,\,o_3)$, $(FO_1,\,o_3)$; la Q_{0_3} passa per O_3, $FO_1.o_1$, $FO_2.o_2$; ecc.

Se F cade in F_1, la Φ si scinde nelle t_0, t_1 e in un circolo, che tocca C in P_1, P'_1 ed ha per equazione $a_2c_{xx}+(ac)_3x^2_1=0$.

§ **11.** Accenniamo quel che avviene nel caso che la conica C tocchi l'assoluto A in un punto, sicchè possa chiamarsi una *parabola*. In questo punto cadono I_0, I_1, A_0, A_1, C_0, C_1; t_0 e t_1 divengono la tangente comune ivi; F_1 cade pure in I_0, F_2 coincide con F'_2 e F'_3 con F_3. La o_1 passa per I_0; o_1, o_2 divengono t_0; O_2, O_3 cadono in I_0.

Digitized by Google

Non vi sarà più un triangolo proprio $O_1 O_2 O_3$; ma, riferendoci al triangolo di vertici F'_1, F_2, F'_3 e di lati t_0, t_3, t_2, se l'equazione del punto di contatto è $a_2 \xi_3 + a_3 \xi_2 = 0$, potremo assumere:

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv 2(a_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2) \ , \ \alpha \equiv 2 a_1 a_2 a_3 \ ,$$

$$\gamma_{\xi\xi} \equiv 2(c_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2) \ , \ \gamma \equiv 2 c_1 a_2 a_3 \ ,$$

$$-\alpha a_{xx} \equiv a^2_1 x^2_1 + \ldots - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - \ldots \ ,$$

$$-\gamma c_{xx} \equiv c^2_1 x^2_1 + a_2 x^2_2 + a_3 x^2_3 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 c_1 x_3 x_1 - 2 c_1 a_2 x_1 x_2 \ ,$$

$$a\alpha \equiv 1 \ , \ c\gamma \equiv 1 \ ,$$

$$-\alpha a_{xx'} \equiv (a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3) a_1 x'_1 + \ldots \ , \ \alpha_{\xi\xi'} \equiv \alpha_1 (\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi'_2) + \ldots,$$

$$-\gamma c_{xx'} \equiv (c_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3) c_1 x'_1 + \ldots \ , \ \gamma_{\xi\xi'} \equiv c_1 (\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi''_2) + \ldots,$$

essendo $a_{xx'} = \alpha_{\xi\xi'}$ se P, P' sono i poli di r, r' rispetto ad A, ecc.

Inoltre potremo assumere

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} \equiv \frac{a_1 + 2 c_1}{a_1} \ , \ \frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} \equiv \frac{2 a_1 + c_1}{c_1} \ ,$$

$$u_{xx} \equiv a_1 c_1 x^2_1 + (a_2 x_2 - a_3 x_3)^2 - (a_1 + c_1) x_1 (a_2 x_2 + a_3 x_3) \ ,$$

$$\chi_{\xi\xi} \equiv (a_1 - c_1)^2 (a^2_3 \xi^2_2 + a^2_2 \xi^2_3)$$

$$+ 2 (a_1 + c_1) a_2 a_3 [(a_1 + c_1) \xi_2 \xi_3 + 2 a_2 \xi_3 \xi_1 + 2 a_3 \xi_1 \xi_2] \ ,$$

$$d'_{xx} \equiv a^2_1 (c_1 - 2 a_1) x^2_1 - c_1 (a_2 x_2 - a_3 x_3)^2 + 2 a^2_1 x_1 (a_2 x_2 + a_3 x_3) \ ,$$

$$\gamma'_{\xi\xi} \equiv (a_1 - c_1)^2 (a_3 \xi_2 + a_2 \xi_3)^2 - 2 c \xi_1 (a_3 \xi_2 + a_2 \xi_3) - 2 a a_1 \xi_2 \xi_3 \ ;$$

$$P'_1 (4 a_2 a_3 , a_3 c_1 , c_1 a_2) , d'_1 (-c_1 , a_2 , a_3) , D'_1 (2 a_2 a_3 , a_3 c_1 , c_1 a_2) , \ldots$$

Sarà quindi

$$\mathrm{sen}^2 P'_1 F'_1 = -\frac{c^2_1}{4 a_1 (a_1 - c_1)} \ , \ \mathrm{sen}^2 P'_1 D'_1 = -\frac{c^2_1}{4 (a_1 - c_1)(a_1 - 2 c_1)},$$

$$1 - \frac{\mathrm{sen}^2 P'_1 F'_1}{\mathrm{sen}^2 P'_1 D'_1} = 2 \frac{c_1}{a_1} \ .$$

Per una retta qualunque r si avrà

$$\mathrm{sen}\, r F'_1 = \frac{\xi_1}{a_1 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \ , \ \mathrm{sen}\, r F_2 = \frac{\xi_2}{a_2 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \ , \ \mathrm{sen}\, r F'_3 = \frac{\xi_3}{a_3 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \ ;$$

Digitized by Google

e se r è tangente di C, si avranno le relazioni

$$c_1 \operatorname{sen} rF_2 \operatorname{sen} rF'_2 + a_1 \operatorname{sen} rF_1 (\operatorname{sen} rF_2 + \operatorname{sen} rF'_2) = 0 \quad ,$$

$$\operatorname{sen} rF_2 \operatorname{sen} rF'_2 = \frac{a_1}{c_1 - a_1} = \text{ cost.}$$

Si noti che a c_1, a_1, $c_1 - a_1$ si può sostituire $1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P'_1 F'_1}{\operatorname{sen}^2 P'_1 D'_1}$, 2, $-1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P'_1 F'_1}{\operatorname{sen}^2 P'_1 D'_1}$, e a $\operatorname{sen} rF'_1, \ldots$, si può sostituire $\cos PF'_1, \ldots$, essendo P polo di r rispetto a A, e quindi arbitrario o su C'.

Per un punto qualunque P si avrà

$$\operatorname{sen}^2 PF'_1 = -\frac{4\, a_2 a_3 x_2 x_3}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad ,$$

$$\operatorname{sen}^2 PF_2 = -\frac{4\, a_3 a_1 x_3 x_1}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad , \quad \operatorname{sen}^2 PF'_2 = -\frac{4 a_1 a_2 x_1 x_2}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad ,$$

ed anche

$$\operatorname{sen} Pd'_1 = \frac{-c_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}\sqrt{(2c_1 - a_1) : a_1}} \quad ,$$

$$\operatorname{sen} Pd_2 = \frac{c_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}} \quad , \quad \operatorname{sen} Pd'_2 = \frac{c_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}} \quad :$$

e se P è un punto di C,

$$\left(1 - 2\frac{c_1}{a_1}\right) \operatorname{sen}^2 Pd'_1 + 4 \left[\operatorname{sen} Pd'_1 \sqrt{1 - 2\frac{c_1}{a_1}} + \operatorname{sen} Pd_2\right]$$

$$\left[\operatorname{sen} Pd'_1 \sqrt{1 - 2\frac{c_1}{a_1}} + \operatorname{sen} Pd'_2\right] = 0 \quad ,$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF'_1}{\operatorname{sen}^2 Pd'_1} = 1 - 2\frac{c_1}{a_1} = \text{ cost.} \quad , \quad \frac{\operatorname{sen}^2 PF_2}{\operatorname{sen}^2 Pd_2} = \frac{\operatorname{sen}^2 PF'_2}{\operatorname{sen}^2 Pd'_2} = \frac{c_1}{a_1} \quad .$$

Quanto alla podaria Φ, notiamo che la 2ª e la 3ª forma che demmo alla sua equazione nel § 7 son valide indipendentemente dalla scelta del triangolo di riferimento, e quindi servono anche nella ipotesi presente.

Digitized by Google

§ **12**. Se, rimanendo nel caso della parabola, supponiamo l'assoluto A ridotto a una coppia di punti L, L'; allora t_0, t_1 divengono la retta LL'; I_2, I_3, P_1, P_2, P'_2, P_3, P'_3 cadono anch'essi in F_1; A_2, F_2, F'_3 in L; A_3, F'_2, F_3 in L'. Basterà supporre a_1 nullo, e c_1, a_2, a_3 nulli ma proporzionali a tre numeri dati γ_1, γ_2, γ_3. E potremo assumere

$$\sigma_{\xi\xi} \equiv 2a_1 \xi_2 \xi_3 \ , \ \alpha \equiv 0 \ , \ -\alpha a_{xx} \equiv a^2_1 x^2_1 \ , \ \alpha a \equiv 1 \ ,$$

$$\gamma_{\xi\xi} \equiv 2(\gamma_1 \xi_2 \xi_3 + \gamma_2 \xi_3 \xi_1 + \gamma_3 \xi_1 \xi_2) \ , \ \Upsilon \equiv 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ ,$$

$$c_{xx} \equiv \gamma^2_1 \xi^2_1 + \ldots - 2\gamma_2\gamma_3\xi_2\xi_3 - \ldots \ , \ c\gamma \equiv 1 \ , \text{ ecc.}$$

Ciò posto, sarà

$$\overline{P'_1F'_1}^2 = \overline{P'_1D'_1}^2 = -\frac{\Upsilon^2_1}{8a^3_1\Upsilon_2\Upsilon_3} \ .$$

Sarà pure

$$\overline{rF'_1}^2 = \frac{\xi^2_1}{2a^3_1\xi_2\xi_3} \ , \ \overline{PF'_1}^2 = -\frac{2x_2x_3}{a^3_1x^2_1} \ , \ \overline{Pd'_1}^2 = -\frac{(-\Upsilon_1x_1 + \Upsilon_2x_2 + \Upsilon_3x_3)^2}{2a^3_1\Upsilon_2\Upsilon_3x^2_1} \ , \ldots ;$$

$$(Pd_2 + Pd'_2)^2 = -16\,\overline{P'_1F'_1}^2 \ ;$$

e se P è un punto di C,

$$PF'_1 = Pd'_1 \ .$$

La podaria Φ si scinde nella retta t_0 e nella cubica

$$(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3)(fx)_1(fx)_2 - c_2x_1(fx)^2_1 - c_1x_2(fx)^2_2 = 0 \ ;$$

e se F cade sulla t_0, si scinde nella t_0 contata tre volte e nella retta

$$f_1f_2(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3) - c_2f^2_1x_1 - c_1f^2_2x_2 = 0 \ ,$$

che diviene t_3 o t_2 se F cade in L o L'; se poi F cade sulla t_2, Φ si scinde nelle t_0, t_3 e nella conica

$$f_3(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3)(fx)_1 - c_2(fx)^2_1 - c_1f^2_2x_1x_2 = 0 \ ;$$

e se da ultimo F cade in F'_1, Φ si scinde nelle t_0, t_2, t_3 e nella retta $2c_1x_1 + 2c_2x_2 - c_3x_3 = 0$ tangente a C in P'_1.

Digitized by Google

§ **13** Quando A e C si toccano semplicemente in un punto, vi è da considerare un'altra scelta di triangolo di riferimento, come quella che ha il vantaggio di prestarsi anche ai casi del doppio contatto e dell'osculazione.

Scegliendo il triangolo $F'_2 C_3 F_1$ ossia $d'_2 t_0 t_3$, assumiamo

$$c_{xx} \equiv c_1 x^2_1 + 2c_0 x_2 x_3, c = -c_1 c^2_0 , \gamma_{\xi\xi} \equiv \gamma_1 \xi^2_1 + 2\gamma_0 \xi_2 \xi_3 , c_0\gamma_0 \equiv c_1\gamma_1 \equiv c\gamma \equiv 1 ,$$

$$a_{xx} \equiv a_1 (x_1 + bx_2)^2 + 2a_0 x_2 x_3 , \quad a \equiv -a_1 a^2_0 ,$$

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv \alpha_1 \xi^2_1 + 2a_0 \xi_2 \xi_3 - 2\alpha_0 \xi_3 \xi_1 , \quad a_0 \alpha_0 \equiv a_1 \alpha_1 \equiv a \alpha \equiv 1 ,$$

e quindi

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} = \frac{a_0 c_1 + 2a_1 c_0}{a_0 a_1} = \frac{2\alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0}{\gamma_0 \gamma_1} ,$$

$$\frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{2a_0 c_1 + a_1 c_0}{c_0 c_1} = \frac{\alpha_0 \gamma_1 + 2\alpha_1 \gamma_0}{\gamma_0 \alpha_1} ,$$

$$-\frac{1}{2} u_{xx} \equiv \alpha_0 \gamma_0 x^2_1 + (\alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0) x_2 x_3 + \alpha_0 \gamma_0 b x_1 x_2 ,$$

$$\chi_{\xi\xi} \equiv -a_0 c_0 \xi^2_1 + a_1 c_1 b^2 \xi^2_2 - 2 (a_0 c_1 + a_1 c_0) \xi_2 \xi_3 + 2a_1 c_0 b \xi_3 \xi_1 ,$$

$$d_{xx} \equiv a^2_1 c_0 x^2_1 + a_1 (2a_0 c_1 + a_1 c_0) b^2 x^2_2 + 2a_1 (a_0 c_1 + a_1 c_0) b x_1 x_2 + 2a^2_0 c_1 x_2 x_3 ,$$

$$\gamma_{\xi\xi} \equiv a^2_0 c_1 \xi^2_1 + a^2_1 c_1 b^2 \xi^2_2 - 2a_1 (a_0 c_1 + a_1 c_0) b \xi_3 \xi_1 + 2 a^2_1 c_0 \xi_2 \xi_3 ,$$

$$F'_1 (\alpha_0 \gamma_1 b , \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_1 , 0) , \quad F_2 (\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 , 0 , 2\alpha_0 \gamma_0 b) .$$

Per ogni punto di C si trova

$$\frac{\text{sen}^2 PF'_2}{\text{sen}^2 Pd'_2} = -\frac{a_0 c_1}{a_1 c_0} = -\frac{\alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0 \gamma_1} .$$

La podaria di F'_2 si scinde in t_0, t_3 e nella conica

$$c_1 (x_1 - bx_2)^2 + 2 c_0 x_2 x_3 = 0 ,$$

che tocca t_0 in F_1 e tocca t_3 nel punto armonico di A_3 rispetto a F'_2 e C_3.

Ciò posto, la C abbia un doppio contatto con A, nel qual caso può dirsi *circolo*. Allora t_0, t_1 coincidono e F_1, A_0, A_1, I_0, I_1

Digitized by Google

cadono in un punto di contatto di A e C; del pari t_2, t_3 coincidono e F'_1, A_2, A_3, I_2, I_3 cadono nell'altro punto di contatto; F_2, F'_2, F_3, F'_3 cadono nel punto $t_0 t_2$, e d_2,... divengono la corda di contatto.

Attualmente $b=0$. Rimane costante sen PF_2 : sen Pd_2, se P è su C. La C' e la podaria di F_2 coincidono con la C.

Se A degenera in una coppia di punti, C passa per essi, $\alpha_1=0$, e $\overline{PF_2}=0$.

Da ultimo, C abbia un contatto di 2° ordine con A. Allora t_0, t_1, t_2 coincidono; il punto di osculazione assorbe i punti I_0, I_1, I_2, A_0. A_1, A_2, C_0, C_1, C_2, F_1, F_2, F'_2. E si ha $a_0=c_0$, $a_1=c_1$, onde

$$\frac{s}{a}=\frac{\sigma'}{\gamma}=\frac{s'}{c}=\frac{\sigma}{\alpha}=3 \text{ , ecc. .}$$

Pei punti di C sarà $\text{sen}^2 PF'_1 = -\text{sen}^2 Pd'_1$.

Se A degenera in due punti L, L', la C passa per uno di essi L, e ivi tocca la retta LL', sicchè F'_1 cade in L'. Allora $1 : a_2=0$ e $\overline{PF'_1}=\infty$.

NB. A tutto ciò che abbiamo dianzi esposto è applicabile il principio di dualità; cosicchè, scambiando fra loro gli elementi punto e retta, e quindi conica luogo ed inviluppo, segmento e angolo, si ottengono delle proprietà, che sarebbe superfluo enunciare. A una schiera di coniche confocali sottentra un fascio di coniche aventi gli stessi quattro punti sull'assoluto.

Torino, 9 gennaio 1891.

Digitized by Google

Sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici

del dott. G. ERRERA

Nel fascicolo luglio-agosto 1890 del *Monatshefte für Chemie*, O. Srpek pubblica un lavoro sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici e non fa, senza accorgersi, che ripetere quasi esattamente una serie di esperienze eseguite già da me tre anni or sono sullo stesso argomento e che si trovano incidentalmente in una Memoria sull'*Azione dell'acido nitrico e del calore sugli eteri*, pubblicata negli *Atti* di questa R, Accademia delle Scienze, vol. XXII (1887) e nella *Gazzetta chimica italiana*, vol. XVII, pag. 193 e segg. Di questo mio lavoro si trova il sunto nel *Chemisches Central-Blatt* dello stesso anno vol. XVIII, pag. 1286 e una recensione più diffusa nel *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft* dell'anno seg., vol. XXI *Referate*, pag. 85.

Siccome i risultati ottenuti da Srpek e da me, benchè concordino nelle loro linee generali, differiscono in molti particolari, ho creduto bene fare alcune esperienze che del resto confermano quanto asserii nella mia Memoria già citata.

Allo scopo di preparare l'etere parabromobenziletilico, io avea cercato di giungere al cloruro di parabromobenzile, sia bromurando a freddo ed in presenza di iodio il cloruro di benzile, sia clorurando a caldo il parabromotoluene. Nell'un caso e nell'altro, invece del desiderato composto ottenni una sostanza cristallizzata in lunghi aghi splendenti incolori, le cui diverse porzioni fondevano da 50°, 5 a 55° e che mi diedero all'analisi una quantità di cloro molto minore ed una quantità di bromo assai maggiore di quella richiesta dal cloruro di bromobenzile. Basandomi sui risultati dell'analisi e sul fatto che per ossidazione non ottenni che acido parabromobenzoico, senza quantità apprezzabili d'acido paraclorobenzoico, conclusi che cloro non poteva esistere nel nucleo e che quindi la sostanza da me otte-

Digitized by Google

nuta si doveva considerare come un miscuglio di cloruro e bromuro di parabromobenzile (*).

Nella sua recente Memoria Srpek bromura anch'esso a freddo il cloruro di benzile in presenza di iodio e clorura il parabromotoluene sotto l'azione della luce solare diretta, azione che secondo gli studi di Schramm è equivalente a quella di una elevata temperatura. Arriva anch'egli a cristalli costituiti apparentemente da una sostanza unica, il cui punto di fusione cresce per successive cristallizzazioni da 36° a 59°. La determinazione totale degli alogeni dà all'Autore numeri analoghi a quelli ottenuti da me, però l'Autore avendo dosato separatamente gli alogeni contenuti nella catena laterale, deduce che cloro deve esistere nel nucleo e che quindi il prodotto da lui preparato è « principalmente bromuro di parabromobenzile (p. f. 61°) con un composto clorurato nel nucleo e nella catena laterale » aggiungendo che « calcolando in bromo la quantità di cloro trovata, si vede che in tutti i casi i numeri oltrepassano alquanto quelli richiesti da un toluene bisostituito » e più innanzi che « la combinazione ottenuta in ambedue i casi altro non è che bromuro di parabromobenzile, il quale trattiene impurità, più ricche in alogeni, difficili da allontanare ». Le analisi riportate dall'autore sono le seguenti:

		catena laterale		alogeno totale	
	p. f.	Cl. %	Br. %	Cl. %	Br %
dal cloruro di benzile e bromo	45° C	2,20	28,18	——	——
	52°	3,19	28,12	7,6	51,99
	58-59°	3,25	27,80	8,01	51,69
del parabromotoluene e cloro	36°	1,9	31,6	13,8	43,4
	52°	3,26	27,8	7,9	50,76

Se le analisi sono veramente esatte è necessario ammettere la presenza del cloro nel nucleo, non vedo però in qual modo dai numeri scritti sopra si possa dedurre, come fa Srpek, che calcolando il cloro in bromo si ottenga una quantità totale di alogeno superiore a quella richiesta da un bibromotoluene, il che appunto conduce l'Autore ad ammettere la esistenza, come impurità, di un toluene più che bisostituito.

(*) Noto incidentalmente che più tardi preparai il cloruro di parabromobenzile trattando con acido cloridrico l'alcool parabromobenzilico (*Gazz. Chim. Ital.* 18, 236).

Digitized by Google

Dato un composto il quale contenga su cento parti in peso c di cloro e b di bromo, il composto che ne risulta sostituendo nella molecola al cloro una quantità equivalente di bromo, conterrà una quantità x percentuale di bromo data dalla formula (*).

$$x = \frac{35,5\, b + 80\, c}{35,5 + 0,445\, c}$$

Ora sostituendo in questa formula a c successivamente i valori 7,6 — 8,01 — 13,8 — 7,9 trovati dall'Autore pel cloro totale, e a b i valori corrispondenti del bromo 51,99 — 51,69 — 43,4 — 50,76 si trovano per x i seguenti valori;

p. f.	52°	x = Br %	=	63,10
»	58-59°	»	»	63,38
»	36°	»	»	63,99
»	52°	»	»	62,37.

La teoria pel bromuro di parabromobenzile richiede una quantità un po' maggiore di bromo, cioè

$$\mathrm{Br} = 64\ \%.$$

Come si vede il calcolo esatto conduce ad un risultato diametralmente opposto a quello ottenuto da Srpek, anzi i numeri calcolati differiscono abbastanza poco dalla teoria perchè si possano considerare come una prova della non esistenza di derivati superiori ai bialogenici. Del resto nell'ipotesi che vi sia realmente cloro nel nucleo, nulla di più facile che immaginare un miscuglio di bromuro di parabromobenzile, bromuro di paraclorobenzile e cloruro di paraclorobenzile il quale soddisfi ai risul-

(*) Infatti la quantità q di bromo equivalente a c di cloro è uguale a $\frac{80c}{35,5}$; ma in seguito a questa trasformazione le 100 parti del composto clorobromurato sono diventate $100 + q - c$ del composto bromurato, per avere quindi il per cento totale di bromo x bisognerà ricorrere alla proporzione $q + b : 100 + q - c = x : 100$.

Risolvendo rispetto ad x e sostituendo a q il suo valore $\frac{80c}{35,5}$ si ottiene:

$$x = \frac{100\left(\frac{80c}{35,5} + b\right)}{100 + \frac{80c}{35,5} - c}$$

cioè la formula del testo.

Digitized by Google

tati ottenuti dall'Autore senza bisogno di ricorrere a derivati alogenici superiori. Per esempio nel caso dei cristalli fondenti a 52° si ha per un miscuglio di

bromuro di parabromobenzile	74,59
bromuro di paraclorobenzile	10,92
cloruro di paraclorobenzile	14,49
	100,00

		trovato %		calcolato %	
Br	metile	28,12	51,99	28,12	51,99
	fenile	23,87		23,87	
Cl	metile	3,19	7,60	3,19	8,27
	fenile	4,41		5,08	

Ed ora che credo dimostrata la presenza esclusiva di derivati bialogenici del toluene, passiamo a discutere la seconda questione, quella cioè che riguarda la esistenza, o meno, del cloro nel nucleo.

Nel mio precedente lavoro, per quanto riguarda l'analisi dei prodotti, m'era limitato alla determinazione del cloro e del bromo totale arroventando la sostanza con calce, ed avea escluso la presenza del cloro dal nucleo, solo pel fatto di non aver potuto trovare tra i prodotti di ossidazione l'acido paraclorobenzoico. Siccome questo metodo di ricerca non è suscettibile di una grande esattezza, potendo facilmente sfuggire piccole quantità dell'acido, e poichè dalle analisi di Srpek risulta precisamente il contrario di quanto asserii, ho giudicato opportuno fare l'analisi completa di un prodotto ben cristallizzato fondente a 49° e ottenuto bromurando a freddo il cloruro di benzile nelle condizioni descritte nella mia precedente Memoria, e cristallizzando una sola volta dall'alcool la massa solida spremuta al torchio.

La determinazione degli alogeni nella catena laterale fu fatta aggiungendo a pochi decigrammi della sostanza da analizzare sciolti nell'alcool, un eccesso di soluzione alcoolica di nitrato di argento (1 parte di nitrato d'argento, 10 d'alcool al 75 %) facendo ricadere per alcune ore nell'oscurità, raccogliendo sopra un filtro il miscuglio dei sali alogenici dell'argento, lavandolo con alcool, quindi con acqua, e pesandolo in crogiuolo prima e dopo d'aver riscaldato in una corrente di cloro (*).

(*) La soluzione alcoolica dalla quale furono separati il bromuro ed il

Digitized by Google

La quantità totale degli alogeni fu determinata arroventando la sostanza con calce. Si ebbero i risultati seguenti:

gr. 0,9347 di sostanza fatti bollire con nitrato d'argento in soluzione alcoolica diedero gr. 0,6699 di cloruro e bromuro di argento e gr. 0,0063 di argento metallico. La perdita di peso avuta nel trasformare in cloruro il miscuglio dei sali d'argento fu di gr. 0,0825.

E in cento parti

	nella catena laterale
Cl	8,63
Br	16,07

gr. 0,4474 di sostanza dopo arroventamento con calce diedero gr. 0,6718 di cloruro e bromuro d'argento e gr. 0,0153 di argento metallico. La perdita di peso notata nel trasformare in cloruro il miscuglio dei sali d'argento fu di gr. 0,1241.

E in cento parti

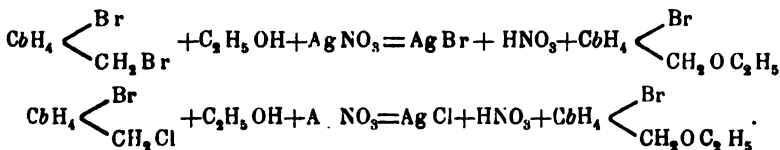
	totale
Cl	8,49
Br	51,68.

Dai risultati delle due analisi si deduce che nella sostanza da me analizzata non v'è assolutamente cloro nel nucleo poichè la differenza riscontrata tra la quantità di cloro nella catena laterale 8,63 e quella totale 8,49 cade nei limiti d'errore di esperienza e si può considerare come nulla. È poi facile calcolare che per un miscuglio di 49,5 parti di cloruro di parabro-

---

cloruro d'argento, per aggiunta d'acqua lascia depositare un liquido pesante, costituito a quanto pare da etere parabromobenziletilico impuro di nitroprodotti, formatosi in virtù delle equazioni

$$C_6H_4 <^{Br}_{CH_2Br} + C_2H_5OH + AgNO_3 = AgBr + HNO_3 + C_6H_4 <^{Br}_{CH_2OC_2H_5}$$

$$C_6H_4 <^{Br}_{CH_2Cl} + C_2H_5OH + A\ NO_3 = AgCl + HNO_3 + C_6H_4 <^{Br}_{CH_2OC_2H_5}.$$

Infatti esso distilla alla temperatura di circa 240° e dà per trattamento con acido nitrico (vedi « Azione dell'acido nitrico e del calore sugli eteri »), una sostanza solida cristallizzata volatile col vapor d'acqua la quale, benchè fonda a temperatura un po' bassa è probabilmente aldeide parabromobenzoica. Ad ogni modo arroventandone con calce una certa quantità non pesata ho ottenuto *esclusivamente* bromuro di argento senza traccia di cloruro.

Digitized by Google

mobenzile e 50,5 di bromuro di parabromobenzile, la teoria concorda assai bene colle quantità di cloro e di bromo determinate sperimentalmente. Si ha infatti prendendo per il cloro nella catena laterale la media dei due numeri 8,63 e 8,49:

	trovato		calcolato per $\left\{ \begin{array}{l} 49,5\ C_6H_4\ Br\ CH_2Cl \\ 50,5\ C_6H_4\ Br\ CH_2Br \end{array} \right.$	
	nucleo	catena laterale	nucleo	catena laterale
Cl	——	8,56	——	8,55
Br	35,61	16,07	35,42	16,16

Tale risultato che conferma le asserzioni della mia precedente Memoria è nel tempo stesso in piena armonia colle esperienze di ossidazione fatte da Srpek medesimo. Anch'egli, come me, non trova tra i prodotti di ossidazione che l'acido bromobenzoico, risultato questo che male si potrebbe spiegare coll'esistenza del cloruro di paraclorobenzile, e in generale d'un prodotto clorurato nel nucleo. Non risulta dalla Memoria dell'Autore quali delle porzioni egli abbia ossidato, se tutte od alcune soltanto, ad ogni modo anche le porzioni meno ricche in cloro nel nucleo, sempre secondo le analisi di Srpek, come quelle fondenti da 50°-60°, dovrebbero dare un miscuglio di acidi contenente circa il 75 % d'acido parabromobenzoico, ed il 25 % di paraclorobenzoico, nè mi pare probabile che una quantità tale di quest'ultimo acido sia sfuggita a chi aveva tutto l'interesse a rintracciarlo. Non parliamo poi dei cristalli fondenti a 36° che dovrebbero dare come prodotto principale di ossidazione l'acido paraclorobenzoico.

Questa contraddizione tra le esperienze di ossidazione e le analisi dello Srpek non si può spiegare che ammettendo un errore o nelle une, o nelle altre. Che se le analisi sono esatte, rimane però sempre la divergenza colle mie e allora è giuocoforza ammettere, benchè il fatto appaia poco probabile, che le piccolissime diversità nel modo di operare la bromurazione del cloruro di benzile, abbiano fatto sì che nei cristalli analizzati da Srpek il cloro sia entrato nel nucleo, in quelli analizzati da me e che fondono presso a poco alle medesime temperature, non sia entrato. Srpek per 100 grammi di cloruro di benzile, ne adopera 5 di iodio, opera allo scuro e molto più lentamente di me, perchè impiega 36 ore ad aggiungere la quantità teorica di bromo, lascia poi il liquido a sè stesso per 12 ore, finchè cioè il colore rosso sia quasi scomparso; io aggiungo 10 grammi di iodio, opero

Digitized by Google

alla luce diffusa e dopo versato il bromo (operazione che dura al più due ore) lascio in riposo il liquido per alcune ore prima di sottoporlo ad ulteriori trattamenti.

Dove è più naturale attendersi una diversità nei risultati è nel clorurare il parabromotoluene, poichè lo Srpek opera sotto l'influenza della luce diretta, io sotto quella del calore; del resto in questo caso io fondo la mia opinione sulla non esistenza del cloro nel nucleo soltanto sul non aver ottenuto nella ossidazione acido paraclorobenzoico, il che non esclude a rigore la presenza di piccole quantità di cloro nel nucleo, e di più io non ho mai studiato un prodotto fondente a così bassa temperatura come quello analizzato da Srpek p. f. 36°, nel quale prodotto è da presumersi come più probabile la esistenza del cloruro di paraclorobenzile.

Riassumendo io credo di poter asserire che nei prodotti solidi da me ottenuti bromurando il cloruro di benzile non v'ha certamente cloro nel nucleo, e che in quelli preparati clorurando a caldo il parabromotoluene è probabile non ce ne sia neppure, o almeno, se pur ve n'è, soltanto in piccola quantità. Non escludo con ciò che le porzioni liquide, o quelle fondenti a bassissima temperatura, non possano contenere cloruro di paraclorobenzile, anzi credo probabile che sì.

Srpek alla fine della sua Nota, supponendo dimostrata l'esistenza del cloruro di paraclorobenzile, e del bromuro di parabromobenzile, fa alcuni ragionamenti intorno al modo probabile di procedere della reazione; io credo prematura qualsiasi ipotesi, tanto più che, essendo gli alogeni nella catena laterale molto debolmente legati al rimanente della molecola (il nitrato d'argento alcoolico li elimina già a freddo), possono benissimo entrare in giuoco anche gli idracidi che si formano nel processo della bromurazione e della clorurazione. Per uno studio completo della reazione, la prima cosa a farsi sarebbe di analizzare i gaz che si svolgono; non è improbabile ad esempio che nel bromurare il cloruro di benzile il cloro scacciato dalla catena laterale, anzichè entrare completamente nel nucleo, si possa eliminare in parte sotto forma di acido cloridrico, che sarebbe facile constatare e dosare in mezzo all'acido bromidrico che si va sviluppando.

Torino, Laboratorio di Chimica della R. Università.

Digitized by Google

Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei Mammiferi

per il dott. ROMEO FUSARI

Il modo di terminare dei fasci nervosi che fanno capo ai corpi surrenali, malgrado le più attive ricerche fatte fino a questi ultimi tempi, è rimasto tuttavia nella più completa oscurità. Se noi infatti trascorriamo la ricca letteratura risguardante la struttura degli organi surrenali troviamo tutto al più fatta menzione della maniera di comportarsi dei fascetti nervosi nel contesto dell'organo. Circa al contegno delle fibre rispetto agli elementi, a nessuno fu dato di poterlo studiare, e se LEYDIG (1) considera tutte le cellule della sostanza midollare come elementi gangliari nervosi, ciò non di meno la connessione diretta di tali cellule colle fibre nervose è solo da esso sospettata. E precisamente egli si esprime così: « Da nun diese im Marke sich verbreitenden « Nerven nicht mehr aus demselben heraustreten und ferner die « zellige Elemente des Markes die Natur von multipolaren Gan- « glienzellen an der Tag liegen, so darf man vermuthen, dass « die Nervenfasern aus den Ganglienkugeln entspringen; und somit « das Mark der Nebennieren als ein gangliöses Nervencentrum « wirkt. Naturlich kann nur von der specifisch nervöser Natur « des Markes die Rede sein, vahrend die rein fetthaltige Rinde « mit einer anderen Function betraut sein mag ».

Dopo LEYDIG GOTTSCHAU (2) è il solo che asserisce d'aver

---

(1) I. LEYDIG, *Leherbuch der Histologie des Menschen und der Thiere.* Frankfort a. M. 1857.

(2) M. GOTTSCHAU, *Structur und embryonale Entwickelung der Nebennieren bei Sangethieren.* Archiv für Anat. und Physiol. Annata 1883.

Digitized by Google

veduto una connessione delle fibre nervose coi prolungamenti delle cellule nervose, le quali, secondo l'Autore, unite in gruppi di vario numero costituirebbero dei gangli in mezzo alla sostanza midollare delle capsule. Queste cellule gangliari abbondantissime nell'uomo, nella pecora, e nel bue, sarebbero rare nel riccio, nella faina e nella lontra, e mancherebbero totalmente nel coniglio. Riguardo al rapporto degli elementi nervosi colle cellule del parenchima non se ne fa parola.

Se così poco finora si era ottenuto, si deve alle grandi difficoltà che si incontrano nello studio dei corpi surrenali. Uno fra gli ostacoli più gravi è dovuto alla estrema alterabilità degli elementi, la quale massime coll'impiego del cloruro d'oro, fatto allo scopo di mettere in evidenza i filamenti nervosi, conduce fino allo spappolamento del tessuto. Il metodo dell'oro fu perciò anche da me tentato inutilmente sul principio delle mie ricerche, poscia fu abbandonato, e fu fatto invece ricorso alla reazione nera del Golgi, la quale anche in teoria rispondeva alle condizioni più favorevoli per una delicata ricerca, avvegnachè per essa si ha un'ottima fissazione degli elementi, e con essa è possibile l'osservazione miscroscopica anche su tagli piuttosto spessi. I migliori risultati li ho ottenuti usando del metodo così detto rapido, cioè immergendo direttamente i pezzi freschi nella miscela osmio-bicromica, dalla quale dopo un'immersione prolungata da tre a dieci giorni i medesimi venivano portati per uno o due giorni nel nitrato d'argento in soluzione all'1 per cento.

Oltre a ciò, non ho trascurato altri metodi di preparazione. Così ho tentata la reazione vitale di Ehrlich all'azzurro di metilene, ed i risultati ottenuti, sebbene molto parziali, mi furono tuttavia utili, perchè mi servirono di controllo agli altri ottenuti col metodo di Golgi. Ho fatto anche numerose preparazioni colorando coi mezzi ordinarii (carminio, ematossilina, ecc.) corpi surrenali stati preventivamente fissati sia nei liquidi cromici sia nel liquido di Kleinenberg. I mammiferi su cui si estesero le mie ricerche furono: l'uomo (neonato), il sorcio *(mus musculus)*, il ratto *(mus decumanus)*, il coniglio, il maiale, il gatto (neonato), e la capra (giovane).

I fasci di nervi che fanno capo alle ghiandole soprarenali, fatta proporzione colla grandezza di questi organi sono oltremodo numerosi. Questo fatto attirò ben presto l'attenzione degli anatomici, e Wharton, atteso questo intimo rapporto coi nervi,

Digitized by Google

chiamò le capsule surrenali *glandulae ad plexum* (1). NAGEL (2) trovò che i nervi provengono dal plesso celiaco e dal plesso renale, e BERGMANN (3) aggiunse che una piccola parte provengono anche dal vago e dal frenico. KÖLLIKER (4) annoverò per ben 33 piccole branche nervose per la capsula surrenale destra dell'uomo, e SAPPEY (5) confermò senza citarle le osservazioni di BERGMANN nel senso che pur egli vide il pneumogastrico destro fornire alle capsule un ramo abbastanza voluminoso.

I fasci nervosi per la massima parte provengono dal plesso solare, e si mettono in rapporto colle ghiandole surrenali, accostandovisi per la parte interna. Sulla membrana involgente di questi organi formano già un plesso in cui non è raro trovare dei piccoli gangli nervosi; altri ganglietti stanno nello spessore stesso dell'involucro membranoso, e spesse volte anche immediatamente sotto.

Non tutti i fasci nervosi che toccano la capsula entrano nell'organo, e neppure quelli che entrano si distribuiscono tutti nel medesimo. Alcuni pochi fasci infatti dopo essersi accostati alla capsula e dopo essersi messi in rapporto colla sua membrana involgente se ne allontanano di nuovo. Altri, molto più rari, giungono a penetrare fino nella sostanza corticale, ma poi cambiando direzione fuorescono di nuovo. Questa particolarità fu già notata da BERGMANN, il quale dice: *Passim unus vel plures horum nervorum per marginem glandulae suprarenalis transeunt, ex parte altera rursus procedunt, atque ad ganglion semilunare rursus redeunt ita ut annulo comparari possint auricolari, qui nonnumquam tam laxus est ut rursum et retrorsum trahi possit.* La stessa particolarità fu poi constatata da GOTTSCHAU nel gatto, e da me venne confermata nello stesso animale.

Il maggior numero però dei fasci nervosi dopo un decorso più o meno lungo nell'involucro connettivo penetrano perpendicolarmente alla superficie nella sostanza corticale, e si approfondano nella medesima fino a raggiungere la sostanza midollare.

---

(1) BARTOLINI, *Anatomia Bartholiniana.* Lugduni 1684, pag. 188.

(2) NAGEL, *Ueber die Structur der Nebennieren.* Archivio di Müller, 1836.

(3) C. BERGMANN, *Dissertatio de glandulis suprarenalibus.* Gottingen, 1839.

(4) A. KÖLLIKER, *Handbuch der mikroskopischen Anatomie.* Leipzig, 1854, pag. 386.

(5) SAPPEY, *Traité d'Anatomie descriptive.* Paris 1873. Tomo IV, p. 565.

Digitized by Google

Facendo eccezione di Nagel, tutti gli altri osservatori hanno sostenuto che la sostanza corticale delle capsule è priva di nervi. Invece io ho notato che tale sostanza ne è sufficientemente provveduta. In primo luogo quasi ciascun capillare sanguigno è accompagnato per lo meno da un sottilissimo filamento nervoso, inoltre si vedono altre fibre nervose che decorrono obliquamente senza tenere alcun rapporto coi vasi. Queste fibre provengono o dalla membrana involgente o dalla sostanza midollare, più di rado dai fasci nervosi da cui la sostanza corticale è attraversata, e vanno a terminare sia nella zona glomerulare, sia nella zona fascicolata senza presentare altra particolarità.

I fasci nervosi che attraversano le citate due zone corticali giunti nella zona reticolare cominciano solo allora a biforcarsi, e le divisioni, per lo più dicotomiche, si ripetono in seguito numerose volte nella sostanza midollare. Il modo di comportarsi di questi fasci fu esattamente descritto da Taruffi (1). Questo osservatore riferisce che detti fasci si dividono in rami e ramoscelli a guisa delle arterie, colla differenza però che i rami mandano nuove diramazioni che si uniscono colle divisioni vicine costituendo archi ed anse. Simile contegno è tenuto anche dai piccoli ramoscelli, i quali possono nascere tanto dai tronchi che dai rami principali, oppure sono una suddivisione dei rami nervosi minori. Io aggiungerò che in nessun luogo altrove ho potuto constatare una irregolarità di decorso delle fibre nervose come nelle capsule surrenali. Ho notato certi contegni così strani che sfuggono a qualunque descrizione. Alcune volte il fascio nervoso si biforca e comprende nella biforcazione un gruppo di cellule midollari, poi le due branche si ricongiungono di nuovo. Altre volte è un solo fascettino composto di due o tre fibre nervose che si allontana dal tronco e fa un lungo giro ondulato fra i lobuli della sostanza midollare per tornare poi vicino al punto di partenza. Le anastomosi e gli incrociamenti dei fascetti nervosi sono così frequenti che nei preparati bene riusciti a piccolo ingrandimento si vede in tutta la sostanza midollare un esteso plesso con fibre nervose irregolarmente distribuite, dove più, dove meno sviluppato, dove formante reti a grandi maglie, dove stretti reticoli. Le maglie più grandi sono occupate dai cordoni di cellule midollari, le maglie più piccole

---

(1) C. Taruffi, *Sulla struttura delle capsule surrenali.* Bollettino delle Scienze mediche di Bologna. Vol. 2, 1866.

Digitized by Google

sono occupate da una o poche cellule midollari, oppure da un vaso. Nella figura 1ª della tavola ho disegnato tutta una sezione della sostanza midollare dei corpi surrenali di topo ed in questa vedesi un grosso fascio che penetra e si dirama. Naturalmente per farsi un' idea più esatta della maniera di comportarsi dei nervi fa d'uopo esaminare più sezioni disposte in serie, perchè le branche nervose ed in particolar modo i rami secondari occupano successivamente piani molto diversi.

Le fibre nervose di un fascio non hanno fra loro un decorso parallelo. Inoltre l'andamento di ciascuna fibra non è rettilineo, ma a curve più o meno strette ed irregolari, e però le varie fibre del fascio si accavallano e si intrecciano fra loro formando una specie di rete a maglie allungate. Molto spesso si incontrano anche anastomosi fra fibra e fibra, particolarità che è nota per i fasci nervosi appartenenti al sistema del simpatico. Tale contegno delle singole fibre nel fascio nervoso è in certo modo paragonabile a quello che tengono i diversi fascetti nervosi nella sostanza midollare, e si potrebbe dire che questo non è che una esagerazione di quello.

Un'altra particolarità presentata dalle fibre dei fasci è che ben di rado si possono ottenere colorate perfettamente in nero colla reazione di Golgi; d'ordinario, ed in ispecial modo le più grosse, si colorano solo in bruno nerastro (fig. 1, 2, 3); solo alcune mostrano un contorno più nero molto distinto.

Tanto i fasci nervosi principali come i piccoli rami racchiudono cellule nervose. Il numero di queste varia a norma degli animali; più frequenti sono nel coniglio, stanno in minor quantità nella capra, e piuttosto scarse si presentano nel sorcio. Nelle figure 2 e 3 sono riportati alcuni di tali fasci nervosi racchiudenti cellule di varia dimensione, da 8 a 30 micromillimetri. Queste cellule sono fusate o sferiche. Le cellule fusate hanno due prolungamenti, quelle sferiche anche, ma ne possono possedere uno solo, almeno ciò mi fu dato di constatare in molti casi. Quando queste ultime cellule posseggono due prolungamenti, d'ordinario l'uno è robusto, l'altro sottile; il primo in tal caso continuasi colle fibre del fascio; il secondo si fa divergente ed entra nel parenchima midollare dell'organo. È verosimile che tutte le cellule posseggano più d'un prolungamento, e che nei casi in cui ne appare solamente uno solo, ciò si debba alla mancata reazione sul prolungamento più piccolo. Altre cellule hanno più

Digitized by Google

di due prolungamenti; così nella figura 3 è disegnata una cellula con tre prolungamenti, ed un'altra più piccola con quattro.

Le cellule nervose possono trovarsi anche su ciascun lato dei fasci nervosi, e ciò si verifica specialmente nel coniglio (fig. 2 *c*). Queste cellule si ravvicinano per lo più alla forma sferica e posseggono due prolungamenti di diverso diametro: il più robusto va a raggiungere le fibre del fascio, il più sottile entra nel parenchima.

Altre cellule nervose poligonali con prolungamenti ramificati (fig. 1, fig. 8 *c*) si riscontrano, sebbene più raramente, lungo il decorso dei più fini fasci o delle fibre nervose isolate decorrenti fra i cordoni della sostanza midollare. Queste cellule sono unite alle fibre per uno solo dei loro prolungamenti, il quale come gli altri può portare delle divisioni.

Oltre le cellule nervose, che colla reazione di Golgi appaiono completamente nere, si vedono nei diversi fasci altri corpi similmente colorati, ai quali per ragione della loro piccolezza non potrebbesi dare altro significato che quello di semplici varicosità o di rigonfiamenti della fibra nervosa. Non è raro vedere alcuni di questi corpiciattoli interporsi fra due fibrille nervose decorrenti parallelamente e servire così come mezzo di anastomosi fra le medesime.

In mezzo alle maglie del descritto plesso nervoso, vale a dire fra gli elementi dei cordoni della sostanza midollare rilevansi altre interessanti particolarità. Rami numerosi che si staccano dalle fibre nervose del plesso si aggiungono ai sottili prolungamenti delle cellule dianzi descritti, e penetrano fra le cellule dei cordoni, dove si dividono e si suddividono in fine fibre varicose. Il modo di comportarsi di queste divisioni varia notevolmente. Alcune volte queste costituiscono un fascetto, che termina come un pennello, altre volte le fibre presentano un piccolo rigonfiamento conico dalla cui base partono ramificazioni dicotomiche, e le fibrille che ne risultano si anastomizzano in parte fra loro (fig. 9). Invece in altri luoghi anche dello stesso preparato (fig. 1) si possono vedere filamenti terminanti in una pallina od in un dischetto, oppure in un corpuscolo provveduto di prolungamenti sottilissimi ramificati che terminano in alcuni casi in modo netto, ed in altri finiscono in una serie di punteggiature mal definite, quasi che i filamenti stessi si estendessero a formare una sottile membranella (fig. 1 *e*).

Digitized by Google

Ma si possono avere anche immagini molto più interessanti. In questi casi i filamenti che decorrono attorno ad un gruppo di cellule midollari ad un tratto si dividono, e formano un reticolo con punti nodali discoidali o formati da placchette poligonali, il quale reticolo veduto a piccolo ingrandimento prende la forma di un grossolano gomitolo, mentre esaminato con forti ingrandimenti appare in forma di una sfera cava più o meno ampia, più o meno regolare e completa. Vari filamenti attraversano in diversi sensi la cavità della sfera dividendola in tanti scompartimenti. Nelle figure 4, 5, 6 io ho cercato di dare un'idea di simile modo di terminare delle fibre nervose. Nelle figure 4 e 6 i rigonfiamenti nodali sono a forma di disco, nella figura 5 sono a forma di laminette poligonali.

Nell'ultimo periodo di queste mie ricerche, ho ottenuto preparati ancora più istruttivi. Contemporaneamente ad un reticolo finissimo ebbi colorati in rosso-bruno anche gli elementi midollari (fig. 7); così mi restava accertato ciò che nella mia Nota preventiva (1) aveva solamente potuto sospettare, cioè che ciascun gruppo di elementi midollari è contenuto in un reticolo nervoso i cui punti nodali, variabili di forma e grandezza si appoggiano sul corpo degli stessi elementi. Per i filamenti interni del reticolo ogni singola cellula resta in rapporto cogli elementi nervosi. Le figure 4, 5, 6 rappresentano perciò tante specie di cestelli destinati a contenere ciascuno un gruppo di cellule midollari.

Per questi risultati resta anche molto probabile che le terminazioni dianzi descritte a soli filamenti liberi od a rare anastomosi, come pure le terminazioni in placchette ed in corpuscoli stellati isolati non siano che un prodotto artificiale dovuto ad una reazione parziale, vale a dire del reticolo in questi casi si sarebbero colorati solo certi filamenti e certi punti nodali.

È noto che i varii cordoni cellulari della sostanza midollare delle capsule surrenali mostrano una diversità di contegno rispetto all'acido cromico ed ai suoi sali, perchè mentre questi reattivi colorano in bruno carico le cellule di alcuni cordoni, producono invece solo una lieve tinta nelle cellule degli altri

(1) R. Fusari, *Osservazioni sulle terminazioni nervose e sullo sviluppo delle capsule surrenali*. Rendiconto della R. Accademia dei Lincei. Classe di sc. fis. mat. e nat. Vol. VI. 1° Sem. fasc. 11, 1890.

Digitized by Google

cordoni. Ora riguardo alla distribuzione dei nervi queste due specie di gruppi cellulari non presentano alcuna differenza; ho notato solo che la reazione nera talora si verifica a preferenza sui gruppi delle cellule brune, talora sulle cellule chiare, e ciò a seconda delle diverse condizioni dell'esperimento. Quindi al differente contegno chimico dei varî cordoni cellulari non deve attribuirsi verosimilmente altro significato che quello di una manifestazione di un diverso stato di attività funzionale. Ed in vero, come già fece osservare Gottschau, fra le cellule dei due gruppi esistono molte forme di passaggio.

È noto anche che nei feti e nei neonati il midollo delle capsule surrenali presenta spesso dei cordoni in cui le cellule non appaiono limitate fra loro, di modo che sembrano formati da accumuli di nuclei immersi in un protoplasma comune. Spesso questi accumuli nucleari si possono accompagnare per buon tratto anche attraverso la sostanza corticale lungo le linee in cui questa è attraversata dai fasci di fibre nervose. Ebbene la reazione nera applicata sulle capsule surrenali dei neonati fa dimostrare l'intimo rapporto che questi cordoni di cellule apparentemente indivise hanno colle fibre nervose. Nel gatto neonato io ottenni colorato in nero il fascio nervoso attraversante la sostanza corticale, il quale andava poi a disperdersi in totalità in mezzo ai nuclei. Più davvicino non si potevano seguire i filamenti nervosi perchè anche il protoplasma dei cordoni aveva preso una tinta rosso-bruna carica.

In un altro preparato delle stesse capsule di neonato ottenni la terminazione dei nervi in un cordone cellulare già differenziato. In questo cordone molte cellule si sono colorate in bruno e quindi si sono fatte ben evidenti. Due fibre nervose entrano fra le medesime e suddividendosi distribuiscono molti filamenti che vanno a metter capo alle nominate cellule, così nell'insieme la immagine rassomiglia ad un grappolo nel quale le cellule rappresentano gli acini (fig. 8). I filamenti nervosi terminano sulla superficie della cellula espandendosi in modo non ben netto. Si vedono vicino alle estremità loro molte punteggiature e fili sottilissimi e brevi, particolarità dalle quali si può sospettare l'esistenza sulla superficie cellulare di un indeterminato finissimo reticolo. Dove gli elementi cellulari non riescono colorati appare solo distinta la fibra nervosa colle sue diramazioni terminali. La figura 9, che riproduce questa particolarità, fu presa dallo

Digitized by Google

stesso preparato da cui fu ricavata la figura 8; confrontando le due figure fra loro si può facilmente convincersi che la seconda immagine è dovuta ad una reazione parzialmente riuscita.

Come ho già accennato in principio, da me fu tentata sulle capsule surrenali anche la reazione al *bleu* di metilene di Ehrlich. Nei risultati molto parziali che ho ottenuti ebbi colorate un buon numero di fibre nervose ed anche alcune diramazioni terminali nella sostanza midollare. Solo parecchie di queste finivano in una specie di espansione più o meno estesa fatta da minute punteggiature od a membrana mal definita. Ho riportate alcune di così fatte terminazioni nella figura 10; esse si possono molto bene mettere a riscontro colle altre ottenute mediante la reazione nera.

Usando la reazione del Golgi, e specialmente procedendo col metodo lento, vale a dire facendo precedere all'immersione nella miscela osmio-bicromica l'indurimento del pezzo in bicromato di potassio, si possono ottenere colorati nei corpi surrenali anche i vasi, le cellule connettive, e le fibro-cellule muscolari.

Quanto ai *vasi*, nulla ho da aggiungere a quanto si pose già in evidenza mediante le iniezioni. Mi sono riuscite anche le figure alate descritte da Guarnieri e Magini (1) nella sostanza reticolare, e ottenute pure collo stesso metodo. Queste non mi sembrano che espressione di un finissimo plesso di fibre connettivali che serve di sostegno all'endotelio, il quale plesso penetra anche in forma di esili lamine fra i diversi gruppi di cellule parenchimali separandoli fra loro.

Oltre di ciò nello stroma di sostegno della ghiandola trovasi un gran numero di *cellule connettivali*. Nella sostanza corticale, e specialmente nella zona fascicolata, le cellule connettive prendono per lo più la forma di fuso col massimo asse disposto in senso radiale. I prolungamenti che si partono in vario numero da qualsivoglia punto della superficie di tali cellule servono a connettere le stesse cellule fra loro ed a delimitare i cordoni formati dagli elementi epiteliali. E precisamente accade che coi prolungamenti degli apici le cellule si mettono in rapporto con

(1) G. Guarnieri e G. Magini, *Studi sulla fine struttura delle capsule suprarenali*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Classe di Sc. fis. mat. e nat. Vol. IV, 1° Sem., Serie 4ª, 1888.

Digitized by Google

quelle soprastanti e sottostanti, e coi prolungamenti che partono dal corpo delimitano lateralmente il cordone e si mettono in rapporto colle cellule connettivali che stanno dalla parte opposta del cordone medesimo. Nella figura 11 in *b* ho disegnato un gruppo di tali cellule vedute secondo la loro lunghezza, in *c* altre cellule simili sezionate trasversalmente. In *d* poi ho riportata la figura di altri due elementi connettivali assai appiattiti che riuscirono colorati in bruno e che terminano in espansioni membraniformi. Le cellule *b* e *c* furono ricavate dal sorcio, le *d* dall' uomo, e queste ultime fanno passaggio a quelle riportate nella figura 12 *a* appartenenti alla zona fascicolata della sostanza corticale delle capsule di maiale. Tali cellule sono estese in superficie e sono conformate a doccia. In esse si vedono i nuclei anneriti da cui partono dei prolungamenti ramificati che corrispondono forse a nervature protoplasmatiche che si sono annerite. La conformazione a doccia si vede meglio nella figura 12 *b*, in cui una serie di simili cellule stanno giustapposte fra loro per i margini a guisa di un endotelio, e compongono un semicanale. I limiti fra le diverse cellule non appaiono distinti.

Nella zona reticolare le cellule connettive sono numerosissime, piccole, stellate ed anastomizzate fra loro. Nella sostanza midollare le cellule connettive sono assai irregolari, ora grosse specialmente in prossimità ai vasi, ora sottili lamellari con molti prolungamenti (fig. 11 *a*), ora fusiformi molto allungate

Le *fibre muscolari liscie* furono da me ottenute nella membrana connettiva della capsula; esse si fanno notare specialmente per il grande numero di divisioni presentate dal loro apice.

Da questo mio studio appare ben evidente la differenza circa la distribuzione delle fibre nervose fra le cellule del parenchima midollare e quelle del parenchima corticale. Oltre alla enorme disparità nel numero delle fibre che si diramano rispettivamente a questo ed a quello, vi ha anche una grande diversità nel modo di terminare delle medesime mancando nelle cellule corticali l'intimo rapporto colle estremità nervose che esiste nelle cellule midollari. Questo fatto può trovare una spiegazione nelle antiche dottrine embriologiche le quali ammettono che la sostanza midollare delle capsule derivi dall'abbozzo del simpatico, mentre la sostanza corticale proverrebbe dal mesoderma. Queste

Digitized by Google

dottrine essendo state poste in dubbio da alcuni recenti osservatori (GOTTSCHAU, IANOSIK, MIHALKOVICH, VALENTI, ciò fu cagione di altre mie ricerche a cui ho già accennato nella citata mia Nota preventiva e che saranno ben presto oggetto di un'altra pubblicazione. Da tali ricerche io come gli antichi autori fui tratto a conchiudere che gli abbozzi delle capsule surrenali hanno una doppia derivazione e che gli elementi provenienti dal simpatico entrano a formare la sostanza midollare. Però non sono riuscito a stabilire se questa sostanza, almeno nei mammiferi, sia formata esclusivamente dagli ultimi elementi, e quindi rimane ancora la questione se tutti gli elementi midollari abbiano ugual valore, ed in caso negativo quali fra i medesimi appartengono al simpatico e quali meno.

Ora i risultati del presente mio studio possono, benchè indirettamente, sciogliere tale questione?

Io sono inclinato a dare a questa domanda una risposta affermativa, perchè tutti gli elementi del parenchima midollare avendo eguali rapporti colle fibre nervose, ciò fa supporre che essi debbano avere egual valore sì fisiologico che morfologico. A ciò si devono anche aggiungere le seguenti considerazioni.

Se noi trascorriamo la letteratura risguardante l' argomento che ci occupa, troviamo le più aperte contraddizioni nelle interpretazioni che si fanno riguardo alle cellule della sostanza midollare; da LEYDIG che le considera tutte come nervose, andiamo fino ad ARNOLD (1) il quale mette in dubbio la presenza di cellule nervose anche isolate. Certi elementi dagli uni considerati come gangliari, da altri non sono affatto riconosciuti. Così il numero dei gangli nervosi e delle cellule nervose che si troverebbero nella sostanza midollare varia immensamente per lo stesso animale da autore ad autore. Ad esempio mentre HOLM (2) e DOSTOJEWSKY (3) trovarono nella sostanza midollare delle capsule del coniglio molte cellule nervose disposte a piccoli

---

(1) I. ARNOLD, *Ein Beitrag zu der feineren Structur und zum Chemismus der Nebennieren*. Archiv für path. Anat. und Phys., Bd. XXXV, 1866.

(2) HOLM, *Ueber die nervösen Elemente in der Nebennieren*. Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss. 1866.

(3) A. DOSTOIEWSKY, *Ein Beitrag zur mikroskopischen Anatomie der Nebennieren bei Saugethieren*. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 27, 1886.

Digitized by Google

gruppi, Gottschau al contrario non ne potè trovare in detto animale, trovò invece un'enorme ricchezza di gangli nervosi nel vitello, il quale animale diede per contro al Taruffi risultati completamente negativi. Per Ciaccio (1) la sostanza midollare è composta di cellule le quali se non tutte almeno in gran parte hanno caratteri tali da farle considerare come cellule ganglionari; per Moers (2) invece la sostanza corticale e la sostanza midollare sono formate dagli stessi elementi, le cellule nervose si presentano solo come rigonfiamenti dei nervi. Brunn (3) considera le cellule brune midollari come elementi nervosi; Holm ne fa a sua volta un gruppo a parte chiamandole elementi di natura nervosa dubbia (*Zellen von Zweifelhaft nervöser Natur*); Bbaun (4) le considera come forme di passaggio fra queste e le altre cellule del parenchima midollare. Basteranno, io credo, le citazioni fatte ed i fatti con esse addotti per trarre la conclusione che nella sostanza midollare dei corpi soprarenali oltre al trovarsi cellule che ricordano perfettamente per il loro aspetto gli elementi dei vicini gangli simpatici, ne esistono altre che non vi somigliano affatto, ma che fra le une e le altre vi sono forme che hanno in pari tempo i caratteri di amendue, le quali forme sono più o meno numerose a seconda degli animali, e molto probabilmente anche secondo l'età di questi ed i periodi di attività o di riposo della ghiandola. Da questa sola particolarità deriverebbe la grande diversità di giudizi negli autori.

L'aspetto ed il contegno chimico non essendo sufficiente a caratterizzare gli elementi in questione, rimane allora unico criterio per giudicare della loro natura l'esame dei loro rapporti colle fibre nervose. Ed appunto sui rapporti di certe cellule ganglionari simpatiche coi rispettivi nervi esistono oggidì osservazioni bene accurate che fanno sempre più concludere per una rasso-

---

(1) Comunicato nel lavoro di R. Verardini, *Nuovo contributo allo studio della malattia d'Addison*. Memorie della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV, Tomo IX, 1888.

(2) A. Moers, *Ueber den feineren Bau der Nebennieren*. Arch. f. path Anat. und Phys., Bd. XXIX, 1864.

(3) A. Brunn, *Ein Beitrag zur Kenntniss des feineren Baues und der Entwickelungsgeschichte der Nebennieren*. Arch. f. mikr. Anat. Bd. VIII, 1872.

(4) Braun. *Bau und Entwickelung der Nebennieren bei Reptilien*. Arbeiten ans dem zool. Institute zu Würzburg, Bd. V, 1879.

Digitized by Google

miglianza notevolissima fra le medesime e gli elementi della sostanza midollare delle capsule surrenali.

Già da Beale e da Arnold furono riscontrati nel simpatico della rana certi elementi ganglionari in rapporto con due fibre, una retta, l'altra avvolta a spirale attorno alla prima Più tardi col mezzo del suo metodo al *bleu* di metilene Ehrlich (1) trovò che di queste parti si colora solamente la fibra spirale, la quale dividendosi sulla superficie della cellula vi forma una rete nervosa terminale che ricetta nelle sue maglie una parte più o meno estesa od anche tutta la cellula. Dai filamenti reticolari partirebbero altre divisioni terminanti in un rigonfiamento. Aronson (2) ripetendo le stesse ricerche confermò il reperto di Ehrlich, e così Arnstein (3); solo che quest'ultimo trovò che i rigonfiamenti corrispondono sempre a punti nodali della rete, e che quando sembrano terminali ciò si deve ad una incompleta colorazione del reticolo. Un altro osservatore, Feist (4), aggiunse che il polo della cellula a cui fa capo la fibra spirale si fa spesse volte distinto per una colorazione bluastra di una materia granulosa, in cui emergono alcuni grossi granuli dello stesso colore. Ora le qui riferite particolarità della fibra spirale corrispondono ben davvicino a quelle da me descritte per le fibre nervose nella sostanza midollare; ma Feist è andato più in là, perchè mentre Ehrlich considera la fibra retta come centrifuga, la contorta come centripeta, per esso la prima non corrisponde altro che ad un semplice prolungamento protoplasmatico nutritizio, mentre il prolungamento nervoso, vale a dire il solo che partendo dalla cellula continuasi colle fibre del simpatico sarebbe rappresentato dalla fibra spirale. In tal caso l'analogia fra certi elementi simpatici e gli elementi midollari delle capsule è anche maggiore, perchè a me non fu dato di constatare che i brevi prolungamenti delle cellule capsulari si continuino colle fibre nervose.

L'analogia si fa più grande ancora se si tiene conto di altri fatti e soprattutto delle recenti scoperte di Smirnow. È da

---

(1) P. Ehrlich, *Ueber die Methylenblaufarbung als histologische Methode* Deutsche med. Wochenschr, 1886, N. 4.

(2) H. Aronson, *Beitrage zur Kenntniss der centralen und peripheren Nervenendigungen*. Inaugural dissertation. Berlin 1866.

(3) K. Arnstein, *Die Methylenblaufarbung als histologysche Methode*. Anatom. Anzeiger 1887, pag. 130.

(4) B. Feist, *Beitrage zur Kenntniss der vitalen Methylenblaufarbung des Nervengewebes*. Archiv f. Anat. und Phys. Anath. 1-2 Hefte, 1890.

Digitized by Google

tempo che Mayer (1) fra gli elementi del simpatico oltre le comuni cellule nervose distinse delle forme speciali che chiamò *Zellennester*, le quali sono costituite da un accumulo di piccoli corpi constanti di un nucleo e di poco protoplasma fra cui si trovano altre cellule più grandi. Questi elementi involti da una comune capsula connettiva sarebbero contigui ai nervi e non continui. Or bene secondo Mayer queste speciali formazioni sarebbero rappresentate anche nella sostanza midollare delle capsule surrenali. Dostoiewsky a sua volta fece notare che nei gangli nervosi, i quali stanno al di fuori delle capsule surrenali, trovansi gruppi di cellule che hanno l'aspetto e le reazioni chimiche delle cellule della sostanza midollare. Stilling (2) affatto recentemente confermò le asserzioni di Dostoiewsky. Nei gangli del simpatico addominale, specialmente del coniglio, del gatto e del cane, si trovano piccoli corpuscoli composti di cellule che come gli elementi midollari delle capsule si colorano in *bleu* col persolfato di ferro ed in bruno col bicromato di potassio. Detti corpi hanno una tunica connettiva comune, posseggono piccoli vasi capillari, e però corrispondono evidentemente ai *Zellennester* di Mayer. Smirnow (3) finalmente studiando la struttura delle cellule nervose del simpatico degli anfibi col mezzo della reazione vitale di Ehrlich è riuscito anche a mettere in evidenza il rapporto delle fibre nervose coi nidi cellulari di Mayer. Dentro la comune capsula che racchiude le cellule brune esiste un reticolo nervoso che è in tutto simile al reticolo che si trova sulla superficie delle cellule ganglionari simpatiche. Le fibre nervose circondano in forma di un reticolo generale tutto il conglomerato di cellule e penetrano anche fra i singoli elementi. La rete poi manda una, due o più fibre che passano nei tronchi nervosi. Smirnow dietro questo particolare contegno delle fibre nervose considera i nidi cellulari come cellule nervose circondate da una capsula generale. Ora il reperto di Smirnow coincide perfettamente con quanto io ho trovato nella sostanza midollare delle capsule surrenali. Anche qui i singoli gruppi cellulari sono

(1) I. Mayer, *Beobachtungen und Reflexionen über den Bau und die Verrichtungen des sympatichen Nervensystems.* — Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss., Bd. LXVI, 1872.

(2) H. Stilling, *A propos de quelques expériences nouvelles sur la maladie d'Addison.* — Revue de Médecin, Année X. Octobre 1890.

(3) A. Smirnow, *Die Structure der Nervenzellen im Sympathicus der Amphibien.* Arch. f. mikr. Anat. Bd. 35, 1890.

Digitized by Google

involti da una comune capsula connettiva e sono anche circondati da un reticolo nervoso generale, solo qualche fibra isolata penetra fra i vari elementi. Se dunque, come fece SMIRNOW, si vogliono considerare i nidi cellulari del simpatico come composti di elementi nervosi, per le stesse ragioni tutte le cellule della sostanza midollare delle capsule devono entrare in questa categoria.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

FIG. 1. — Sezione dorso-ventrale di una capsula surrenale di sorcio. La parte colorata rappresenta la sostanza midollare divisa in lobuli o cordoni cellulari che appaiono diversamente tinti. — *N*, fascio nervoso che attraversa la sostanza corticale per entrare in quella midollare; *c*, cellule nervose colorate in nero; *v*, vene; *a*, terminazioni in espansioni mal definite; *b*, terminazioni a rete, *d*, dilatazioni terminali delle fibre nervose a piastrina allungata; *e*, terminazioni in corpuscoli stellati. — Zeiss — Oculare 2 Obb. D.

» 2 e 3. — Fasci di fibre nervose decorrenti nella sostanza midollare delle capsule di coniglio. — *C*, *C*, cellule nervose. — Zeiss. Oc. 3 obb. D.

» 4, 5, 6. — Varie forme di terminazioni nervose a rete (sorcio). — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 7. — Terminazioni a rete su due piccoli gruppi cellulari nel topo. — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 8. — Terminazione a grappolo, *c* cellula nervosa (gatto neonato). — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 9. — Lo stesso modo di terminazione figurato in 8, a cui mancano le espansioni terminali (gatto neonato).

» 10. — Espansioni terminali ottenute nel coniglio col mezzo della reazione vitale di EHRLICH. — Zeiss. Oc. 3, Obb. E.

» 11. — Cellule connettive, *a* della sostanza midollare (coniglio); *b*, *c* della sostanza corticale (sorcio); *d*, della sostanza corticale (uomo). — Zeiss. Oc. 3, Obb E.

» 12. — Cellule connettive della zona fascicolata (maiale). — Zeiss. Oc. 3, Obb. E.

Digitized by Google

Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato uditivo dei Teleostei.

Note del dott. PIETRO DE-VESCOVI

☛ NB. *La Tavola relativa a questa Memoria verrà pubblicata in una prossima Dispensa.*

Prima di pubblicare alcune osservazioni morfologiche e fisiologiche sull'organo acustico dei Teleostei, per non fare una troppo lunga disgressione da quegli argomenti speciali, mi determinai di trattare separatamente, con questa Nota critica, dei nomi assegnati agli otoliti per giustificare quelli che sono per proporre e sarò per adottare.

Ad alcuno può sembrare inconsulto o per lo meno inutile il cambiar denominazione ad un organo, ed anzi v'è chi sostiene che allorquando un organo, come una specie animale, possiede una sinonimia, sia, senz'altro d'accettarsi come definitivo quel nome che ha il primato del tempo.

Questo criterio mi sembra che assomigli, a quelli, dirò così, artificiali che si adottarono per le prime classificazioni degli oggetti naturali. Credo invece che un criterio più positivo, e che può arrecare dei vantaggi, sia quello di prendere come definitiva quella denominazione che si collega con un qualche fatto morfologico o fisiologico. È allora che il nome non rappresenta una parola vuota di senso, e serve non solo a denominare un oggetto perchè non

Digitized by Google

si confonda con altri; ma giova anche a ricordarne una particolarità più o meno saliente di forma o di funzione: nome che in parte serve a caratterizzarlo.

Molti esempi si dànno di termini che addirittura sono sbagli; ed in questo caso non solo sarebbe opportuna, ma necessaria la sostituzione con termini che corrispondano al vero.

Il Congresso internazionale zoologico del 1889 ha stabilito le norme da seguirsi per la nomenclatura binomia degli organismi, ma della nomenclatura degli organi non si è occupato, dovendosi per questa seguire in modo assoluto un insieme di criteri più positivi e *di realtà.*

Egli è perciò che studiando l'organo uditivo dei Teleostei, e notando le varie denominazioni usate dagli Autori per designare i singoli otoliti, ed i criteri erronei che servirono di base per stabilirle, mi decisi d'indicare e nello stesso tempo dimostrare, quali denominazioni sarebbero le più appropriate per designare i lapilli dell'apparato acustico, attenendomi ad un criterio topografico che abbraccia anche un carattere morfologico.

Con esse *nella sintesi* dei trattati si potrebbero risparmiare agli studiosi le difficoltà d'interpretazione e le eventuali confusioni (1).

Gli otoliti sono denominati in generale *lapilli*, *pietruzze uditive*, *concrezioni litoidi dell'orecchio*, *otoliti*, ecc., e sono stati detti anche *ossa et ossicula petrosa* (2). Ma non è dei termini generali che voglio occuparmi, bensì dei particolari.

Per la prima volta gli otoliti furono rinvenuti dal Casserio (1600) (3), che descrisse quelli del Lucio (*Esoxlucius*) con termini generici; quantunque si sappia che Eliano e Plinio ne abbiano fatto menzione.

Il Bromel (1698) lasciò un catalogo di otoliti che egli aveva

---

(1) Vedi C. Gegenbaur; *Elementi d' Anatomia comparata.* Edizione tedesca e francese. — Organo uditivo dove parla degli otoliti. Più innanzi tratterò questo punto.

(2) A. Comparetti, *Observationes anatomicae de aure interna comparata.* Patavii, 1789.

(3) I. Casserius, *Vocis auditusque organorum historia anatomica.* Ferrariae, 1600. Parlando del Casserio alcuni Autori citano anche il suo: *Pantaestheseion, De quinque sensibus*, Venetiis, 1609; come pure il *Pantaestheseion* pubblicato a Francoforte nel 1610; ma certo deve qui avere l'antecedenza l'opera del 1600.

Digitized by Google

raccolti da pesci anatomizzati, senza stabilire dei nomi particolari (1).

Il KLEIN (2) ha descritto parecchie di tali concrezioni, egli però le ha esaminate e figurate isolatamente e non in rapporto o connessione col labirinto membranoso.

Il COMPARETTI descrivendo nell' « *Observatio LXVI* » della sua opera (3) l'organo acustico di parecchi teleostei, prende anche in considerazione gli otoliti designandoli quali « *ossa et ossicula petrosa* ».

Oltre ai sunnominati anatomici, CAMPER (1761), KOELREUTER (1773), MAURO (1785), I. HUNTER (1786), DUMÉRIL (1800), CUVIER (1800) ed altri ancora, descrissero la forma e il volume di qualcuno degli otoliti dei teleostei trattando sull'organo uditivo, ma servendosi di *termini* generali.

L'HUSCHKE (4) pel primo (1824) impose la denominazione di *lapillus* all'otolito appartenente all'otricolo e che propriamente giace nel *recessus utriculi*; chiamò poi *sagitta* la più grande concrezione spettante al sacculo ed *asteriscus* quella che occupa la porzione lagenare (*lagena*) del vestibolo membranoso.

Il BRESCHET (1836), pur conoscendo le denominazioni assegnate agli otoliti dall'HUSCHKE, basandosi in parte sulla relativa loro grandezza, in parte sulla rispettiva loro posizione nel laberinto membranoso, designò col nome di « *mégalithe* » l'otolito maggiore come l'indica il nome stesso, che trovasi nel sacculo, e che corrisponde alla *sagitta* di HUSCHKE. Chiamò poi « *microlithe* » il lapillo appartenente all'otricolo, prendendo di mira la sua piccolezza; ed infine, tenendo presente la posizione nominò « *paralithe* » la concrezione calcare appartenente alla lagena e che HUSCHKE aveva chiamato *asteriscus*.

Si avrebbero potuto accettare queste denominazioni del BRESCHET, come quelle che si basano sulla realtà dei fatti; però col nome di *microlito* si potrebbe comprendere tanto l'uno, quanto

(1) Vedi CUVIER, *Histoire nat. des poissons*, t. I, pag. 459

(2) JAC. TH. KLEIN, *Historiae piscium naturalis promovendae missus primus de lapillis eorumque numero in craniis piscium, cum praefatione de piscium auditu*. Gedani, 1740.

(3) AND. COMPARETTI, *Observationes anatomicae de aure interna comparata*. Patavii, 1789.

(4) ARM. HUSCHKE, *Beiträge zur Physiologie und Naturgeschichte*. I Bd. Ueber die Sinne. Weimar, 1824.

Digitized by Google

l'altro dei due piccoli lapilli, e perciò questa denominazione non regge; poichè per se stessa è troppo generica, data esclusivamente all'otolito del *recessus utriculi;* tanto è vero che il COSTA O. G. (1) chiamò *micro-otoliti*, sia questo, sia quel lapillo che trovasi nella lagena. Ma poi il BRECHET nell'illustrazione della grande figura spettante il laberinto membranoso del *Lophius piscatorius* e fatta « pour représenter les diverses parties constitutives de l'oreille » (2) trova più opportuno e più giusto di designare gli otoliti nel seguente modo « *otolithe sacculaire* » quello del sacculo, « *otolithe cysticulaire* » quello della lagena (3), ed « *otolithe utriculaire* » quello del *recessus utriculi.*

Nel lavoro poi del 1838 sull'organo uditivo dei pesci (4) il BRESCHET non usa più le surriferite denominazioni, ma designa gli otoliti semplicemente coll'epiteto di grande e piccolo, o, meglio, otolito del sacculo, della cisticola e dell'estremità del seno mediano (recessus utriculi).

Il KRIEGER (1840) dice (5) che la « *sagitta vulgo maximus esse solet lapillus* », e che un otolito « *posterior minor asteriscum* » (vocant). Egli poi accetta come specifica anche la denominazione di *lapillus* che l'HUSCHKE, non so proprio con quali criteri, chiama « *prae ceteris* » *lapillus.*

Il LANG (1863) nomina (6) le concrezioni calcari del laberinto in generale otoliti e, come risulta dalla pag. 313 del lavoro citato, accetta le denominazioni di *Sagitta*, *Asteriscus* e *Lapillus*, che egli mette fra parentesi.

Il COSTA O. G. (1867) nel già citato lavoro (7) giunto alla parte speciale descrive soltanto gli otoliti di tre specie di

---

(1) O. G. COSTA, *Degli otoliti in genere ed iconografia di quelli propri de' pesci viventi nel Mediterraneo*, ecc. — Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat., Napoli, 1867. Vol. III, N. 15.

(2) G. BRESCHET, op. cit. pag. 266.

(3) Il BRESCHET chiama sempre *cysticule* quella parte del laberinto membranoso che poi ricevette il nome di *lagena.*

(4) GIL. BRESCHET, *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouie des poissons.* Paris, 1838.

(5) ED. KRIEGER, *De otolithis, Diss. inaug.* Berolini, 1840, pag. 21.

(6) G. LANG., *Das Gehörorgan der Cyprinoiden. Zeitschrift f. wiss. Zool. XIII*, Bd. 1863.

(7) O. G. COSTA, *Degli otoliti in generale ed iconografia*, ecc.

Digitized by Google

pesci (senza alcuna figura), otoliti che sono indicati coi nomi di *megalito*, il maggiore, e di *micro-otoliti*, i due più piccoli.

Il RETZIUS. (1872) usa sempre nel suo lavoro sul laberinto dei Teleostei (1) le denominazioni: *Sagitta*, *Asteriscus* e *Lapillus*.

L'HASSE (1872) si accorda in certo qual modo col BRESCHET, poichè non accetta i nomi stàbiliti dall'HUSCHKE; ma usa invece i seguenti: *Otolith des Sacculus*, *Otolith des recessus utriculi*, *otolith der Schnecke* (2), avvertendo che « die Schnecke der Fische ist das Homologon der Lagena des haütigen Blindsacks. »

Il KUHN (1877) mantiene in tutto il suo lavoro (3) i termini più volte ricordati di *Lapillus*, *Sagitta* ed *Astericus*.

Il RETZIUS (1881) nel suo grande lavoro (4) non adopera più le denominazioni usate nel primo (1872); ma trova più naturale e più logico di chiamarle *Otolith des recessus utriculi*, *Otolith des Sacculus*, *Otolith der Lagena*.

R. CANESTRINI e L. PARMIGIANI (1883) dichiarano (5) che per gli otoliti hanno adottato i nomi usati da altri Autori, cioè « chiamiamo, essi dicono, *lapilli* quelli dei vestiboli (6), *sagitte* i due maggiori dei sacculi, *asterischi* i due minori pure dei sacculi » (7).

Il TAFANI (1885) trattando dell'organo uditivo del *Mullus surmuletus* (8), come primo fra i numerosi teleostei dei quali illustra l'organo uditivo, usa le denominazioni di *Sagitta*, *Lapillus* ed *Astericus* pei singoli otoliti.

---

(1) G. RETZIUS, *Anatomische Untersuchungen. Erste lieferung. Studien uber den Bau des Gehörlabyrinthes. Erste Abtheilung: Das Gehörlabyrinth der Knochenfische*. Stockholm, 1872.

(2) C. HASSE, *Anatomische Studien. Das Gehörorgan der Fische*. III Heft. Leipzig, 1872.

(3) KUHN, *Untersuchungen über das hautige Labyrinth der Knochenfische*. Archiv. f. mik. Anatom. XIV Bd. 1877.

(4) G. RETZIUS, *Das Gehörorgan der Wirbelthiere. I, Das Gehörorgan der Fische und Amphibien*. Stockholm, 1881.

(5) R. CANESTRINI e L. PARMIGIANI, *Gli otoliti dei pesci*. Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali, Vol. VIII, fas. 2.

(6) Gli Autori intendono di dire del *recessus utriculi*.

(7) Per il posto occupato dagli asterischi gli Autori intendono, senza dubbio di dire della *lagena*.

(8) AL. TAFANI, *L'organo dell'udito*. Firenze, 1885, pag. 120.

Digitized by Google

Il CANESTRINI R. in un suo lavoro del 1886 (1) mantiene le denominazioni già usate trattando in particolare degli otoliti (1883). E dove accenna alla grandezza relativa degli otoliti, fa un richiamo alla seguente nota: « Per evitare confusione avverto che il GEGENBAUR chiama *sagitta* quello che qui è detto *lapillo*, ed *asterisco* quello che qui è denominato *sagitta* » (2). Per verità il GEGENBAUR (3) così si esprime: « Die bei Knochenfischen die Stelle der feinen Krystalle vertretenden *Otolithen* besitzen bestimmte Gestalten. Der im vordern Abschnitte des Vorhofs gelegene wird als « *Sagitta* » der vom hintern Abschnitt umschlossene meist grössere als « *Asteriscus* » bezeichnet (vergl. Krieger, De Otolithis. Berol. 1840). » Pure nella traduzione francese (4) è detto: « Les *otolithes*, qui chez les Poissons osseux remplacent les cristeaux plus ténus, offrent des formes définies. On désigne sous les noms de *sagitta* celui qui occupe la partie antérieur du vestibule, et *asteriscus*, celui ordinairement plus grand qui se trouve dans la postérieur (KRIEGER, de Otolithis, Berol., 1840). »

Anzi tutto dirò che il GEGENBAUR ha omesso di accennare a quell'otolito che sta nel *recessus utriculi*, detto anche *lapillus*, del quale il KRIEGER così si esprime (5): « In alvei communis parte anteriori lapillus situs est, qui ab Huschke prae ceteris lapillus nominatur, colore albus, consistentia perdurus, subrotundus aut ovalis, superficie laevi, non plana, ecc. ».

Mi sembra poi che le parole del GEGENBAUR vogliano accennare alla porzione anteriore di quella parte del vestibolo che costituisce il *sacculus* e perciò a ragione egli dice che *sagitta* si chiama l'otolito che essa contiene, in quanto che egli neppur nomina l'otricolo, e così la porzione del vestibolo posteriore al

(1) R. CANESTRINI, *Osservazioni sull'apparato uditivo di alcuni pesci.* Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali, Vol. IX, fasc. 2°.

(2) Loc. cit., pag. 274. L'Autore non cita l'opera del Gegenbaur da dove ha appreso questo *qui pro quo;* però si capisce che vuol intendere il *Manuale d'Anatomia comparata*, e forse il Canestrini si riporta alla traduzione francese della quale nella bibliografia fa menzione.

(3) C. GEGENBAUR, *Grundzüge der Vergleicheuden Anatomie*, zweite Aufl. Leipzig, 1870, pag. 772.

(4) Tradotto in francese sotto la direzione di Carl Vogt. Paris 1874, pagina 731.

(5) ED. KRIEGER, *De otolithis*. Berol. 1840, pag. 21.

Digitized by Google

saccolo corrisponde alla lagena; perciò non è erroneo il nome di *asteriscus* dato dal GEGENBAUR all'otolito da essa contenuto.

Dove però il GEGENBAUR non è esatto, si è nell'accennare alla maggior grandezza dell'*asteriscus* (« meist grossere als *asteriscus* bezeichnet ») in confronto alla *sagitta;* poichè la relativa maggior grandezza della sagitta in confronto agli altri due otoliti è questione di fatto costante, ed anche il KRIEGER al quale il GEGENBAUR rimanda è esplicito su questo punto. Di fatto, trattando delle cavità che ora sono distinte col nome di *sacculus* e *lagena*, KRIEGER scrive (1): « Uterque loculus lapillum continet, et anterior quidem, maior, sagittam quam vocant, posterior minor asteriscum ». E più innanzi (2): « Sagitta vulgo maximus esse solet lapillus »..., e « Asteriscus plerumque multo minor est, quam sagitta..... ».

In ogni modo da questo fatto risulta chiaro come non sia difficile incorrere in inesattezze quando i nomi degli organi non corrispondono al vero, e le loro indicazioni sieno fatte senza un criterio positivo caratteristico. Egli è perciò che maggiormente mi persuado dell'utilità di fissare le denominazioni ragionate per gli otoliti dei Teleostei, come quelle di parti componenti un organo difficile a studiarsi ed importantissimo.

Sicchè, riassumendo, abbiamo i seguenti modi per denominare gli otoliti in particolare:

1° *Lapillus.* *Sagitta.* *Astericus* (HUSCHKE, ecc.)
2° *Microlithe.* *Mégalithe* *Paralithe* (BRESCHET)
3° *Micro-otoliti* *Megalito* (COSTA O. G.)
4° Otolito dell'utricolo (*Recessus utriculi*), Otolito del sacculo, Otolito della lagena, della cisticola (BRESCHET, ecc.).

Se si riflette alle denominazioni date dall'HUSCHKE, si vede chiaro che agli otoliti dei teleostei sono stati imposti nomi che non si rannodano con un fatto costante, anzi a nulla di concreto, non essendovi in essi racchiuso alcun criterio che in qualche modo determini precisamente l'otolito del quale s'intende parlare. Di fatti, egli ne chiama uno *Lapillus* per eccellenza, ma non sono forse tutti lapilli i grandi ed i piccoli otoliti? Perchè specializzare col nome generico di *lapillo* la concrezione litoide ca-

(1) Loc. cit. pag. 21.
(2) Loc. cit. pag. 21.

Digitized by Google

ratteristica dell'otricolo, quasichè le altre non fossero della identica natura?

Astericus e *Sagitta* denomina gli altri due otoliti; ma come si convengano questi nomi ai due lapilli in discorso non lo si può comprendere, considerando le svariatissime forme di otoliti; e se in qualche caso speciale potrebbero passare, non possono reggere pei casi generali, nè assolutamente indicano la forma di queste concrezioni.

In vero, il BRESCHET si avvide che la nomenclatura dell'HUSCHKE non corrispondeva per nulla ai fatti e perciò troviamo nella pregiata sua opera (1836), già citata, che egli riferendosi in parte alla topografia, in parte alla forma, assegna altri nomi ai tre otoliti; ma poi in un seguente lavoro (1838) egli stesso li abbandona, senza accettare quelli dell'HUSCHKE, e si accontenta delle denominazioni generali.

Le denominazioni del COSTA O. G. non sono del pari ammissibili, perchè a due otoliti spetta lo stesso nome (« micro-otoliti ») e quindi non riesce specifico nè il nome dell'otolito dell'utricolo, nè quello della lagena.

Molti altri Autori, come si disse nel cenno storico, non accettarono nè le denominazioni dell'HUSCHKE, nè quelle particolari del BRESCHET, nè tampoco quelle del COSTA O. G.; ma trovarono più opportuno e molto più giusto servirsi di più parole per nominare i singoli otoliti (1).

Ora concordando col criterio di questi Autori, e cercando non già vaghezza di termini, ma solo di collegare col nome la posizione d'ogni singolo otolito nel laberinto membranoso, come un fatto costante; poichè nè forma, nè relativa grandezza possono fornire un criterio stabile, propongo tre nomi latini formati dal greco che indichino la pietruzza e le tre parti del laberinto che costantemente allogano i tre lapilli.

Perciò chiamo *Saccolithus* (Saccolito) il lapillo che sta nel sacculo, *Ascidiolithus* (Ascidiolito) quel lapillo che appartiene all'otricolo ed è situato all'estremità sua anteriore (*recessus utri-*

(1) Anche il WIEDERSHEIM nel suo tanto apprezzato « *Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere.* Zweite Aufl. Iena 1886 » a pag. 446 accenna ai nomi degli otoliti servendosi dei termini generali: *Otolithen* (des Recessus utriculi, des Sacculus, und der Lagena).

Digitized by Google

culi), e *Lagenolithus* (1) (lagenolito) la concrezione calcarea spettante alla lagena.

Che tali nomi convengano decisamente lo dimostra anche la figura del laberinto membranoso del *Merlucius esculentus*, Riss. che ho disegnato dal vero cogli otoliti nella loro naturale posizione e forma, ingrandendo convenientemente tutto l'apparato.

Ho creduto opportuno di fare questa figura perchè in tanti lavori con illustrazioni che ho potuto esaminare, sull'organo uditivo dei Teleostei, in nessuno si trova una figura fatta espressamente per dimostrare con chiarezza la posizione e la forma esatta dei tre otoliti nel laberinto.

II.

Sulla trasmissione delle vibrazioni sonore al labirinto membranoso dei Teleostei.

Dalla conformazione generale dell'apparato acustico dei Pesci, e dallo sviluppo morfologico di ciascuna sua parte, si viene ben presto ad inferire che il meccanismo della percezione dei suoni deve essere abbastanza semplice in paragone a quello che si conosce pei vertebrati superiori.

Se poi si considera il valore fisiologico di questo apparato in rapporto colle condizioni biologiche tutte dell' ambiente, si scorge che il grado del suo sviluppo morfologico sta in correlazione colla sua importanza fisiologica; correlazione questa, che basandosi sui principii fondamentali dell'evoluzione, si comprende esser determinata dai fattori della trasformazione nella lotta per l'esistenza e nell'adattamento all'ambiente.

Nei Pesci teleostei non vi è apparecchio alcuno tra l'orecchio interno ed il mezzo ambiente, atto a facilitare la trasmissione delle vibrazioni sonore, cioè: non vi è alcun organo od apparato che si possa riferire all'orecchio esterno e medio dei vertebrati superiori.

Il laberinto membranoso dei Teleostei sta completamente racchiuso nell'impalcatura cranica lateralmente all'encefalo. Egli è

---

(1) Dal greco: σακκος = saccus; ἀσκίδιον = utriculus; λαγηνος = lagena; e λίθος = lapis.

Digitized by Google

adunque attraverso queste pareti involgenti (ossa e comuni tegumenti) che le vibrazioni sonore devono esser trasmesse per arrivare all'organo uditivo.

E a proposito del meccanismo della trasmissione dei suoni dall'ambiente al laberinto membranoso di questi Pesci, fisiologi ed anatomici, si accordano, stando però sulle generali.

Così, ad esempio, si esprimono l'Agassiz e il Gould (1): « In osseous Fishes... the sonorous vibrations propagated by the water are communicated through the walles of the cranium, as no openings exist for the special reception of waves of sound. »

L'Owen dice: « In osseous Fishes the sonorous vibrations of their liquid element is communicated by the medium of the solid parts of their body... to the liquid contents of the labyrinth » (2).

Il Milne Edwards trattando delle disposizioni di quest'organo dei Pesci (3) dice: « C'est donc directement à travers les parois osseuses ou cartilagineuses de cette cavité (boîte crânienne) que les ondes sonores doivent passer. »

E nella stessa guisa si spiegano altri fisiologi ed anatomici che trattano quest'argomento; per cui credo inutile far altre citazioni.

A prima giunta si potrebbe supporre che la via più facile a percorrersi dalle vibrazioni sonore sia la parete superiore cranica nella quale stanno allogati i canali semicircolari, essendo dagli Autori tracciata soltanto in generale la via di trasmissione delle vibrazioni foniche.

Se così fosse le vibrazioni sonore dell'ambiente arriverebbero prima che ad ogni altra parte alla regione occupata dai canali semicircolari e da essi sarebbero trasmesse a tutto il laberinto membranoso.

Prima d'incominciare l'esame critico del suesposto, voglio far notare una opinione del Breschet che si allontana dalla comune, riferita dall'Autore trattando dell'organo uditivo del *Petromyzon*

---

(1) Agassiz L., *and A. A. Gould, Outlines of Comparative physiology.* London, 1870, pag. 78.

(2) Owen R. *Lectures on the comparative anatomy and physiology of the vertebrate animals.* Vol. II, Part. I. Fishes. London, 1846, pag. 211.

(3) H. Milne Edwards, *Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée de l'homme et des animaux.* Tom. XII. Prem. partie. Paris, 1876, pag. 71.

Digitized by Google

maximus L. (1): « La trasmission des vibrations sonores a principalement lieu, je crois, par les branchies dont la cavité parvient jusqu'auprès du vestibule cartilagineuse ».

Ora, riportandomi alla prima ipotesi, per la posizione che occupa il laberinto uditivo nel cranio, le vibrazioni sonore, prima di arrivare all'organo acustico, dovrebbero percorrere una via più o meno lunga secondo i casi, costituita da parecchi mezzi eterogenei di densità differente, alle volte di una potenza abbastanza considerevole; quali lo strato epidermico e dermico, lo strato muscolare, poi quello osseo, quindi l'inviluppo perlinfatico.

Qui osserverò soltanto che se le vibrazioni acustiche di un corpo sonoro si trasmettessero immediatamente alle pareti del capo, stando con queste in diretto rapporto, allora dal lato fisico non sorgerebbero gravi difficoltà, trattandosi di mezzo denso, e quindi atto a mantenere l'energia della vibrazione ed a trasmetterla celermente; ma se il corpo sonoro è ad una certa distanza, anche piccola, allora le vibrazioni che si trasmettono al mezzo più denso (tegumenti ed ossa del capo), da un mezzo meno denso (acqua), come nel caso nostro, hanno poca energia per mettere in istato di vibrazione questo mezzo più denso.

E perciò considerata questa deficienza d'energia da un lato, e le perdite che essa subisce nell'attraversare gli svariati strati di diversa densità che costituiscono la parete del capo, si dovrà indagare quale deve essere la via più facile, la più breve, la più sensibile, in una parola, la più appropriata per l'arrivo delle vibrazioni acustiche al labirinto, che in ogni modo devono sempre attraversare la parete cranica.

Ma prima di passare a queste condizioni prendo in esame il secondo modo di spiegare la trasmissione delle vibrazioni sonore data dal BRESCHET, cioè la via delle branchie. Questa via non mi sembra affatto confaciente per la disposizione anatomica delle singole parti; poichè anche in questo caso le vibrazioni sonore dovrebbero fisicamente lottare, per trasmettersi all'apparato acustico, cogl'involucri epidermico e dermico, colle ossa o cartilagini opercolari (trattandosi del Petromizon), coi muscoli, col rivestimento interno degli opercoli stessi. E poi intervengono le branchie che certamente non devono favorire per la loro costituzione, la

(1) GIL. BRESCHET, *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe des Poissons.* Paris, 1838, pag. 5.

Digitized by Google

trasmissione delle vibrazioni foniche, le quali dovrebbero ancora attraversare la vôlta inferiore cranica. Sicchè tutto considerato non mi pare punto facilitata la via tracciata nell'opinione espressa dal BRESCHET, ma piuttosto resa difficoltosa.

E poi perchè ammettere la possibilità di percepire i suoni soltanto colla dilatazione della regione branchiale? « En voulant écouter, l'animal doit dilater ses branchies » (1). Ed i suoni che giungono in tempo diverso a questo non dovranno esser uditi?

Ora non ammettendo nè l'una, nè l'altra via sopradescritte, ne resta una terza che a me sembra più naturale, più semplice, più conforme alle leggi fisiche ed alle disposizioni anatomiche, sulle quali precipuamente credo di poter fondare le ragioni che m'inducono ad opinare diversamente su questo punto risguardante l'udito dei Teleostei.

A me sembra dunque che le vibrazioni sonore si trasmettano direttamente dal mezzo ambiente (acqua) alla vôlta inferiore cranica dove si presentano in modo più o meno pronunciate le capsule auricolari ossee rappresentate da due rigonfiamenti bulbosi che dall'OWEN vennero designati col nome di « *otocranio* » (2).

Per mettere in rilievo queste capsule, il diverso loro sviluppo ed orientamento ho figurato quattro cranii di Teleostei spettanti a diverse famiglie.

Nella figura 1 spettante al *Gadus minutus* LIN. si scorgono le capsule auricolari (ca) grandissime, disposte parallelamente all'asse mediano longitudinale del cranio. Anche nelle specie affini le capsule auricolari sono sviluppatissime (Vedi fig. 5).

Di volume alquanto minore sono le capsule uditive (fig. 2) dell'*Uranoscopus scaber*, LIN. e trovansi orientate diversamente dalle prime; vale a dire il loro asse longitudinale converge posteriormente coll'asse mediano del cranio, ed all'inanzi se ne allontana, formando così, le capsule, un angolo acuto col vertice verso l'occipite.

Le capsule auricolari del *Mugil cephalus*, CUV. (figura 3) sono pure inclinate rispetto all'asse mediano longitudinale del

(1) G. BRESCHET. Op. cit., pag. 5.

(2) Questa porzione del laberinto osseo vien pure indicata col nome di *loggia* o *camera labirintica*, e in gran parte vien costituita da quelle ossa che gli anatomici meno recenti designarono in generale col nome di *ossa petrose* o *rocciose*.

Digitized by Google

capo, e convergono posteriormente, ma sono molto più piccole di quelle che si riscontrano nell'Uranoscopo.

Nell' *Esox lucius*, Lin. contrariamente a quello che si è notato per l'Uranoscopo e per il Muggine, le capsule auricolari (fig. 4), convergono anteriormente verso l'asse mediano del cranio, e posteriormente divergono. Anche in questa forma l'otocranio è ben distinto.

Il grado di sviluppo dunque al quale arrivano queste capsule nelle numerose specie di Teleostei è vario (1), esse però racchiudono sempre una massima parte del laberinto membranoso. Per fissare la posizione topografica di queste capsule, si può tipicamente considerare la cavità cranica divisa in due porzioni da un piano orizzontale, ed allora sotto la vôlta superiore si trova la massa encefalica, e nella porzione basale infero-posteriore stanno allogate le parti principali del laberinto membranoso nelle rispettive capsule ossee, separate da una cresta mediana.

Considerando la posizione loro in rapporto agli organi della cavità boccale, si può dire in generale, che esse posteriormente cominciano fra l'inserzione degli archi branchiali di destra e quelli di sinistra all'innanzi dell'apertura esofagea, indi si protraggono sulla vôlta palatina ad un terzo circa della cavità boccale, a partire dal principio dell'esofago.

Ho figurato anche il cranio del *Merlucius esculentus*, Riss. (fig. 5) per mettere in rilievo particolare sia le sue capsule auricolari, e i loro limiti, sia le ossa che le compongono, per dichiarare poi che le vibrazioni acustiche trovano la via più opportuna, per giungere al labirinto membranoso, attraverso l'osso *otosphenoideum*.

Le capsule uditive considerate dall'esterno sono separate lungo la linea mediana del capo dall'osso *hyposphenoideum* (Brühl), anteriormente sono limitate dall'*orbitosphenoideum* (Brühl), e lateralmente dal *post frontale* s. *frontale posticum* (Cuvier, Owen, Stannius, Brühl), e dallo *squamosale* (Huxley, Brühl); posteriormente sono limitate dall'*occipitale laterale* (Auct.) s. *pleu-*

(1) Il Krieger « De Otolithis, Diss. inaug. Berolini, 1840, pag. 21 » così accenna all'otocranio ed alla sua sporgenza: « Magnitudo lapillorum maxime variat, interdum enim *sagitta* (cioè il Saccolithus) tanta est, quae amplam bullosam efficiat inflationem ossis occipitalis lateralis, quem extus perspicere possis. »

Digitized by Google

roccipitale (Brühl). L'otocranio poi è formato in gran parte dall'*otosphennoideum* (Brühl) s. *prooticum* (Huxley) che ne costituisce la parete mediana più o meno rigonfia, ed è completato nella regione laterale posteriore dal *adoccipitale* (Brühl) s. *opistoticum* (Huxley) e posteriormente dal *basioccipitale* (Owen).

Ora, basandomi su criteri anatomici e topografici, credo essere proprio l'*otosphenoideum* l'osso che più facilmente di ogni altra parte può trasmettere le vibrazioni acustiche all'organo uditivo; vibrazioni che arrivano alla superficie esterna delle capsule auricolari per mezzo dell'acqua che sempre bagna la cavità boccale e la regione branchiale in base al meccanismo della respirazione, per cui la regione occupata dalle capsule uditive trovasi di continuo in diretto rapporto coll'ambiente esterno. L'acqua giungendo fino al principio dell'esofago va a lambire in estrema vicinanza le capsule auricolari, tanto più che nei pesci la cavità primitiva boccale non si separa in palatina e boccale propria, ma rimane unica. Così le vibrazioni acustiche trasmettendosi continuatamente per lo stesso mezzo (acqua) non hanno da attraversare che uno strato di minima potenza, vale a dire lo strato della mucosa del fondo della bocca e lo spessore dell'*otosphenoideum* per giungere al *sacculus* del laberinto membranoso.

Oltre alle ragioni topografiche in favore della trasmissione delle vibrazioni foniche per la faccia inferiore cranica, si può portare il fatto che lo spessore delle capsule auricolari è di minima potenza in confronto a quello delle altre regioni craniche occupate dal laberinto membranoso, come si può scorgere dalla figura 8 che rappresenta una sezione trasversa verticale della testa del *Merlucius esculentus*, come anche lo si può dedurre dalle figure 3, 4, 5, 6 che rappresentano varî tipi di capsule auricolari, le quali spiccano per la loro semi-trasparenza lattea dovuta precisamente al poco spessore delle pareti che le costituiscono, ed alla bianchezza dell'otolito maggiore che racchiudono: il *saccolithus*.

Inoltre il sacchetto del laberinto *(sacculus)* aderisce alla parete della capsula auricolare e la parete stessa del sacculo nella regione ventrale inferiore è di uno spessore più debole che negli altri punti del laberinto (vedi fig. 8); osservazione questa che riscontrai in tutte le forme da me esaminate e che trovo pienamente confermata dal Retzius e dal Tafani.

Digitized by Google

Di fatto il Retzius (1) trattando della parete del laberinto membranoso dei teleostei dice: « In den Bogengängen und Ampullen ist die Wand am dicksten, » e più innanzi: « Am *Utriculus*, *Sacculus* und der *Lagena* ist die Wand dünner. »

E il Tafani (2), sullo stesso argomento, così si esprime: « Ho notato però che la grossezza di queste pareti non è dovunque alta ad un modo e che è più notevole in corrispondenza dei punti nei quali si trova l'epitelio sensitivo e nei canali semicircolari. Una delle aree ove mi si presenta sottile in modo costante sta nel sacchetto contro la macchia acustica. »

Ma v'ha di più, l'otolito maggiore, il *saccolithus*, è situato sempre in un piano marcatamente inclinato, e in modo che una sua faccia è rivolta più o meno di rimpetto alla parete ventrale del cranio e precisamente verso l'osso otospenoideo (Vedi figura 8).

Farò ancora ricordare che nel sacculo di questi vertebrati si trova, la più grande terminazione nervosa dell' *acustico*, cioè la *macula acustica sacculi*, e che quindi anche sotto questo punto di vista morfologico, la regione sacculare si appalesa in essi come quella che occupa il primo posto, la maggior importanza, il massimo sviluppo fra le parti componenti il laberinto.

Ed anche considerando filogeneticamente il sacculo, esso presentasi come una parte integrante di primo ordine nel laberinto membranoso, parte che si rinviene in tutta la serie dei vertebrati.

Gioverà inoltre richiamare l'attenzione sul fatto che in quei vertebrati nei quali vi è una qualche disposizione per condurre le vibrazioni all' orecchio interno esse giungono prima che ad ogni altra parte del laberinto al sacculo. In vero negli Elasmobranchi è facilitata la via delle vibrazioni sonore per giungere al *sacculus* mediante il condotto endolinfatico (*ductus endolymphaticus*, che dal saccolo si dirige verso la periferia del capo e si mette in una più o meno diretta comunicazione coll' ambiente esterno.

Nei vertebrati superiori poi le vibrazioni trasmesse dalla

(1) G. Retzius, *Das Gehörorgan der Wirbelthiere. I, Das Gehörorgan der Fische und Amphibien*, Stockolm, 1881, pag. 51.

(2) Al. Tafani, *L'organo dell'udito*. Firenze, 1885, pag. 178.

Digitized by Google

membrana timpanica che sta in rapporto colla catena degli ossicini auricolari (o con la columella) dei quali la staffa è in diretta comunicazione colla perilinfa che investe il *sacculus (S. hemisphaericus)*.

Se poi il fatto suaccennato che il sacculo si presenta per tutto come il ricevitore primo dell'ondulazione sonora, non bastasse, o non lo si volesse ancora generalizzare ai Teleostei, ritenendo che in essi le vibrazioni acustiche possano anche trasmettersi in prima linea ai canali semicircolari e in seconda alle altre parti del laberinto, potrei far ancora valere in appoggio alle mie congetture, il valore fisiologico attribuito ai canali semicircolari da valenti fisiologi.

Imperciocchè, nei vertebrati superiori ai pesci, per gli studi del FLOURENS, del BREUER, del VULPIAN, del GOLTZ, ecc. (1) si attribuisce ai canali semicircolari piuttosto la significazione di organi spettanti ad un senso di equilibrio, anzichè di un vero senso acustico.

E quantunque, secondo l'esperienze del KIESSELBACH, nei pesci non si verifichino per la recisione dei canali semicircolari (2), i disturbi di equilibrio osservatisi negli altri vertebrati, pure non mi sembra giusto nell'incertezza della loro funzione di attribuir loro un significato funzionale totalmente diverso da quello che si riscontra negli altri vertebrati; come implicitamente avverrebbe se si ritenesse giusta l'opinione che le vibrazioni sonore si trasmettano dalla superficie esterna del cranio.

La trasmissione delle vibrazioni acustiche per mezzo della parete inferiore delle capsule auricolari fa scorgere di leggieri il vantaggio che presenta questa via su tutte le altre, pel fatto che le vibrazioni possono giungere ben presto, direi quasi immediatamente a tutte le altre terminazioni nervose del vestibolo (*macula acustica recessus utriculi*, *mac. ac. lagenae*, in molti casi la *mac. ac. neglecta*) essendo queste ben vicine a quelle del sacculo *(mac. ac. sacculi)*. Ma anche le terminazioni nervose delle ampolle dei canali semicircolari, le *cristae acusticae*, sono vicinissime al vestibolo, ed anzi la via dell'otocranio stabi-

---

(1) L. LANDOIS, *Trattato di fisiologia dell'uomo,* trad. da B. Bocci, Roma, 1889, pag. 720.

(2) L. LANDOIS, op. cit., loc. cit.

Digitized by Google

lita per le vibrazioni sonore è più breve che non quella dei canali semicircolari per giungere alle ampolle stesse.

Sicchè da tutti gli argomenti riportati, e che in fine riassumerò, parmi sufficientemente dimostrato esser la via della bocca e dell'otocranio la più semplice e la più consona al processo che normalmente si scorge, per gli altri vertebrati, nella trasmissione dei suoni dall'ambiente all'organo uditivo.

Qui mi giunge ancora opportuno ed a proposito di fare qualche osservazione su una delle funzioni attribuite alla vescica natatoria dei pesci, tanto da fisiologi, quanto anche da anatomici cominciando dal WEBER, e venendo al TREVIRANUS, al BOIANUS, al BRESCHET, al MÜLLER, al MORREAU, ecc.

E per non dilungarmi troppo su questo argomento, riporterò senz'altro, le parole testuali di un valente fisiologo moderno, il CHATIN, che riepiloga il valore funzionale della vescica natatoria accennando anche ad esperimenti fisici fattisi, che *dovrebbero* servire a dimostrare la verità dell'asserto, come segue (1): « Quant'à la vessie natatoire, qui se rencontre chez un gran nombre de Poissons, il suffit, pour apprécier son mode de fonctionnement, de se rapporter à certains fait obsérves par STURM et COLLADON, lors de leurs célèbrés expériences de Genève: ces deux physiciens remarquèrent une augmentation considérable dans l'intensité du son lorsque l'extremité du tube acoustique, dont'ils faisaient usage, se trouvait garnie d'une caisse métallique à minces parois et remplie d'air; or la nature a realisé cette modification en disposant dans la cavité abdominal de Poissons un large poche remplie de gaz et reliée au vestibule soit par un canal intermédiaire (ALOSE, HARENG. V, BRESCHET), soit par un chaîne d'osselets se succédant sans interruptions du vestibule à la vessie natatoire *Siluroides*, *Carpe*, *Loche*, etc. V. BRESCHET).

La vescica natatoria che stando alla filogenesi ha il suo omologo nel polmone, rappresenta ora un organo che ha già avuto il suo valore in lontane epoche ed in organismi differenti dai pesci attuali, ed ora si presenta come un organo di adattamento a pesci di varii ordini. Il suo valore morfologico attuale, di secondaria importanza, ha dato origine, senza dubbio, alle molte interpretazioni funzionali attribuite a quest'organo. E fra le

(1) I. CHATIN, *Les organes des sens dans la série animale*. Paris, 1880, pag. 380.

Digitized by Google

altre, come si vidde, quella di servire quale apparato trasmettitore, o di risonanza delle vibrazioni acustiche.

Ma ciò, decisamente, non può essere; poichè prima che le vibrazioni sonore possano giungere alla vescica natatoria, situata fra la regione superiore addominale e l'inferiore dorsale al disotto della colonna vertebrale, le dette vibrazioni possono arrivare molto più presto al vestibolo dell'organo uditivo giungendo al sacculo per la via da me tracciata, e ciò pel fatto che la vescica natatoria è separata dall'ambiente e *mezzo* acqua non solo dai tegumenti, ma ancora da uno strato più o meno potente di muscoli.

L'HASSE (1) ha già grandemente infirmato colle sue ricerche anatomiche sui varii modi di comunicazione della vescica natatoria col laberinto, l'importanza acustica del natatoio, quantunque egli non neghi in modo assoluto la sua cooperazione all'udito specialmente in qualche caso particolare; tanto è vero che a proposito di questa questione, in un certo punto del suo lavoro, così si esprime (2) « Diesselbe » (Beziehung der Schwimmblase zum Hören) « halte ich aber bis auf Weiteres für untergeordneter Natur. »

In quanto poi alle classiche esperienze di STURM e COLLADON, che oltre al CHATIN anche altri fisiologi riportano, devesi far notare che la vescica natatoria dei Pesci non si può mettere in paragone funzionale colla cassa metallica piena d'aria del tubo acustico adoperato dai sullodati fisici, per la semplice ragione che questa cassa aveva « *pareti sottili* », e nel caso nostro invece le pareti sono tutt'altro che sottili; poichè per parete non si deve intendere soltanto quella della vescica, ma bensì *tutto lo spessore della parete addominale.*

Si può qui ancora osservare che le pareti della cassa acustica di STURM e COLLADON rappresentavano una *membrana tesa* e quindi favorevolmente disposta a ricevere ed a trasmettere l'energia fonica; mentre le pareti addominali di un pesce a nulla corrispondono di tutto ciò.

Il MÜLLER I. in appoggio al lavoro acustico della vescica natatoria porta due esperimenti, dei quali il secondo è anche rife-

(1) C. HASSE, *Anatomische Studien, Beobactungen über die Schwimmblase der Fische.* Viertes Heft. Leipzig, 1873.

(2) C. HASSE, loc. cit., pag. 585.

rito dal Milne Edwards (1). Detti esperimenti tendono a dimostrare le seguenti proposizioni: « Des masses d'air résonnent dans l'eau par des ondes sonores, lorsque l'air est renfermé dans des membranes ou des corps solides, et produisent par là un renforcement considérable du son. » — « Des membranes remplies d'air résonnent dans l'eau, alors même que les ondes sonores sont communiquées à la vessie par des cordes solides » (2).

Per provare la prima tesi il Müller immerse nell'acqua la vescica natatoria di un ghiozzo tenendovela coll'estremità delle dita. Fece poi produrre delle vibrazioni sonore in vicinanza di questa, mediante un fischietto. Queste vibrazioni erano condotte all'orecchio ben turato per mezzo di una bacchetta conduttrice situata in vicinanza della vescica natatoria, ed allora il Müller osservò che « Dans ce cas, le son perceptible avec le conducteur devient beaucoup plus fort que quand les ondes sonores ne parviennent à ce dernier, tenu d'ailleurs à la même distance, que par le seul intermédiaire de l'eau » (3).

Per dimostrare la seconda tesi questo fisiologo sommerse in un vaso d'acqua la vescica natatoria di un ghiozzo, fissata nella fenditura di una bacchetta che pose in contatto colle pareti del vaso. Fece quindi vibrare la parete del vaso per mezzo di un diapason e mediante un'asticella funzionante da conduttore acustico, fece arrivare le vibrazioni all'orecchio preventivamente turato. Ora, con questo apparecchio si ottiene che le vibrazioni trasmesse all'acqua si manifestano molto più forti in vicinanza della vescica che in ogni altro punto del liquido egualmente distante dalle pareti del vaso. E quindi il Müller conclude dicendo che « Des faits précédents, il suit que la vessie natatoire des poissons est en même temps un appareil de resonnance pour les ondes sonores qui traversent le corps de l'animal » (4).

Ora, tutto ciò andrebbe benissimo se si trattasse di una vescica qualunque, ma non per quella dei Pesci. Di fatto gli esperimenti del Müller e le dedottene conseguenze applicate ai Pesci non reggono, perchè egli mise la vescica natatoria in ben altre con-

---

(1) Milne Edwards, *Leçon sur la physiologie et l'anatomie comparée.* Tom. XII. I part. Paris 1876, pag. 72.

(2) I. Müller, *Manuel de Physiologie.* Paris, 1851, pag. 417.

(3) I. Müller, op. cit., pag. 417.

(4) I. Müller, op. cit., pag. 418.

Digitized by Google

dizioni che non sieno quelle in cui realmente si trova, stando nella sua posizione normale nell'addome. Vale a dire egli pose il natatoio in condizioni favorevolissime per ricevere e trasmettere le vibrazioni acustiche, perchè, lo immerse isolato e quindi senza gl'involucri costituiti da *mezzi* di differente densità, *mezzi* che nella realtà delle cose ci sono.

Ora se la vescica natatoria non può servire di apparato ricevitore e trasmettitore delle vibrazioni acustiche, perchè esse più presto e meno indirettamente possono giungere per altra via all'organo uditivo, come mai può essa funzionare da apparato di risonanza? Ed ammettendo anche la possibilità di una risonanza, a che mai potrebbe essa giovare quando già l'organo acustico ha ricevuto la vibrazione sonora? A null'altro che a disturbare la percezione dei suoni.

Quindi nel caso nostro, escluso il primo supposto, quello cioè della trasmissione, rimane inammissibile anche il secondo. E così anche per queste ragioni oltre a quelle topografiche illustrate dall'Hasse (1) la vescica natatoria non può servire nè come apparato collettore nè come trasmettitore e rinforzatore delle vibrazioni acustiche.

Da quanto ho esposto parmi sufficientemente dimostrato:

I. Che le vibrazioni sonore giungono al laberinto membranoso dei Teleostei attraverso le capsule auricolari e più particolarmente attraverso l'osso otosfenoideo;

II. Che le vibrazioni acustiche anzichè trasmettersi per mezzo dei canali semicircolari alle varie parti del laberinto, arrivano direttamente alla porzione vestibolare del laberinto, e precisamente al *sacculus*, come avviene in tutti i vertebrati;

III. Che nei vertebrati vi è, in linea generale, unità di processo nel meccanismo della trasmissione dei suoni, giungendo in tutti le impressioni dell'ambiente esterno prima al sacculo che alle altre parti del laberinto.

IV. Che la vescica natatoria non può servire nè come apparato trasmettitore, nè come rinforzatore dell'energia fonica.

Le ragioni portate per dimostrare i suaccennati punti si basano sui seguenti argomenti:

---

(1) C. Hasse, op. cit.

Digitized by Google

1° Via più breve che le ondulazioni sonore possono tenere percorrendo la cavità boccale e lo spessore della base delle capsule auricolari;

2° Fatto fisico per cui i corpi non possono trasmettere l'energia fonifica con grande integrità se non quando il corpo sonoro sta con essi in diretto contatto; e quindi si appalesa la necessità di una via che faciliti la trasmissione delle vibrazioni al laberinto;

3° Posizione delle capsule auricolari;

4° Mancanza di separazione della cavità boccale in palatina e boccale propria;

5° Spessore degli invogli cranici meno potente nella regione dell'otocranio che nelle altre parti occupate dall'organo uditivo;

6° Attaccamento del sacculo alla parete dell'otospenoideo;

7° Parete membranosa del sacculo più sottile sulla faccia ventrale;

8° Orientamento del saccolito;

9° Innervazione massima nel saccolo (*mac. ac. sacculi*);

10° Criterio filogenetico per dimostrare che la parte più importante e prima nel laberinto dei Teleostei è il sacculo;

11° Comparazione della via percorsa dalle ondulazioni sonore negli Elasmobranchi e negli altri vertebrati (unità di processo);

12° Ufficio problematico dei canali semicircolari dei Pesci;

13° La vicinanza al sacculo delle varie terminazioni nervose non escluse quelle delle ampolle dei canali semicircolari;

14° Le condizioni naturali della vescica natatoria che non sono riportabili alle disposizioni degli apparati fisici di STURM e COLLADON, nè a quelli di MÜLLER per dimostrare l'ufficio della vescica natatoria relativamente all'udito;

15° Negato alla vescica natatoria il potere trasmettitore, rimane inammissibile quello di risonanza.

Roma, Gabinetto d'anatomia comparata, giugno 1890.

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Le figure 1 e 2, disegnate dal vero, rappresentano il laberinto membranoso del *Merlucius esculentus* Riss., spettante all'orecchio del lato destro.

Nella fig. 1, il laberinto è veduto lateralmente e dall'esterno; nella fig. 2 dal lato interno, per cui, da questo lato, scorgesi, nel saccolito, il solco dove espandesi il nervo acustico (*Ramus Sacculi. Macula acustica sacculi*), come pure il condotto endolinfatico (*de*).

Nell'una e nell'altra figura il laberinto è stato liberato da tutti i rami dell'acustico, per metter meglio in evidenza le altre parti e specialmente il rapporto degli otoliti con queste.

Ingrandimento delle fig. diam. 3,5.

Le seguenti indicazioni servono per tutte due le figure:

S. *Sacculus.*
U. *Utriculus.*
L. *Lagena.*
ca. *canalis membranaceus anterior.*
cp. *canalis membranaceus posterior.*
cl. *canalis membranaceus lateralis.*
aa. *ampulla anterior.*
ap. *ampulla posterior.*
al. *ampulla lateralis.*
ru. *recessus utriculi.*
ssu. *sinus superior utriculi.*
de. *ductus endolymphaticus.*
ass. *apex sinus superioris.*
Sl. *Saccolithus* (*mihi*).
Al. *Ascidiolithus* (*mihi*).
Ll. *Lagenolithus* (*mihi*).

Digitized by Google

FIG. 3. Cranio di *Gadus minutus*, LIN. in grandezza naturale pel quale si scorgono le capsule auricolari (*cap. au.*) molto grandi e disposte in senso parallelo all'asse mediano longitudinale del capo.

FIG. 4. Cranio di *Uranoscopus scaber*, LIN. in grandezza naturale, dove si vedono le capsule auricolari (*cap. au.*) di uno sviluppo considerevole, ma minore di quello che si è osservato nel *gadus minutus*, ed orientate in modo che il loro asse longitudinale converge posteriormente coll'asse mediano del cranio.

FIG. 5. Cranio di *Mugil cephalus*, CUV. nel quale le capsule auricolari (*cap. au.*) relativamente alle altre, finora considerate, sono poco sviluppate. Grandezza naturale.

FIG. 6. Cranio di *Esox lucius*, LIN. di grandezza naturale. Le capsule auricolari (*cap. au.*) presentano un tipo diverso da quelli finora indicati; poichè il loro asse longitudinale converge anteriormente coll' asse longitudinale mediano del capo.

FIG. 7. Cranio di *Merlucius esculentus*, RISS. in grandezza naturale, veduto ventralmente. In esso si scorgono nella regione posteriore le sporgenze delle capsule auricolari molto grandi.

Le ossa che limitano e compongono dette capsule sono le seguenti:

or. sph.	*orbitosphenoideum*,
po. fr.	*post frontale.*
sq.	*squamosale.*
oc. lat.	*occipitale laterale s. pleuroccipitale.*
ad. oc.	*adoccipitale s. opistoticum.*
ot. sph.	*otosphenoideum s. prooticum.*
hy. sph.	*hyposphenoideum.*
bas. oc.	*basioccipitale.*

FIG. 8. Sezione trasversa semischematica della testa del *Merlucius esculentus* Riss. per dimostrare che lo spessore minimo delle pareti craniche e degli organi che lo rive-

Digitized by Google

stono si trovano in corrispondenza della faccia ventrale delle capsule craniche. La sezione cade alquanto più indietro della metà di dette capsule ed è in grandezza naturale.

t. *tegumenti.*
m. *muscoli.*
ic. *impalcatura cranica.*
mp. *mucosa palatina.*
cb. *cavità boccale.*
en. *encefalo,*
bt. *branchie.*
cp. *canalis membranaceus posterior.*
cl. *canalis membranaceus lateralis.*
u. *utriculus.*
s. *sacculus.*
sl. *saccolithus.*
ras. *ramus acusticus sacculi.*
mas. *macula acustica sacculi.*

Digitized by Google

RELAZIONE sulla Memoria dei Dottori F. S. MONTICELLI e G. CRETY intitolata: « *Ricerche intorno alla sottofamiglia Solenophorinae.*

Gli Autori, premessa la bibliografia riguardante l'argomento del loro lavoro, studiano anzitutto la forma esterna e l'interna struttura delle specie dei generi *Solenophorus* e *Duthiersia* passando in rassegna tutti i sistemi di organi. Da questo studio risulta che i due generi sopradetti, distinti per l'ospite nel quale si sogliono trovare, (poichè il genere *Duthiersia* si trova costantemente parassita dei Varanidi, mentre il genere *Solenophorus* lo è dei *Boidi*) lo sono anche per la loro interna struttura e devono essere conservati distinti nelle classificazioni

Gli A. studiano quindi i generi *Solenophorus* e *Duthiersia* nei loro rapporti, zoologici ed anatomici col genere *Botriocephalus*. Ne risulta che le affinità dei due primi generi con quest'ultimo sono grandissime ma non tali tuttavia da legittimare la riunione proposta dal PERRIER dei tre generi in uno solo. Anzi gli Autori della Memoria affidata al nostro esame credono di poter costituire pei due generi *Solenophorus* e *Duthiersia* una sottofamiglia distinta, quella delle *Solenophorinae* da contrapporsi a quella della *Botriocephalinae.*

Gli A. fanno in seguito una revisione critica delle specie fino ad ora conosciute della sottofamiglia *Solenophorinae*.

Questa sottofamiglia comprende i generi *Solenophorus* e *Duthiersia*. Pel genere *Solenophorus* gli Autori conchiudono; che esso contiene una sola specie il *Solenophorus megalocephalus* di CREPLIN e che le numerose specie descritte sono semplici sinonimi di questa. Anche pel genere *Duthiersia* gli Autori considerano una sola specie la *D. fimbriata* DIESING, riunendo ad essa la *D. elegans* PERRIER.

Per fare questo studio gli Autori hanno esaminato i tipi delle specie descritte, conservati nei principali Musei d'Europa.

Digitized by Google

Una tavola di disegni raffiguranti le particolarità più importanti di struttura accompagna questo lavoro.

I sottoscritti ritengono la Memoria presentata dai Dottori Monticelli e Crety essere un buon contributo per la conoscenza dei Solenoforini, gruppo di vermi parassiti fin ad oggi non ben noto, e perciò ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

Torino, 8 gennaio 1891.

G. Bizzozero
L. Camerano *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Gennaio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice-Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore della Classe, CLARETTA, ROSSI, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE MARTIIS, GRAF e PEYRON, che funge da Segretario pel Socio Senatore Gaspare GORRESIO, assente per motivo di salute.

Si legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Socio Ermanno FERRERO, condeputato col Socio Antonio MANNO, ad esaminare il lavoro del Dott. Carlo MERKEL, intitolato « *La dominazione di Carlo I d'Angiò in Piemonte ed in Lombardia, ed i rapporti di essa colle guerre contro re Manfredi e Corradino*, » presentato per essere accolto nei volumi delle *Memorie*, riferisce intorno a questo lavoro, a nome anche del collega assente. Nota il Relatore l'attinenza di questa Memoria con le due dello stesso Autore sopra « *Il Piemonte e Carlo I d'Angiò*, » già stampata nelle *Memorie* dell'Accademia; e pone in rilievo i pregi di questa terza, considerandola non così sotto l'aspetto di lavoro storico, come sotto quello di lavoro monografico. Secondo le conclusioni dei Soci Commissari, la Classe ammette il lavoro del Dott. MERKEL alla lettura, e in seguito ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Digitized by Google

LETTURE

SUNTO della Memoria del dott. Carlo **Merkel**: « *La dominazione di Carlo I d'Angiò in Piemonte ed in Lombardia, ed i rapporti di essa colle guerre contro re Manfredi e Corradino.* »

Questo lavoro si compone di due parti: La prima esamina i preparativi fatti da Carlo d'Angiò innanzi di recarsi alla conquista di Sicilia; li esamina sia nelle trattative diplomatiche coi pontefici e coi signori dell'Italia settentrionale, sia nei negoziati per avere l'ufficio di senatore di Roma, sia anche nei trattati di pace fatti coi comuni piemontesi, affine di essere libero nell'impresa. Questa parte termina colla descrizione del passaggio dell'esercito angioino per l'Italia. In tale periodo la dominazione del conte di Provenza, limitata dapprima solo alla parte sud-ovest del Piemonte, servì di mezzo a numerose alleanze anzitutto coi marchesi di Busca, di Monferrato e di Saluzzo, poi coi Torriani, e così via via coi comuni e signori più lontani.

Nel secondo periodo la dominazione di Carlo d'Angiò sul Piemonte, anzi la sua egemonia sull'Italia superiore non influì più sui fatti del regno di Sicilia; ma, all'opposto, ebbe influenza da questi. Qui l'autore studiò le condizioni, in cui rimasero il Piemonte e la Lombardia subito dopo il passaggio dell'esercito angioino; allora i guelfi ebbero dappertutto il sopravvento, ma senza che perciò Carlo acquistasse su questi paesi maggiore potenza. Cresciuto poi il potere di lui nell'Italia, ed aumentate pure le sue pretensioni, i guelfi dell'Italia settentrionale si raffreddarono verso di lui; quindi l'autorità del re sull'Italia settentrionale diminuì ancora, e fu persino resa possibile la traversata di Corradino per la Lombardia ed il Piemonte. Allora Carlo

Digitized by Google

d'Angiò, fatto accorto del vantaggio che per lui aveva la signoria del Piemonte e della Lombardia, liberato altresì dall'opposizione dei papi all'estendersi della sua potenza e cresciuto in questa per la vittoria riportata su Corradino, chiese ai comuni lombardi la riconferma dei trattati, con cui essi nel 1265 si erano impegnati ad aiutarlo, e riuscì nel suo intento. Così nel 1270, anno, con cui si chiudono le ricerche contenute in questo lavoro, tutta l'Italia settentrionale era sottomessa a Carlo d'Angiò; ma in misura diversa, poichè mentre sulla Lombardia Carlo ebbe solo una autorità morale, per così dire, la quale poi ai primi rovesci da lui toccati, si sfasciò; nel Piemonte, all'opposto, ebbe una vera signoria, la quale, sebbene sia poi anch'essa rovinata in poco tempo, ciò non di meno conservò tenaci radici.

L' Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

dal 28 Dicembre 1890 all' 11 Gennaio 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono

Donatori

Donatori	
Stazione enolog. d'Asti.	* Le Stazioni sperimentali agrarie italiane: Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, ecc., diretto dal Prof. Ing Mario ZECCHINI; vol. XIX, fasc. 5. Asti, 1890; in-8°.
Accademia di Scienze ed Arti di Batavia.	* Tijdschrift voor Indische Taal, Land-en Volkenkunde; uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, etc.; Deel XXXIV, Aflevering 1. Batavia, 1890; in-8°.
Id.	— – Notulen van de Algemeene en Bestuurg-Vergaderingen van het Bataviaasch, etc.,; Deel XXVIII, 1890, Afler. 1. Batavia, 1890; in-8°.
Id.	—— Nederlandsch-Indisch Plakaatboek, 1602-1811, door Mr. I. A. van der CHIJS; zevende Deel, 1755-1764. Batavia, 1890; in-8°.
La Direzione (Berlino).	* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begründet von C. OHRTMANN, etc., herausg. von Emil LAMP: Band XX, 1888, Heft 1. Berlin, 1890; in-8°.
Reale Accademia delle Scienze di Copenaghen.	* Det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6e Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afd.: Bd. VII, 1 — Studier over nogle numeriske Funktioner af J. P. GRAM; 2 — Methoder til korte Tiders,

Digitized by Google

saerlig Rotationstiders, Udmaaling: En experimental Undersögelse af K. Prytz: 3 — Cirolanidae et familiae nonnullae propinquae Musae Hauniensis; et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr ved H. I. Hansen. Kjöbenhavn, 1890; in-4°.

—— Oversigt over det k. Danske Vidensk. Selsk. Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1890, n. 2 (Mars-Mai). Kiöbenhavn, 1890; in-8°. — R. Acc. delle Sc. di Copenaghen.

Neue Annalen der k. Sternwarte Bogenhausen bei München; auf kosten der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, herausg. von Hugo Seeliger, Director der k. Sternw.; Band I. München, 1890; in-4°. — R. Osservatorio di Bogenhausen (Monaco B).

* Annales de la Société belge de Microscopie; t. XIII, 3 fasc. Bruxelles, 1890; in-8°. — Società belga di Microscopia (Bruxelle).

—— Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVII, n. 2. Bruxelles, 1890; in-8°. — Id.

* Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol XX, n. 3. Carnivora and artiodactyla, by W. B. Scott: Perissodactyla, by Henry F. Osborn Cambridge, 1890; n-8°. — Museo di Zool. compar. (Cambridge).

* Annales de la Société géologique de Belgique: t. XVII, 1° et 2° livrais. Liège, 1890; in-8°. — Società geologica del Belgio (Liegi).

* Berichte über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Classe 1890; II. Leipzig, 1890; in-8°. — R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).

* Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. J. V. Carus in Leipzig, etc., XIII Jahrg., n. 352. Leipzig, 1890; in 8°. — I. V. Carus (Lipsia)

* Journal of the R. Microscopical Society of London; 1890, part 6. London, 1890; in-8°. — R. Società Microscopica di Londra.

* Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou, etc.; année 1889; n. 4; année 1890, n. 1. Moscou, 1890; in-8°. — Società imperiale de' Naturalisti di Mosca.

* Atti dell'Accademia Pontaniana; vol. XIX, XX. Napoli, 1889-90; in-4°. — Acc. Pontaniana di Napoli.

—— Indice di tutti i volumi degli *Atti* della Società e dell'Accademia Pontaniana pubblicati dal 1810 al 1890; 1 fasc. in-4°. — Id.

—— Annuario dell'Accademia Pontaniana, 1891 (anno CCCCXLIX della sua fondazione). Napoli, 1891; 1 fasc. in-16°. — Id.

Digitized by Google

Circolo Matem. di Palermo. * Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; t. IV, fasc. 6. Palermo, 1890; in-8° gr.

Società fisico-chimica di Pietroborgo. Journal de la Société physico-chimique russe à l'Université de S.-Péterbourg: t. XXII, n. 8. S.-Pétersbourg, 1890; in-8°.

Osserv. astronom di Pietroborgo. * Repertorium Für Meteorologie herausg. von der k. Akademie der Wissenschaften, redigirt von Dr. H. Wild; Band XIII. St.-Pétersbourg, 1890; in-4°.

Società generale dei Viticol. ital. (Roma). Bollettino della Società generale dei Viticoltori Italiani; anno V, n. 23, 24. Roma, 1890; in-8° gr.

La Direzione (Roma). * Rivista di Artiglieria e Genio; vol. IV, dicembre 1890. Roma; in-8°.

Club alpino Ital. (Torino). * Rivista mensile del Club alpino italiano, ecc.; vol. IX, n. 12. Torino, 1890; in 8°.

La Direzione (Venezia). * Notarisia — Commentarium phycologicum, etc. Rivista bimestrale consacrata allo studio delle alghe, ecc.; anno V, n. 21. Venezia, 1890; in-8°.

Governo degli St. Un. d'Am. (Washington). Department of the Interior — Monographs of the United States geological Survey; vol. XV, part I, Text: The Potomac or Younger Mesozoic Flora, by William Morris Fontaine; — part II, Plates: vol. XVI — The Paleozoic Fishes of North America, by John Strong Newberry. Washington, 1889: 3 vol. in-4°.

Id. —— Eight annual Report of the United States geological Survey to the Secretary of the Interior, 1886-87. by I. W. Powell Director; parts I, II. Washington, 1889; in-4°.

Id. —— Bulletin of the United States geological Survey: n. 54 — On the thermoelectric measurement of high temperatures: n. 55 — Report of work done in the division of Chemistry and Physics, mainly during the fiscal year 1886-87; n. 56 — Fossil wood and lignite of the Potomac formation; n. 57 — A geological reconnaissance in southwestern Kansas. Washington, 1890; in-8°.

L'Autore. Die Thermalquellen Wiesbadens in chemischer beziehung; von Dr. R. Fresenius. Wiesbaden, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'A. Sur les lois des grandes épidémies catarrhales, la manière de les vérifier, et sur quelques graves complications thorachiques: Note adressée au X. Congrès international de Médecin à Berlin par le Prof. L. Galassi. Rome, 1890; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

S. Laura — Medicina esatta terapeutica dosimetrica, ecc.; anno VIII, n. 11-12. Torino, 1890; in-8°. — S. Laura.

Des mouvements périodiques du sol accusés par des niveaux à bulle d'air; par M. Plantamour (Extr. des *Archives des Sciences phisiques et naturelles* t. XXIV, p. 441); 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques, par I. R. Ridberg (Mémoire présenté à l'Académie R des Sciences de Suède le 13 Novembre 1889). Stockolm, 1890; 155 pag. in-4°. — L'A

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 4 al 18 Gennaio 1891

Donatori

* Publications de l'École des Lettres d'Alger — Bulletin de Correspondance Africaine: — Essai sur la vie et les ouvrages du chroniqueur Gonzalo de Ayora, suivi de fragments inédits de sa Chronique; par E. Cat Paris, 1890; 1 fasc. in-8°. — Scuola di Lettere d'Algeri.

—— Rites égyptiens — Construction et production des édifices; par E. Lefébvre. Paris, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

—— Le dialect de Syouah; par Renè Basset. Paris, 1890; 1 fasc. in 8°. — Id.

* Analele Academiei Romane; Seria 2, tom. XII, 1889-1890 (partea administrativa si desbaterile). Bucuresci, 1890; in-4°. — Accad. Rumena delle Scienze (Bukarest).

—— Indice alfabeticŭ alŭ cuprinsuluĭ volum XI, din ser 1ª, si I-X din seria 2ª. Bucuresci, 1890; 1 fasc. in-4°. — Id.

Nunta la Români; Studiŭ istorico-etnograficŭ comparativŭ de S. Fl. Marianŭ. Bucuresci, 1890; 1 vol. in-8°. — Id.

— Lege, Statute, Regulamente si Decisiuni; MDCCCXC. Bucuresci, 1890; 1 fasc. in-16°. — Id.

* Det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 6 Raekke, hist. og philos. Afd.; 1 Band, 1. — Beröringer nollen de finske og de baltiske (litanisk-lettiske) Sprog; En sproghistorisk Undersögelse af Wilh. Thomsom. Kjöbenhovn, 1890; in-4°. — Reale Accademia delle Scienze di Copenaghen.

Digitized by Google

Bibl. nazionale di Firenze. — Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1890, n. 120. Firenze, 1890; in-8° gr.

Lipsia. * * — Allgemeine deutsche Biographie; (Band XXXI, Lfg. 2 und 3) und 152 153 Lieferung; Leipzig, 1890; in-8°.

R. Accademia delle Scienze di Lisbona. — Historia do Infante D. Duarte, Irmão de el-Rei D. João IV, por José RAMOS-COELHO; t. II. Lisboa, 1890; in-8°.

La Direzione (Milano). — Nuovo Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti; serie 3, vol. III e IV, fasc. 8-10. Milano, 1890; in-8°.

(Milano) * * — Card. Guglielmo MASSAIA Capp. — I miei trentacinque anni di missione nell'alta Etiopia; vol. VIII. Milano, 1890; in-4°.

Soc. di Geografia (Parigi). — * Bulletin de la Société de Géographie, etc.; 7e série, t. XI, 3e trimestre 1890. Paris, 1890; in-8°.

Id. — * Compte-rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1890, n. 16 et 17, pag. 533-584. Paris; in-8°.

R. Deputazione di Storia Patria (Torino). — * Indices chronologici ad *Antiquitates Ital. M. Æ.* et ad opera minora Lud. Ant. MURATORII: scripserunt Joannes Michäel BATTAGLINO et Joseph CALLIGARIS; operis moderamen sibi susceperunt Carolus CIPOLLA et Antonius MANNO, Curatores Taurinenses studiis historiae patriae promovendis; fasc. III (pag. 121-180). Augustae Taurinorum, An. M.D.CCC.XC; in-4°.

G. CORA (Torino). — * Cosmos — Comunicazioni sui progressi più recenti e notevoli della Geografia e delle scienze affini; del Prof. G. CORA; vol. X, n. 5-6. Torino, 1890; in-8° gr.

La Direzione (Valle di Pompei). — Il Rosario e la Nuova Pompei — Periodico mensuale, ecc.; anno VII, quad. 12. Valle di Pompei, 1890; in-8°.

L'Autore. — Sopra la sorveglianza speciale, la libertà preparatoria, e l'ammonizione repressiva; Cenni critici preceduti da un sunto storico di alcune recenti proposte per rimedii preventivi e repressivi; del Dott. Emilio BRUSA. Milano, 1866; 1 fasc. in-8°.

L'A. — Studi sulla *recidiva*, del Dott. Emilio BRUSA; vol I, parte 1a. Milano, 1866; in-8°.

Id. — Il Codice penale zurighese entrato in vigore il 1° febbraio 1871; versione italiana preceduta da un'Introduzione critica dell'Avv. Emilio BRUSA, con note del medesimo e del Prof. Francesco CARRARA, a servizio della Legislazione patria e comparata. Venezia, 1875; 1 vol. in-8°.

Digitized by Google

I pareri sul processo Arnim in seconda istanza, con alcune considerazioni a servizio della futura legislazione italiana; di Emilio Brusa. Venezia, 1875; 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

Dell'odierno diritto internazionale pubblico; Studi critici di Emilio Brusa. Prato, 1875; 1 vol. in-8°. — Id.

Des récidivistes, par M. Emile Brusa. Toulouse, 1876; 1 fasc. in-8° picc. — Id.

De la Science en général et de l'École pénale italienne en particulier; Discours d'entrée lu le 16 février 1878, par Emile Brusa, Prof. à l'Université d'Amsterdam. Amsterdam, 1878; 1 fasc. in-8°. — Id.

Necrologie — Guido Padelletti; 1843-1878 (Extr. de la *Revue de droit international et de législation comparée*, livr. III, 1878); par Emile Brusa; 1 fasc. in-8°. — Id.

E. Brusa — La Riforma penitenziaria in Italia. Roma, 1879; 1 fasc. in-8°. — Id.

Emilio Brusa, Prof. di Diritto penale nella R. Univ. di Torino — Il progetto di Codice penale croato confrontato con quello austriaco e col codice ungherese da Emilio Tauffer. Civitavecchia, 1880; 1 fasc. in-8°. — Id.

Emilio Brusa — Sul giurì, ad occasione delle recenti discussioni dei giuristi svizzeri. Torino, 1882; 1 fasc. in-8°. — Id.

Codice penale olandese, 3 marzo 1881, tradotto e annotato a cura della *Rivista penale*; con cenni storici di Emilio Brusa. Firenze, 1882; 1 fasc. in-8°. — Id.

Emilio Brusa — Del reato commesso all'estero (Estr. dalla *Rivista penale*, vol. XVI, fasc. 5, 1882); pag. 37 in-8°. — Id.

Emilio Brusa — Del reato commesso all'estero (Estr. dalla *Rivista penale*, vol. XXIII-XXIV, 1882-83); pag. 71; in-8°. — Id.

Il terzo congresso internazionale penitenziario e quello antropologico criminale (Estr. dalla *Rivista penale*, vol. XXIII, XXIV, 1886); di Emilio Brusa; 1 fasc. in-8°. — Id.

Emilio Brusa, Prof. di Diritto nella R. Univ. di Torino — Sul nuovo positivismo nella giustizia penale; Riflessione di un criticista che preferirebbe il vecchio. Torino, 1887; 1 vol. in-8°. — Id.

Prolegomeni al Codice penale, di Emilio Brusa, Prof. ord. nell'Univ. di Torino. Torino, 1888; 1 vol. in-8° picc. — Id.

Digitized by Google

L'Autore. Bibliographie pénitentiaire et pénale en Italie depuis le commencement du siècle jusqu'à nos jours, par M. Emile BRUSA, Prof. de Droit à l'Univ. de Turin. Rome, 1888; 157 pag. in-8°.

Id. E. BRUSA — Osservazioni sul libro I, titolo I del progetto di Codice penale per il Regno d'Italia, approvato con la Legge 22 nov. 1888; Analogia nell'interpretazione della Legge penale, efficacia nel tempo e nello spazio. Milano, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Della concausa nell'omicidio (art. 348 del progetto di Codice penale italiano) Torino, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. E. BRUSA — Sul sistema penale del nuovo progetto di Codice. Roma, 1889; 1 fasc. in-8°.

L'Autore. Relazione alla Commissione direttiva dei festeggiamenti per la commemorazione centenaria della scoperta del Nuovo Mondo nel 1892 (del Sindaco di Genova, Presidente della Commissione, Comm. CASTAGNOLA). Genova, 1890; 1 fasc. in-4°.

G. MAZZATINTI. Dott. G. MAZZATINTI, Prof. nel R. Liceo di Forlì — Inventari dei manoscritti delle Biblioteche d'Italia; Pubblicazione bimestrale, anno I, n. 1. Forlì, 1891; in-4°.

L'A. Gio. ORMEZZANO — Cenni storici sul R. Collegio Carlo Alberto per gli Studenti delle Provincie in Torino, e sulle varie fondazioni al medesimo annesse. Torino, 1891; 1 vol. in-8°.

L'A. Convitto nazionale di Genova — Villeggiatura e viaggi d'istruzione negli anni 1888, 1889, 1890; Relazioni del Preside-Rettore, Dott. Paolo PAVESIO. Genova, 1890; 1 fasc. in-8°.

Il Traduttore. Collection orientale — t. XVI: 2e série, t. II — Tezkereh-i-Evliâ — Le Mémorial des Saints traduit sur le manuscrit ouïgour de la Bibliothèque nationale, par A. PAVET de COURTEILLE; ports 1 and 2. Paris, 1889; in-fol°.

L'A. Cesare Correnti, a proposito del libro di Tullo Massarani; Parole di Gaetano SANGIORGIO. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°.

Torino, Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
258 (350) 10 III-91

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Gennaio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci; Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Presidente partecipa la dolorosa perdita di due Soci Corrispondenti dell'Accademia, cioè quella del luogotenente generale G. B. Liagre e quella di Edoardo Sang, della Società di Scienze ed Arti di Edimburgo.

Vengono presentati in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi Autori:

1° Dal Socio Basso, « *Annuario meteorologico italiano pubblicato per cura del Comitato direttivo della Società meteorologica italiana* (anno VI, 1891); 1 vol. in-16°;

2° Dal Socio Naccari, « *La Scuola tecnica ed il Ginnasio,* » del Prof. Eugenio Semmola di Napoli;

3° Dal Socio Segre, « *Guida del calcolo delle coordinate geodetiche,* » del Prof. Nicodemo Jadanza, dell'Università di Torino.

Il Socio D'Ovidio legge un suo lavoro che si collega ad altri già presentati in adunanze precedenti, col titolo: *Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva.* Questa monografia sarà pubblicata negli *Atti*.

Digitized by Google

LETTURE

Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva;

Nota di ENRICO D'OVIDIO.

§ 1. La presente Nota fa seguito a quella dal titolo: *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva*, inserita negli Atti dell'Accademia di Torino (vol. XXVI, 10 gennaio 1891), e presuppone la conoscenza di una parte di essa, cioè dei §§ 1, 2, 3, 10.

La conica A assoluto del piano abbia per equazioni in coordinate di punti e di rette

$$a_{xx} \equiv \sum a_h x^2_h = 0 \quad , \quad \alpha_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha_h \xi^2_h = 0 \quad , \quad (h = 1\,,\,2\,,\,3)\ ,$$

ove $a_h \alpha_h = 1$; e siano $a \equiv a_1 a_2 a_3$, $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ i discriminanti di a_{xx} , $\alpha_{\xi\xi}$, onde $a\alpha = 1$.

Una conica C qualunque del piano abbia le equazioni

$$c_{xx} \equiv \sum c_h x^2_h = 0 \ , \quad \gamma_{\xi\xi} \equiv \sum \gamma_h \xi^2_h = 0 \ ,$$

ove $c_h \gamma_h = 1$; e siano $c \equiv c_1 c_2 c_3$, $\gamma \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ i discriminanti di c_{xx} , $\gamma_{\xi\xi}$, onde $c\gamma = 1$.

I due invarianti simultanei di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ sono

$$\sigma \equiv \sum \alpha_h \alpha_k \gamma_l \ , \quad \sigma' \equiv \sum \gamma_h \gamma_k \alpha_l \ ,$$

ove hkl sta pei gruppi 123, 231, 123.

Il covariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx} è

$$u_{xx} \equiv \sum (\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k) x^2_h \ .$$

Posto $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda$, una conica qualunque C_λ della schiera confocale a C avrà le equazioni (cfr. la Nota citata, 1 e 3)

$$\gamma_{\lambda,\xi\xi} \equiv \sum \gamma_{\lambda h} \xi^2_h = 0 \ , \quad c_{\lambda,xx} \equiv \sum c_{\lambda h} x^2_h = 0 \ ,$$

Digitized by Google

ove

$$\gamma_{\lambda h} \equiv \alpha_h \lambda_1 + \gamma_h \lambda_2 \ , \quad c_{\lambda h} \equiv \frac{1}{\gamma_{\lambda h}} = \frac{a_h c_h}{a_h \lambda_2 + c_h \lambda_1} \ .$$

Le A e C non sono altro che $C_{1:0}$ e $C_{0:1}$.

Se si pone $\alpha_k \gamma_l - \alpha_l \gamma_k \equiv (\alpha\gamma)_h$, $\lambda_1 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_1 \equiv (\lambda\lambda')$, ..., si avrà

$$(\alpha\gamma_\lambda)_h = (\alpha\gamma)_h \lambda_2 \ , \quad (\gamma_\lambda \gamma_{\lambda'})_h = (\alpha\gamma)_h (\lambda\lambda') \ .$$

Tutte le coniche A, C, C_λ, ... sono riferite al triangolo autoconiugato rispetto a A e C e a tutte le altre. Indicando con O_h e o_h un vertice e il lato opposto di questo triangolo, con P_h e P'_h i punti Co_h, con $P_{\lambda h}$ e $P'_{\lambda h}$ i punti $C_\lambda o_h$, con p_h e $p_{\lambda h}$ i segmenti $P_h P'_h$, $P_{\lambda h} P'_{\lambda h}$ nel senso della metrica proiettiva, avremo (Nota cit., 2)

$$(\alpha\gamma)_h \cos p_h = \alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k \ , \quad (\alpha\gamma_\lambda)_h \cos p_{\lambda h} = \alpha_k \gamma_{\lambda l} + \alpha_l \gamma_{\lambda k} \ ;$$

e quindi

$$\alpha_h (\alpha\gamma)_h (\cos p_{\lambda h} - \cos p_h) = 2\,\alpha\lambda = \text{costante con } \lambda \ ,$$

e

$$\sum \frac{1}{\cos p_{\lambda h} - \cos p_h} = 0 \ .$$

Avremo anche

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h \operatorname{sen}^2 p_h = -4\,\alpha\alpha_h \gamma_k \gamma_l \ , \quad \alpha^2_h (\alpha\gamma_\lambda)^2_h \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h} = -4\,\alpha\alpha_h \gamma_{\lambda k} \gamma_{\lambda l} \ ,$$

onde

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 2\,\alpha\lambda \left[2\,\alpha\lambda + 2\,\alpha_h(\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k)\right] \ ;$$

e quindi

$$\sum \alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 4\,\alpha\lambda (3\,\alpha\lambda + 2\,\sigma) = \text{cost. con } \lambda \ ,$$

e

$$\sum \alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 0 \ .$$

La penultima equazione e l'analoga relativa all'indice k porgono

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) - \alpha^2_k (\alpha\gamma)^2_k (\operatorname{sen}^2 p_k - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda k})$$
$$= 4\,\alpha\lambda\,\alpha_l (\alpha\gamma)_l = \text{cost. con } \lambda \ ;$$

Digitized by Google

e le stesse due equazioni, avendo nullo il risultante rispetto a $2\alpha\lambda$, porgono altresì

$$\left[\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h(\text{sen}^2 p_h - \text{sen}^2 p_{\lambda h}) - \alpha^2_k(\alpha\gamma)^2_k(\text{sen}^2 p_k - \text{sen}^2 p_{\lambda k})\right]^2$$
$$+\alpha_l(\alpha\gamma)_l \left[\begin{array}{l} \alpha_k(\alpha_l\gamma_h + \alpha_h\gamma_l)\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h(\text{sen}^2 p_h - \text{sen}^2 p_{\lambda h}) \\ -\alpha_h(\alpha_k\gamma_l + \alpha_l\gamma_k)\alpha^2_k(\alpha\gamma)^2_k(\text{sen}^2 p_k - \text{sen}^2 p_{\lambda k}) \end{array}\right] = 0 \ .$$

Va notato che $\alpha_h(\alpha\gamma)_h$, $\alpha_k(\alpha\gamma)_k$, $\alpha_l(\alpha\gamma)_l$ sono proporzionali ad altre quantità formate mediante le distanze tra i fuochi (Nota cit., 3 e 4), e quindi possono esser surrogate da queste quantità in quelle relazioni in cui entrano omogeneamente. Del pari $a_k a_l c_h$. $a_l a_h c_k$, $a_h a_k c_l$ sono proporzionali ad altre quantità formate mediante p_h, p_k, p_l (ibid.).

Adoperando le denominazioni adottate nella precedente Nota, quelle ora esposte sono delle relazioni fra le grandezze degli assi principali di due coniche confocali.

Nel caso più ovvio che l'assoluto A si riduca a una coppia di punti, basta supporre $\alpha_3 = 0$ e ricordare che allora si assume $p^2_h = \lim \frac{\text{sen}^2 p_h}{\alpha}$ per $\alpha_3 = 0$, e così via. Dedurremo così da una delle precedenti relazioni

$$p^2_1 - p^2_{\lambda 1} = p^2_2 - p_{\lambda 2}^2 = \frac{4\lambda}{\alpha_1\alpha_2\gamma_3} \ ,$$

$$p^2_{\lambda 1} - p^2_{\lambda 2} = p^2_1 - p^2_2 = \text{cost.}$$

In aggiunta al § 2 della Nota precedente, osserviamo che per un assoluto qualunque si ha

$$\text{sen}^2 p_h - \text{sen}^2 p_k = -\frac{4\,\alpha_l\gamma_l(\alpha\gamma)_l(\alpha_h\alpha_k\gamma^2_l - \gamma_h\gamma_k\alpha^2_l)}{(\alpha\gamma)^2_h\,(\alpha\gamma)^2_k} \ ;$$

e quando $\alpha_3 = 0$,

$$p^2_1 - p^2_2 = -\frac{4\,(\alpha\gamma)_3}{\alpha^2_1\,\alpha^2_2\,\gamma_3} \ .$$

§ 2. Nella schiera A, C, C_λ,... vi sono due coniche che passano per un punto dato $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$. Le loro tangenti t', t'' in P' sono i raggi doppî dell'involuzione delle coppie di tangenti tirate da P' alle coniche della schiera, e sono quindi perpendicolari. I valori del parametro λ corrispondenti alle due coniche

Digitized by Google

per P' siano λ', λ''; cosicchè saranno esse indicate da $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$. Saranno λ' e λ'' le radici della equazione

$$c_{\lambda,x'x'}=\sum\frac{x'^2_h}{\gamma_{\lambda h}}=0 \quad ,$$

e però sarà

$$(\lambda\lambda')(\lambda\lambda'')=\sum x'^2_h\gamma_{\lambda k}\gamma_{\lambda l}=\alpha a_{x'x'}\lambda^2_1+u_{x'x'}\lambda_1\lambda_2+\gamma c_{x'x'}\lambda^2_2 \quad ,$$

$$\lambda'_1\lambda''_1=\gamma c_{x'x'} \quad , \quad \lambda'_1\lambda''_2+\lambda'_2\lambda''_1=-u_{x'x'} \quad , \quad \lambda'_2\lambda''_2=\alpha a_{x'x'} \quad ;$$

e per $\lambda_1=\gamma_h$, $\lambda_2=-\alpha_h$ avremo

$$\gamma_{\lambda' h}\gamma_{\lambda'' h}=-(\alpha\gamma)_k(\alpha\gamma)_l x'^2_h \quad .$$

Se poniamo

$$\frac{x_h}{\gamma_{\lambda h}}\equiv\tau_h \quad , \quad \frac{x'_h}{\gamma_{\lambda' h}}\equiv\tau'_h \quad , \quad \frac{x'_h}{\gamma_{\lambda'' h}}\equiv\tau''_h \quad , \quad \tau_x\equiv\sum\tau_h x_h \quad ,\ldots ,$$

sarà

$$c^{\lambda}{}_{,xx}=\tau_x \quad , \quad c_{\lambda',xx}=\sum\frac{\tau'_h}{x'_h}x^2_h \quad , \quad c_{\lambda'',xx}=\sum\frac{\tau''_h}{x'_h}x^2_h \quad ;$$

ed otterremo per le tangenti t', t'' le equazioni

$$\tau'_x=0 \quad , \quad \tau''_x=0 \quad .$$

Inoltre sarà

$$\tau'_{x'}=0 \quad , \quad \tau''_{x'}=0 \quad ,$$

e quindi

$$x'_1:x'_2:x'_3=(\tau'\tau'')_1:(\tau'\tau'')_2:(\tau'\tau'')_3 \quad .$$

Si ha pure

$$\frac{(\alpha\gamma)_h}{\tau'_h\tau''_h}=\ldots=-(\alpha\gamma)_1(\alpha\gamma)_2(\alpha\gamma)_3 \quad ,$$

$$(\tau'\tau'')_h=-\frac{(\alpha\gamma)_h x'_k x'_l(\lambda'\lambda'')}{\gamma_{\lambda' k}\gamma_{\lambda' l}\gamma_{\lambda'' k}\gamma_{\lambda'' l}}=-\frac{(\lambda'\lambda'')}{(\alpha\gamma)_1(\alpha\gamma)_2(\alpha\gamma)_3 x'_k x'_l} \quad .$$

§ 3. Consideriamo una retta data $o(\omega_x=0)$. Le coniche, rispetto a cui il triangolo $t't''o$ è autoconiugato, formano una rete, e l'equazione di una di esse in coordinate di punti è

$$\mu_1 y^2_1+\mu_2 y^2_2+\mu_3 y^2_3=0 \quad ,$$

Digitized by Google

posto

$$y_1 \equiv \tau'_x \ , \quad y_2 \equiv \tau''_x \ , \quad y_3 \equiv \omega_x \ ;$$

sostituzione di modulo $(\tau'\tau''\omega)$.

Le stesse coniche formano un tessuto. E siccome i vertici del triangolo $t'\,t''\,o$ hanno le equazioni

$$\eta_1 \equiv (\xi\,\tau''\omega) = 0 \ , \quad \eta_2 \equiv (\xi\,\omega\,\tau') = 0 \ , \quad \eta_3 \equiv (\xi\,\tau'\,\tau'') = 0 \ ,$$

così l'equazione della precedente conica, considerata come elemento del tessuto, in coordinate di rette sarà

$$\frac{\eta^2_1}{\mu_1} + \frac{\eta^2_2}{\mu_2} + \frac{\eta^2_3}{\mu_3} = 0 \ .$$

Quelle coniche della rete-tessuto che passano pel punto O_h costituiscono un fascio: esse verificano la condizione

$$\mu_1 \tau'^2_h + \mu_2 \tau''^2_h + \mu_3 \omega^2_h = 0 \ .$$

Una di queste coniche tocca o_k, e sia R_h: per essa si verifica l'altra condizione

$$\mu_1 \tau'_h \tau'_l + \mu_2 \tau''_h \tau''_l + \mu_3 \omega_h \omega_l = 0 \ ;$$

e in virtù delle due condizioni l'equazione di R_h sarà, in coordinate di punti,

$$\begin{vmatrix} y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ \tau'^2_h & \tau''^2_h & \omega^2_h \\ \tau'_h \tau'_l & \tau''_h \tau''_l & \omega_h \omega_l \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Del pari, una conica del fascio tocca o_l, e sia R_l: la sua equazione sarà, in coordinate di punti,

$$\begin{vmatrix} y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ \tau'^2_h & \tau''^2_h & \omega^2_h \\ \tau'_h \tau'_k & \tau''_h \tau''_k & \omega_h \omega_k \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Digitized by Google

Quindi le equazioni delle medesime R_k, R_l in coordinate di **rette** saranno

$$\frac{\eta^2_1}{\tau''_h\omega_h(\tau''\omega)_k}+\frac{\eta^2_2}{\tau'_h\omega_h(\omega\tau')_k}+\frac{\eta^2_3}{\tau'_h\tau''_h(\tau'\tau'')_k}=0 \ ,$$

$$\frac{\eta^2_1}{\tau''_h\omega_h(\tau''\omega)_l}+\frac{\eta^2_2}{\tau'_h\omega_h(\omega\tau')_l}+\frac{\eta^2_3}{\tau'_h\tau''_h(\tau'\tau'')_l}=0 \ .$$

Essendo t', t'' coniugate rispetto ad A (perpendicolari), se si suppone che o sia la polare di P' rispetto ad A, anche A apparterrà alla rete-tessuto; e si avrà

$$\bar{a}_{yy}\equiv\frac{1}{\tau'_h\tau''_h\omega_h(\tau'\tau''\omega)}\begin{vmatrix} y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ \tau'_h\tau'_k & \tau''_h\tau''_k & \omega_h\omega_k \\ \tau'_h\tau'_l & \tau''_h\tau''_l & \omega_h\omega_l \end{vmatrix}=a_{xx} \ ,$$

$$\bar{\alpha}_{\eta\eta}\equiv\frac{\tau'_h\tau''_h\omega_h}{(\tau'\tau''\omega)}\left\{\frac{\eta^2_1}{\tau''_h\omega_h(\tau''\omega)_h}+\frac{\eta^2_2}{\omega_h\tau'_h(\omega\tau')_h}+\frac{\eta^2_3}{\tau'_h\tau''_h(\tau'\tau_h'')}\right\}=\alpha_{\xi\xi} \ ,$$

ove $\omega_h=a_hx'_h$.

Resta a indagare quando avviene che la schiera determinata da R_k e R_l sia confocale, vale a dire che A appartenga alla schiera; o ancora che esistano due numeri ν_1, ν_2 tali che, moltiplicando per essi le ultime equazioni di R_k, R_l e sommando, i coefficienti della nuova equazione riescano eguali ai coefficienti di $\alpha_{\eta\eta}$. Ciò condurrebbe alla relazione

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(\tau'',ax')_1} & \frac{1}{(\tau'',ax')_2} & \frac{1}{(\tau'',ax')_3} \\ \frac{1}{(ax',\tau')_1} & \frac{1}{(ax',\tau')_2} & \frac{1}{(ax',\tau')_3} \\ \frac{1}{(\tau'\tau'')_1} & \frac{1}{(\tau'\tau'')_2} & \frac{1}{(\tau'\tau'')_3} \end{vmatrix}=0 \ ,$$

verificata la quale, si avrebbe

$$\nu_1:\nu_2=\tau'_k(ax',\tau')_kx'_k:\tau'_l(ax',\tau')_lx'_l \ ;$$

or la detta relazione (moltiplicata per $x'_1x'_2x'_3$) è una relazione fra λ', λ'', $a_1,\ldots$, $\alpha_1,\ldots$, $\gamma_1,\ldots$ indipendente da $x'_1,\ldots$ e non

Digitized by Google

identica, e però in generale assurda, finchè A, C e P' rimangono affatto arbitrarî.

Ma non è più così quando A degenera in una coppia di punti ($\alpha_h = 0$ con $a_h \alpha_h = 1$); poichè allora la detta relazione è verificata e si ottiene $\nu_1 : \nu_2 = - x'_k : x'_l$.

§ 4. Esaminiamo dunque il caso che l'assoluto A consti di una coppia di punti L, L'. Allora la retta $L L'$ è una delle o_h, e sia o_3; sicchè $\alpha_3 = 0$ con $a_3 \alpha_3 = 1$. E si ha

$$\alpha_{\xi\xi} = \alpha_1 \xi^2_1 + \alpha_2 \xi^2_2 \,, \; \alpha = 0 \,, \; \alpha\, a_{xx} = \alpha_1 \alpha_2 x^2_3 \,, \; \alpha_3 a_{xx} = x^2_3 \,, \; \alpha_3 a_{xx'} = x'_3 x_3 \,;$$

e la polare di un punto qualunque P' è o_3.

Alcune delle precedenti identità ed equazioni si semplificano, perchè $\gamma_{\lambda 3} = \gamma_3 \lambda_2$, $\tau_3 = \frac{x_3}{\gamma_3 \lambda_2}, \ldots$; p. e. si ha

$$\lambda'_2 \lambda''_2 = \alpha_1 \alpha_2 x'^2_3 \,, \; \gamma_{\lambda' 1} \gamma_{\lambda'' 1} = \alpha_1 \gamma_3 (\alpha\gamma)_3 x'^2_1 \,, \; \gamma_{\lambda' 2} \gamma_{\lambda'' 2} = - \alpha_2 \gamma_3 (\alpha\gamma)_3 x'^2_2 \,,$$

$$\frac{\alpha_2 \gamma_3}{\tau'_1 \tau''_1} = - \frac{\alpha_1 \gamma_3}{\tau'_2 \tau''_2} = \frac{(\alpha\gamma)_3}{\tau'_3 \tau''_3} = \alpha_1 \alpha_2 \gamma^2_3 (\alpha\gamma)_3 \;.$$

Invece di porre $y_3 \equiv a_{xx'}$, porremo ora $y_3 \equiv \frac{\alpha_3}{x'_3} a_{xx'} = x_3$, modificando in conseguenza le equazioni dianzi ottenute (leggendo, cioè, $\frac{x'_3 y_3}{\alpha_3}$ invece del primitivo y_3). Ed osserviamo che il modulo dell'attuale sostituzione

$$y_1 \equiv \tau'_x \,, \; y_2 \equiv \tau''_x \,, \; y_3 \equiv x_3$$

è $(\tau' \tau'')_3$.

Analogamente, useremo ora la sostituzione

$$\eta_1 \equiv (\xi \tau'')_3 \,, \; \eta_2 \equiv - (\xi \tau')_3 \,, \; \eta_3 \equiv (\xi \tau' \tau'') \,,$$

il cui modulo è $(\tau' \tau'')^2_3$. (Ciò equivale a leggere $\frac{x'_3 \eta_1}{\alpha_3}$, $\frac{x'_3 \eta_2}{\alpha_3}$ invece di η_1, η_2).

Le equazioni di R_1, R_2 saranno

$$\tau''_2 \tau''_3 y^2_1 - \tau'_2 \tau'_3 y^2_2 + \tau'_3 \tau''_3 (\tau' \tau'')_1 y^2_3 = 0 \,,$$

$$- \tau''_1 \tau''_3 y^2_1 + \tau'_1 \tau'_3 y^2_2 + \tau'_3 \tau''_3 (\tau' \tau'')_2 y^2_3 = 0 \,,$$

Digitized by Google

e rispettivamente

$$\frac{\eta'^2_1}{\tau''_2\tau''_3} - \frac{\eta'^2_2}{\tau'_2\tau'_3} + \frac{\eta'^2_3}{\tau'_2\tau''_3(\tau'\tau'')_1} = 0 \,, \quad -\frac{\eta'^2_1}{\tau''_1\tau''_3} + \frac{\eta'^2_2}{\tau'_1\tau'_3} + \frac{\eta'^2_3}{\tau'_3\tau''_3(\tau'\tau'')_2} = 0 \,.$$

Quanto all'assoluto, sarà

$$\bar{\alpha}_{\eta\eta} \equiv -\frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_3(\alpha\gamma)_3}{(\tau'\tau'')_3}(\tau''_1\tau''_2\eta'^2_1 - \tau'_1\tau'_2\eta'^2_2) \,.$$

Qualunque forma quadratica di $\eta_1, \ldots$ si trasformi in un'altra di $\xi_1, \ldots$ mediante la sostituzione accennata di modulo $(\tau'\tau'')^2_3$, il rapporto fra il secondo e il primo discriminante sarà $(\tau'\tau'')^4_3$, quadrato di quel modulo. Quanto al discriminante $\bar{\alpha}$ di $\bar{\alpha}_{\eta\eta}$, esso è nullo come α, ma va ritenuto $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = (\tau'\tau'')_3^{-4}$.

Nella Nota precedente (§ 10) abbiamo trovato per gli assi della conica C le espressioni

$$p^2_1 = -\frac{4\,c_3}{\alpha_1\alpha^2_2 c_2} \,, \qquad p^2_2 = -\frac{4\,c_3}{\alpha^2_1\alpha_2 c_1} \,;$$

quindi per gli assi principali della C_λ avremo

$$p^2_{\lambda 1} = -\frac{4\,\gamma_{\lambda 2}}{\alpha_1\alpha^2_2\gamma_3\lambda_2} \,, \quad p^2_{\lambda 2} = -\frac{4\,\gamma_{\lambda 1}}{\alpha^2_1\alpha_2\gamma_3\lambda_2} \,;$$

e, in particolare, per quelli di $C_{\lambda'}$ e $C_{\lambda''}$

$$p^2_{\lambda' 1} = -\frac{4\,\gamma_{\lambda' 2}}{\alpha_1\alpha^2_2\gamma_3\lambda'_2} \,, \quad p_{2\lambda'}{}^2 = -\frac{4\,\gamma_{\lambda' 1}}{\alpha^2_1\alpha_2\gamma_3\lambda'_2} \,,$$

$$p^2_{\lambda'' 1} = -\frac{4\,\gamma_{\lambda'' 2}}{\alpha_1\alpha^2_2\gamma_3\lambda''_2} \,, \quad p^2_{\lambda'' 2} = -\frac{4\,\gamma_{\lambda'' 1}}{\alpha^2_1\alpha_2\gamma_3\lambda''_2} \,.$$

La distanza O_3P' è data dalla formola

$$\overline{O_3P'}^2 = \frac{\alpha_2 x'^2_1 + \alpha_1 x'^2_2}{\alpha_1^2\alpha^2_2 x'^2_3} \,.$$

Ora se si considera la conica

$$\sum \frac{x_h^2}{x'^2_h} = 0 \,,$$

Digitized by Google

che ha il triangolo $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato e come polare di P' la retta armonica di P' rispetto al triangolo medesimo, si hanno per gli assi Ω_1, Ω_2 di questa conica le espressioni

$$\Omega_1^2 = -\frac{4x'^2_2}{\alpha_1\alpha_2^2 x'^2_3}\,, \qquad \Omega_2^2 = -\frac{4x'^2_1}{\alpha_1^2\alpha_2 x'^2_3}\,;$$

sarà dunque

$$-4\overline{O_3P'}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2\,.$$

Tenendo presenti le $\lambda'_1\lambda''_2 + \lambda'_2\lambda''_1 = -u_{xx'}$, $\lambda'_2\lambda''_2 = \alpha a_{x'x'} = \alpha_1\alpha_2 x'^2_3$, si troverà anche

$$4\overline{O_3P'}^2 = p^2_{\lambda'1} + p^2_{\lambda''2} = p^2_{\lambda''1} + p^2_{\lambda'2}\,.$$

§ 5. Passiamo a considerare gli assi principali delle coniche R_1, R_2.

E primieramente ricordiamo che, se rispetto a due diversi triangoli sono rispettivamente $x'_1,\ldots$ e $y'_1,\ldots$ le coordinate di un punto P', $x''_1,\ldots$ e $y''_1\ldots$ quelle di un altro punto P'', $A_{xx}=0$ e $\overline{A}_{yy}=0$ le equazioni dell'assoluto, A e $\overline{A}$ i discriminanti di A_{xx} e $\overline{A}_{yy}$, si ha

$$\mathrm{sen}^2 P'P'' = \frac{A_{x'x'}A_{x''x''} - A^2_{x'x''}}{A_{x'x'}A_{x''x''}} = \frac{\overline{A}_{y'y'}\overline{A}_{y''y''} - \overline{A}^2_{y'y''}}{\overline{A}_{y'y'}\overline{A}_{y''y''}}\,.$$

Allorquando l'assoluto degenera in una coppia di punti, noi assumiamo come quadrato della distanza dei due punti P', P''

$$\lim\frac{\mathrm{sen}^2 P'P''}{A} \text{ per } \overline{A}=0\,, \quad \text{o invece} \quad \lim\frac{\mathrm{sen}^2 P'P''}{\overline{A}} \text{ per } A=0\,,$$

secondo che ci riferiamo al primo od al secondo triangolo. Or questi due limiti non sono eguali, ma il rapporto del primo al secondo è $\lim\dfrac{\overline{A}}{A}$, che equivale al quadrato del modulo M della sostituzione con cui si passa dalle coordinate x alle y. Di qui segue che non è lecito paragonare senz'altro le distanze misurate nel primo modo con quelle misurate nel secondo modo, ma che per far ciò occorre prima moltiplicare le seconde per M^2, ossia dividerle pel quadrato del modulo $1:M$ della sostituzione con cui si passa dalle y alle x.

Digitized by Google

Ciò premesso, siano π_1, π_2 e π'_1, π'_2 le lunghezze degli assi principali delle coniche R_1, R_2, sempre nel caso dell'assoluto degenere. Avendo noi le equazioni di R_1, R_2 in coordinate y e quella di A in coordinate η, ricorriamo ad esse; e poichè la sostituzione che esprime le y nelle x ha per modulo $(\tau'\tau'')^2_3$, troveremo, ponendo $\rho \equiv \alpha_1 \alpha_2 \gamma_3 (\alpha\gamma)_3$:

$$\pi^2_1 = -\frac{4\,.\,\tau'_3 \tau''_3 (\tau'\tau'')_1}{\frac{-\rho^3}{(\tau'\tau'')^3}(\tau'_1 \tau'_2)(\tau''_1 \tau''_2)^2(-\tau'_2 \tau'_3)} (\tau'\tau'')_3^{-4}$$

ossia

$$\pi^2_1 = -\frac{4\,\tau''_3 (\tau'\tau'')_1}{\rho^3 (\tau'_1 \tau''_1)(\tau'_2 \tau''_2)^2 \tau'_1 (\tau'\tau'')_3} ,$$

e riducendo per mezzo di identità date nel § 4,

$$\pi_1{}^2 = -\frac{4\,\tau''_3 x'_1}{\alpha^2_1 \alpha_2 \tau''_1 x'_3} ;$$

similmente

$$\pi^2_2 = -\frac{4\,\tau'_3 x'_1}{\alpha^2_1 \alpha_2 \tau'_1 x'_3} ,$$

e

$$\pi'_1{}^2 = -\frac{4\,\tau''_3 x'_2}{\alpha_1 \alpha^2_2 \tau''_3 x'_3} , \qquad \pi'_2{}^2 = -\frac{4\,\tau'_3 x'_2}{\alpha_1 \alpha^2_2 \tau'_3 x'_3} .$$

Confrontando queste espressioni con quelle di $p_{\lambda' 1}, \ldots$, ed osservando che

$$\frac{4\,\tau''_3 x'_1}{\alpha^2_1 \alpha_2 \tau''_1 x'_3} = \frac{4\,\gamma_{\lambda'' 1}}{\alpha^2_1 \alpha_2 \gamma_3 \lambda''_3} , \quad \ldots ,$$

otterremo

$$\pi_1{}^2 = p^2_{\lambda'' 2} , \quad \pi^2_2 = p_{\lambda' 2} ; \quad \pi'^2_1 = p^2_{\lambda'' 1} , \quad \pi'^2_2 = p^2_{\lambda' 1} .$$

Raccogliamo i principali risultati ottenuti nel seguente enunciato:

« Abbiasi una schiera di coniche confocali C_λ nel caso che
« l'assoluto A del loro piano sia una coppia di punti L, L'; e
« sia O_3 il loro centro principale (esterno alla retta LL') e
« o_1, o_2 i due assi principali per O_3. Si considerino le due co-

Digitized by Google

« niche $C'_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$ della schiera che passano per un dato punto
« P', e le loro tangenti t', t'' in P'. Esisterà un'altra schiera
« di coniche confocali, aventi per centro ed assi principali il
« punto P' e le rette t', t''; e quelle due coniche R_1, R_2 di
« questa schiera che passano per O_3 avranno ivi per tangenti
« o_1, o_2. Gli assi principali delle due coniche R_1, R_2 saranno
« in un certo ordine eguali a quelli delle due $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$; e pre-
« cisamente, gli assi primo e secondo di R'_1 eguali ai secondi
« assi di $C_{\lambda''}$ e $C_{\lambda'}$, e gli assi primo e secondo di R''_2 ai primi
« assi di $C_{\lambda''}$ e $C_{\lambda'}$. »

La prima parte di questo teorema si trova implicitamente contenuta nella mia Nota: *Teoremi sui sistemi di superficie di 2° grado* (Atti dell'Acc. di Torino, vol. XIV, 1879), nella quale l'analogo teorema relativo alle quadriche dello spazio a tre dimensioni è dimostrato sintenticamente in modo applicabile alle coniche di un piano. La dimostrazione qui data ha però il vantaggio di condurre immediatamente alla notevole relazione fra le grandezze degli assi delle due coppie di coniche $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$ e R_1, R_2.

§ 6. Il luogo dei poli di una data retta $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ rispetto alle coniche A, C, C_λ, ... della proposta schiera confocale è una retta perpendicolare a r nel punto ove r tocca una ed una sola conica della schiera. La distanza fra O_3 ed r, e la distanza fra i poli P,P_λ di r rispetto a C e C_λ, per A qualunque, son date da

$$\text{sen}^2 O_3 r = \frac{\xi^2_3}{a_3 \alpha_{\xi\xi}}, \quad \text{sen}^2 PP_\lambda = \frac{\lambda^2_1 \Sigma \alpha_h (\alpha\gamma)^2_h \xi^2_k \xi^2_l}{\alpha \Sigma a_h \gamma^2_h \xi^2_h . \Sigma a_h \gamma^2_{\lambda h} \xi^2_h};$$

cosicchè, quando A si scinde in due punti, si ha

$$\overline{O_3 r}^2 = \frac{\xi^2_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{\xi\xi}}, \quad \frac{\overline{PP_\lambda}^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha_{\xi\xi}}{\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2_3 \xi^2_3} = \frac{1}{\alpha^2_1 \alpha^2_2 \gamma^2_3} . \frac{1}{\overline{O_3 r}^2} = \text{cost. con } r,$$

e

$$4 PP_\lambda = \pm (p^2_{\lambda h} - p^2_h) : O_3 r, \quad (h = 1, 2).$$

Il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un dato punto P' alle coniche della schiera confocale è una curva

Digitized by Google

di 3° ordine, che passa pei 6 fuochi ed ha P' come punto doppio. La sua equazione si ricava dalle $\frac{(xx')_h}{\tau_h} = \text{cost.}$, ossia

$$\alpha_h \lambda_1 + \gamma_h \lambda_2 = \frac{x'_h x_h \nu}{(xx')_h},$$

ed è

$$\sum \frac{(\alpha\gamma)_h x'_h x_h}{(xx')_h} = 0 .$$

Queste proprietà sono una estensione di altre già note delle coniche confocali ordinarie (Cfr. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, testo e bibliografia); ma ho stimato utile di eseguirne la ricerca, segnatamente in vista delle osservazioni che porgono il destro di fare, sia circa il grado di generalità di cui son suscettibili, sia circa le cautele da usare nel paragone delle distanze, quando non tutte siano state misurate riferendosi a uno stesso sistema di coordinate.

E superfluo rilevare la natura dualistica delle formole e delle proprietà qui esposte.

Torino, 24 gennaio 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice-Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore della Classe, CLARETTA, ROSSI, BOLLATI DI SAIN-PIERRE, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE MARTIIS, GRAF e PEYRON che funge da Segretario in luogo del Senatore GORRESIO, assente per motivi di salute.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio Giuseppe CARLE presenta da parte dell'Autore, il Socio Corrispondente Francesco BUONAMICI, un opuscolo intitolato: *Sulla Storia del manoscritto pisano-fiorentino delle Pandette* (Bologna, 1890), ed informa intorno al contenuto del lavoro.

Il Socio FERRERO annuncia la morte del Socio Straniero Giorgio BANCROFT, e ricorda i meriti dell'illustre storico americano,

Lo stesso Socio ragguaglia la Classe intorno agli scavi da lui compiuti, per incarico del R. Governo, al Gran San Bernardo, nei quali si potè rintracciare la pianta del santuario di Giove Penino.

Indi presenta un lavoro da lui fatto in unione col Prof. Fe-

Digitized by Google

derico von Duhn, dell'Università di Heidelberg, nel quale sono descritte ed illustrate le monete galliche esistenti nel medagliere dell'Ospizio del Gran San Bernardo.

La Classe approva ad unanimità la stampa del lavoro nelle *Memorie* dell'Accademia, considerando come parte integrante di esso una breve appendice, opera del Professore tedesco.

LETTURE

GIORGIO BANCROFT

PAROLE COMMEMORATIVE

di

ERMANNO FERRERO

Il 17 di gennaio la nostra Accademia ha perduto il socio estero Giorgio Bancroft, che dal 1873 le era ascritto. Mancò nella tarda età di novant'anni compiuti, raggiunta da un altro grande storico, che ci onorammo pure di avere fra i nostri socii stranieri, Leopoldo Ranke.

Dall'attività infaticabile del Ranke, che fino all'ultimo conservò la freschezza della mente e depose la penna solo per morire, fu prodotta una serie di opere, di cui non si può dire quale sia la migliore, ed a cui, come degno compimento, l'autore voleva aggiungere quella storia universale, che pur troppo non potè condurre a termine. L'operosità del Bancroft si circoscrisse ad un'opera sola; ma questa bastò ad assicurare la sua gloria, perocchè per la patria dell'autore la *History of the United States from the discovery of the American continent* è la più bella storia nazionale, per il mondo civile una delle più grandiose del nostro secolo.

Dalla pubblicazione del primo volume nel 1834 a quella

Digitized by Google

dell'undecimo e del duodecimo, che la finiscono, scorsero circa cinquant'anni; ma, come in tutta l'opera è sempre mantenuta l'arte di disporre la narrazione fondata sui documenti raccolti, con ricerca accurata, nei pubblici ed in privati archivii dell'America e dell'Europa, così fra i volumi scritti negli anni più belli della virilità e quelli composti nella tarda vecchiaia il lettore non trova differenza per la nobiltà e vigoria dello stile e la vivacità del colorito. La larga educazione classica avuta nella giovinezza servì al Bancroft per riuscire un valente scrittore; egli in fatti studiò sotto illustri maestri e fu addottorato in filosofia nell'Università di Gottinga; il primo ufficio, che tenne, tornato in patria, fu quello di professore di greco nel Collegio di Harvard; fra i suoi lavori giovanili è la traduzione della *Politica dell'antica Grecia* dell'Heeren, di cui era stato scolaro.

Il Bancroft servì pure il suo paese nei pubblici ufficii: fu *secretar of navy* sotto la presidenza di Giacomo Polk, ministro a Londra dal 46 al 49, a Berlino dal 67 al 74.

Gli Stati Uniti, non paghi dei progressi, che eccitano lo stupore del Vecchio Mondo, vollero avere altresì la gloria nelle lettere e nelle scienze positive e morali, e la ebbero. Lo Sparks, il Prescott, il Motley, il Bancroft la diedero loro negli studii storici.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dall'11 al 25 Gennaio 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

Donatori

Berlino ** — Die Fortschritte der Physik im Jahre 1884; dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin; XL. Jahrgang, 2 und 3 Abth. Berlin, 1890; in-8°.

Società Elvetica di Sc. naturali (Berna). — * Neue Denkschriften der allgemeinen schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften; Band XXXII, Abth. 1. Bern, 1890; in-4°.

Id. — Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, aus dem Jahre 1889; n, 1215-1243: Redaction, Dr. phil. J. H. GRAF. Bern, 1890; in-8°.

Id. — Compte rendu des Travaux présentés à la soixante-douxième Session de la Société helvétique des Sciences naturelles réunie à Lugano les 9, 10 et 11 Sept. 1889. Genève, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — Atti della Società elvetica delle Scienze naturali adunata in Lugano nei giorni 9, 10 e 11 settembre 1885; 72ª sessione (conto-reso 1888-89). Lugano, 1890; 1 fasc. in-8°.

Accad. Rumena delle Scienze (Bukarest). — * Analele Academiei Romane; Seria 2, t. XI, 1889-90: — Memoriile sectiunei scientifice. Bucuresci, 1890; in-4°.

Soc scientifica Argentina (Buenos Aires). — * Anales de la Sociedad científica Argentina, etc., t. XXX, entrega 6. Buenos Aires, 1890; in-8°.

Digitized by Google

* Records of the geological Survey of India; vol. XXIII, part 4, 1890. Calcutta, 1890; in-8° gr. — Società Asiatica del Bengala (Calcutta).

* Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College; vol. XX, n. 4, 5: Cristatella; the origin and development of the individual in the Colony, by C. B. Davenport: — The Eyes in Blind Crayfishes, by G. H. Parker. Cambridge, U. S. A., 1890; in-8°. — Museo di Zool. comp. (Cambridge).

– Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zöology at Harvard College, to the President and Fellows of Harvard College for 1889-90. Cambridge 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia; part II, April-Sept. 1890. Philadelphia 1890; in-8°. — Accad. di Sc. nat. di Filadelfia.

* The Journal of Comparative Medicine and veterinary Archives; edited by W. A. Conklin; vol. XI, n. 12. Philadelphia, 1890; in-8°. — La Direzione (Filadelfia)

* Zoologischer Anzeiger herausgegeben von Prof. J. Victor Carus in Leipzig, XIV Jahrgang, n. 353. Leipzig, 1891; in-8°. — J. V. Carus (Lipsia).

Xenia Orchidacea; — Beiträge zur Kenntniss der Orchideen von Heinrich Gustav Reichenbach fil., fortegesetzt durch F. Fraenzlin; dritte Band viertes Heft. Leipzig, 1890; in-4°. — Lipsia.

* Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 2. London, 1890; in-8°. — R. Soc. astronom. di Londra.

* Anuario del Observatorio astron. nacional de Tacubaya para el año de 1891, formado bajo la direccion del Ingeniero A. Anguiano; año XI. México, 1890; 1 vol. in 8° picc. — Osserv. astronom. di Tacubaya (Messico).

* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol XXIII, fasc. 19. Milano, 1890; in-8°. — R. Istit. Lomb. (Milano).

* Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena; serie 2ª vol. VII; Modena, 1890; in-4°. — R. Accademia di Sc., Lettere ed Arti in Modena.

La Nuova Notarisia; — Rassegna trimestrale consacrata allo studio delle alghe: Redattore e proprietario G. B. Dott. De Toni; annata 1890, fasc. 4; – serie 2ª, 9 gennaio 1891. Padova, 1890-91; in-8°. — Il Redattore. (Padova).

* Comptes-rendus de séances de l'Académie des Sciences; t. CIX, CX, 1er e 2e sem. 1890: Table des matières du t. CX. Paris, 1890; in-4°. — Istit. di Francia (Parigi).

Compte-rendu sommaire de séances de la Société philomatique de Paris; n. 1-5, 1890; in 8°. — Soc. filomatica di Parigi.

Digitized by Google

Parigi. Annuaire pour l'an 1891, publié par le Bureau des Longitudes, etc., Paris, 1891; un vol. in-16°.

Osservatorio di Rio Janeiro. * Revista do Observatorio — Publicaçao mensual do Observatorio do Rio de Janeiro; a. V, n. 10-11. Rio de Janeiro, 1890; in-8°.

Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma). Statistica delle caldaie a vapore esistenti nel Regno. Roma, 1890; 1 vol. in-8°.

R. Accademia dei Lincei (Roma). * Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; ecc.; vol. VI, fasc. 12 e Indice del vol. (2° sem.). Roma, 1890; in-8° gr.

Società Viticol. italiani (Roma). Bollettino della Società generale dei Viticoltori italiani; anno VI, n. 1. Roma 1891; in-8° gr.

Società degli Spettr. ital. (Roma). Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XIX, disp. 11. Roma, 1890; in-4°.

Università di Strasborgo. Funchal auf Madeira und sein Clima; Inaugural-Dissertation der medicinischen Facultät der k. Wilhelms-Universität Strassburg zur Erlangung der Doctorwürde, vorgelegt von Ferdinand CHRISTMANN. Altona, 1889 1 fasc. in 4°.

Id. Ueber Alopecia areata; Inaugural-Diss., etc,, vorgelegt von Peter SPINDLER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber Wachstum der menschlichen Wirbelsäure; Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Emil MOSER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber die Einwirkung des künstlichen Magensaftes auf Essigsäure-und Milchsäure-Gährung; Inaug.-Diss. etc.; vorgelegt von Felix O. COHN. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber den Krampft in Bereiche des Nervus accessorius Willisii; Inaug.-Diss. etc., vorgelegt von Eugen SCHLÜTER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber Veränderunger in den Lungen bei Gehirnerkrankungen; Inaug.-Diss. etc., vorgelegt von Theodor NEUBERGER. Mainz, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Beiträge zur pharmacologischen Kenntniss der narkatisch wirskenden Verbindungen der Feltreihe; Inaug.-Diss. etc., vorgelegt von Oskar W. von LEY. Strassburg, 1889; 1 fasc in-8°.

Id. Beitrag zur Lehre von der Dystrophia muscularis progressiva (Erb), Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Louis MARY. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Zur Messung der Beactionszeit; Inaug.-Diss., etc.; vorgelegt von Otto DUMREICHER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Università di Strasborgo.

Die Therapie der chronischen Wirbelentzündung mit besonderer Berücksichtigung der operativen Behandlung: historischer Ueberbliek und neue Vorschläge; Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von A. ELIAS. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Historisch-kritiscke Abhandlung über den als delirium acutum bezeichneten Krankheitszustand; Inaug.-Dissert, etc., vorgelegt von Wilhelm FATH. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber die Epilepsie und das Fortpflanzungsgeschäft des Weibes in ihren Gegenseitigen Beziehungen, etc.: Inaug.-Diss., etc.; vorgelegt von Hermann NERLINGER. Heidelberg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Erkrankungen gewundener Tuben: Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Paul SCHOBER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ein Beitrag zur Therapie der Spina bifida; Inaug.-Diss., etc., von Ferdinand SIEGERT. Lahr, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber einen Fall von Myocarditis nach Coronararterienverschluss: Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Georg MANNHEIMER. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die corticale Epilepsie und ihre Behandlung durch die Trepanation; Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von M. MEYER Strassburg, 1888; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber die Entstehung von Herzkrankheiten bei krankhafter Enge der grösseren Körperarterien; Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Hermann DIAMANT. Strassburg. 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Funktionelle End-Resultate der Oberarm-kopf-resection mit Bezug auf die Methode; Inaug-Diss., etc., vorgelegt von Victor BECKMANN. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Untersucgungen über Kohlenstaubmetastase in menschlichen Körper; Inaug. Diss., etc., von Wilhelm WEINTRAND. Berlin, 1889; 1 fasc. in 8°. — Id.

Ueber die Resultate der Wundbehandlung mit Creolin in der chirurgischen Klinik zu Strassburg i. E.; Inaug.-Diss., etc., vorgelegt von Friedrich RUPP. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Epithel und Wanderzelle in der haut des Froschlarvenschwanzes; zur Physiologie des Epithels; Inaug.-Diss., etc, vorgelegt von Theodor KODIS. Leipzig, 1889; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Strasborgo. — Ueber einen Fall von Perforation des processus vermiformis in einer Leistenhernie; Inaug.-Diss., etc, vorgelegt von Karl WELTZ. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Soc. Meteor. ital. (Torino). — * Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, serie 2ª, vol. X, n. 12. Torino, 1890; in-4°.

R. Istit. Veneto (Venezia). — * Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; serie 7ª, tomo I, disp. 10. Venezia, 1890; in-8°.

Istituto geol. di Vienna. — * Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien; Band XIV. Wien, 1890; in-8°.

L'Autore. — Sur l'analyse indéterminée du premier degré; par M. E. CATALAN; 5 pag. in-8°.

L'A. — Plankton-Studien; Vergleichende Untersuchungen über die Bedeutung und Zusammensetzung der pelagischen Fauna und Flora; von Ernst HAECKEL Jena, 1890; 105 pag. in-8° gr.

L'A. — Ueber Monchiquit, ein camptonitisches Ganggestein aus des Gefolgschaft der Eläolithsyenite; von M. HUNTER und H. ROSENBUSCH in Heidelberg (Separat-Abdr. aus TSCHERMAK Mineralogischen und Petrographischen Mittheilungen herausg. von F. BECKE): 1 fasc. in-8°.

L'A. — Zur Feineren Anatomie des centralen Nervensystems; zweiter Beitrag: Das Rüchenmark; von A. KÖLLIKER (Separat-Abdruck aus: *Zeitschrift* für wissenschaftliche Zoologie, LI, 1 Leipzig, W. ENGEHMANN, 1890); 1 fasc. in-8°.

L'A. — Un annuaire astronomique chaldéen, utilisé par Ptolomée; par M. J. OPPERT, Membre de l'Académie des Inscr. et Belles-Lettres Extr. des *Comptes rendus* etc., t. XCI, 17 Nov. 1890; 1 fasc. in-4°.

L'A. — Osservazioni astrofisiche solari eseguite nel R. Osservatorio di Palermo; — Statistica delle macchie solari nell'anno 1889: Nota di A. RICCÒ (Estr. dalle *Mem. della Soc. degli Spettroscopisti ital.*, vol. XIX, 1890); 1 fasc. in-4°.

L'A. — Prof. F. P. RUFFINI. — Delle superficie algebriche che hanno potenza in rispetto a ogni punto dello spazio, ovvero in rispetto ad alcuni dei loro proprii punti; Memoria presentata alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e letta nell'adunanza del 7 dic. 1890. Bologna 1890; 1 fasc. in-4°.

Digitized by Google

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 18 Gennaio al 1° Febbraio 1891

	Donatori
* Bibliotheca Indica: a Collection of oriental works published by the Asiatic Society of Bengal; new Series, n. 749-772, 774. Calcutta 1890; in-8°.	Società Asiatica del Bengala (Calcutta).
Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa: 1891, n. 121. Firenze, 1891; in-8° gr.	Bibl. nazionale di Firenze
– Indice degli Atti amministrativi dei Comuni, delle Provincie, ecc. pag. 145-158 (Nov-Zan); in-8° gr.	Id.
— Tavola sinottica delle Pubblicazioni italiane registrate nel *Bollettino* della Biblioteca nazionale centrale di Firenze, che furono ricevute dalle altre Biblioteche pubbliche governative italiane nel 1889 (LXXXXVIJ-CXX); in-8° gr.	Id.
Dr. A. Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, herausg. von Prof. Dr. A. Supan: Ergänzungsheft n. 100.	Gotha.
Monumenta Germaniae historica, inde ab anno Christi quingentesimo usque ad annum millesimum et quingentesimum, edidit Societas aperiendis fontibus Rerum Germanicarum medii aevi; Scriptorum qui vernacula lingua usi sunt, tomi V, pars 1ª. Hannoverae, MDCCCLXXXX; in-4°.	Hannover.
— Libelli de lite imperatorum et pontificum saeculis XI et XII conscripti tomus I. Hannoverae, MDCCCXCI; in-4°.	Id.
Legum sectio II — Capitularium Regum Francorum, tomi II pars prior Hannoverae, MDCCCXC; in-4°.	Id.
— Indices eorum quae tomis hucusque editis continentur. Hannoverae MDCCCXC; in-4°.	d.
* Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XII, n. 1. Leipzig, 1890; in-8° gr.	R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).
* Proceedings of the R. Society of London; vol. XLVIII, n. 295. London, 1890; in-8°.	R. Società di Londra.

Digitized by Google

Reale Accademia di Storia (Madrid). * Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVIII, mad. I. Madrid; 1891; in 8°.

Società Storica Lomb. (Milano). * Archivio Storico Lombardo — Giornale della Società Storica Lombarda: 2ª serie, fasc. XXVIII. Milano, 1890; in-8°.

Soc. di Geografia (Parigi). * Compte rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1891, n. 1, pag. 1-40; in-8°.

R. Scuola normale superiore di Pisa. * Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa; Filosofia e Filologia vol. VII (della serie vol. XIII). Pisa, 1890: in-8°.

Ministero delle Finanze (Roma). Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale; anno VII, novembre-dicembre 1890. Roma, 1890; in-8° gr.

Ministero d'Agr. Ind. e Comm. (Roma). Statistica delle cause delle morti avvenute in tutti i Comuni del Regno nell'anno 1888. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr.

R. Accademia dei Lincei (Roma). * Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ecc.; vol. VII, fasc. 1, 1° sem., 1891. Roma, 1891; in-8° gr.

Istituto internaz. di Statistica (Roma). Bulletin de l'Institut international de Statistique; t. IV, deuxième et dernière livrais., année 1889. Rome, 1890; in-8° gr.

Bibliot. nazionale di Roma. Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele — Bollettino delle opere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. V, n. 4. Roma, 1890; in-8° gr.

Università di Strasburgo. Ueber die in altägyptischen Texten erwähnten Bau-und Edelsteine und deren Beschaffung, Bearbeitung und Verwendung; Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde and der Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg; von Frederick C. H. WENDEL. Leipzig, 1888; 1 fasc. in 8°

Id. Der ostmitteländische Dialekt; I. Vokalismus; Inaugural-Diss. etc., von Gotthold MENZE. Götken, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Die « Lettres d'un Officier Prussien » Friedrichs des Grossen; Inaug.-Diss., etc, von Georg SCHEELE. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Porträtdarstellungen Karls des Grossen; erster Theil; Inaug.-Diss., etc. vhn Paul CLEMEN. Aachen, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. De vocativi usu plautino terentianoque; ad summos in Philos. honores, etc., rite impetrandos scripsit Guilelmus FERGER. Argentorati, MDCCCLXXXIX; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Das aramäische Verbum in Jerusalemischen Talmud; Inaug.-Diss., etc., von Moses SCHLESINGER. Berlin, 1889; 1 fasc. in-8°. — Università di Strasborgo.

Die Beziehungen zwischen Brandenburg und Pommern unter Kurfürst Friedrich II (1437) 1440-1470; Inaugural-Dissertation von Paul GAEHTGENS. Altenburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Hohenstaufen im Elsass; mit besonderer Berucksichtigung des Reichsbesitzes und des Familiengutes derselben im Elsass 1079-1255; Inaug.-Diss.. etc., von Aloys MEISTER. Mainz, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Frankfurt a M. schmalkaldisken Kriege; Inaug.-Diss, etc., von Paul COLLISCHONN. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Untersuchungen über die mundartlichen verhältnisse in den gedichten des sogenannten « wilden mannes », und Vernhers von Niederrhein; Inaug.-Diss., etc., von Karl KÖHN. Berlin, 1890; 1 fasc. in 8°. — Id.

Der Vokalismus des Schwäbischen in der Mundart von Münsingen, etc., von Carl BOPP. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Der Verhältniss von Ibn-El-Atirs Kâmil Fit-Ta'rich.Tabaris Ahbâr Errusul wal Mulûk; Inaug.-Diss., etc., von Carl BROCKELMANN. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Fortsetzungen von Chrestiens' Perceval le Gallois nach der Pariser Handschriften, etc., von Hugo WAITZ. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Der Begriff der Wahrnehmung; Inaug.-Diss, etc., von Wilhelm ENOCH. Hamburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

De homericae interpretationis antiquissimae vestigiis nonnullis; Dissert. inaug. quam, etc., scripsit Maximilianus BODENHEIMER. Argentorati, MDCCCLXXX; 1 fasc. in-8°. — Id.

Hamburg und Ostfriesland in der ersten Hälfte des 15 Jahrhunderts, etc., Inaug.-Diss., etc., von Hans NIRRNHEIM; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Beziehungen der Hanse zu England im letzten drittel des vierzehnten Jahrhunderts, von F. KEUTGEN; zur Erlang. der Doct. etc. philos. Fac. etc. Giessen, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber die athenischen Schatzverzeichnisse des vierten Jahrhunderts; Abhandlung der philos. Fac., etc., von Hans LEHNER. Bonn, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Reform der Bäuerlichen Verhältnisse in Livland, 1765-1804; Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Staatswissenschaftlichen Doctorwürde eingereicht bei der Rechts-und Staatswissenschaftlichen Fakultät des Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg von Astaf von TRANSEHE-ROSENECK. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Strasborgo. Des moment der Rechtswidrigkeit bei der Beleidigung; Inaug.-Diss., etc., von Eugen WILHELM. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Folgen mangelhafter Beschaffenheit der Leistung an Zahlungsstatt; Inaug.-Diss., etc., von Rud. ERNST. Zürich, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Entwicklung der Grossstädtischen Bevölkerung im Gebiete des deutschen Reiches; Inaug -Diss., etc., von Nathanael BRÜCKNER. Tübingen, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. Die Vindikation der Inharber-und Orderpapiere nach dem Geltenden deutschen Recht; Inaug.-Diss., etc., von Eduard KNITTEL. Strassburg, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id Determinismus und Strafe; von Theodor KLIPPEL, etc., Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. Ueber den Begriff der Fahrlässigkeit nach dem Geltenden deutschen Strafrechte; Inaug -Diss., etc., von Friedrick ECCARD. Strassburg, 1890; in-8°.

Ateneo Veneto (Venezia). * L'Ateneo Veneto; — Rivista mensile di Scienze, Lettere ed Arti, diretta da A. S. DE KIRIAKI e L. GAMBARI; serie 14ª, vol. II, fasc. 5, 6. Venezia, 1890; in-8°.

Venezia. * * I diarii di Marino Sanuto, ecc.; t. XXX, n. 134. Venezia, 1890; in-4°.

L'Autore. Giuseppe BARCHI. — Ai Reali di Savoia. Torino, 1889; 1 fasc. in-16°.

Id. — Bonum otium, Torino, 1890; 1 fasc. in-16°.

L'A. Francesco Paolo GAROFALO — Sui *novem tribuni combusti* (Studio di storia romana). Catania, 1890; 1 fasc. in-8°.

G. PARIS. Etudes romanes dédiées a Gaston PARIS le 29 Décembre 1890 (25 anniversaire de son Doctorat en Lettres) par ses élève français et ses élèves des pays de langue française. Paris, 1891; 1 vol. in-8°.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.

297 (350) 19 III-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 6ª, 1890-91

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Socio COSSA espone verbalmente i risultati delle ricerche da lui ultimamente eseguite « *Sopra alcune nuove combinazioni del platino* ».

Adunanza del 22 Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Letto ed approvato il processo verbale dell'adunanza precedente, viene presentato in dono all'Accademia, da parte del Signor Architetto Luca BELTRAMI « *Il Codice di Leonardo da Vinci nella Biblioteca del Principe Trivulzio in Milano, trascritto ed annotato dal prefato architetto e riprodotto in novantaquattro tavole eliografiche da Angelo della Croce;* Milano. 1891.

Il Socio CAMERANO presenta e legge un lavoro del signor Dott. Carlo MYLIUS « *Intorno ad alcune forme inedite di molluschi miocenici dei colli torinesi rinvenute a S. Margherita* ». Questo lavoro verrà pubblicato negli *Atti*.

Il Socio SEGRE presenta uno studio intitolato: « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* », del Dottor Guido CASTELNUOVO, Assistente alla Cattedra di Algebra e Geometria analitica nella Università di Torino. Desiderando l'autore che questo lavoro venga pubblicato nei volumi delle *Memorie*. il Presidente nomina una Commissione incaricata di esaminarlo e di riferirne poscia alla Classe.

Digitized by Google

LETTURE

Intorno ad alcune forme inedite di Molluschi miocenici dei colli torinesi, rinvenute a S. Margherita;

Nota del Dott. CARLO MYLIUS

Nei lavori che si eseguirono due anni or sono sui colli torinesi, per il prolungamento di una strada vicinale, ad un chilometro dalla chiesa di Santa Margherita in direzione di S-S-E, venne scavata in un rialzo di terreno, presso la villa Cochis, una trincea poco profonda, lunga una cinquantina di metri. La sezione presenta due strati principali concordanti e inclinati da E a O, con pendenza di circa 40°: il superiore, grosso poco meno di un metro, ed a contatto collo strato superficiale di terra vegetale, consta di arenaria serpentinosa poco compatta, mentre il sottostante, di potenza non minore, ma variabile in diversi punti, è formato da un conglomerato grossolano ad elementi di mole mediocre. Abbondano in questo strato inferiore ciottoloso gli avanzi di organismi miocenici, tanto che, terminato lo sterro, chi attendeva a tale ricerca ebbe tra le mani una raccolta copiosissima di fossili, per lo più ben conservati.

Questa raccolta, acquistata dal Museo Geologico di Torino, era composta quasi esclusivamente di molluschi. Limitando il mio studio a questo solo tipo zoologico feci la determinazione sistematica di essi fossili. Trovai rappresentati i Cefalopodi da una sola specie (*Spirulirostra Bellardii d'Orb.*), i Gasteropodi da 53 generi e circa 120 specie, gli Scafopodi da 2 specie di uno stesso genere ed i Lamellibranchiati da 8 generi e 12 specie.

Tra codeste forme ne rinvenni 17, le quali, scostandosi per alcuni caratteri da quelle finora descritte, o non essendo ancora state trovate nel terreno miocenico torinese, mi paiono degne di un cenno speciale.

Digitized by Google

1. **Murex striaeformis,** Michtti (1).

Var. *bicristata*, Myl., fig. 11.

M. a M. striaeformi genuino his notis segregandus: *Testa minori, varicibus in ultimo anfractu duabus, magnis, oppositis.*

Un individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 31, largh.: mm. 22) che differisce dalla forma tipica per la disposizione speciale delle varici nell'ultimo anfratto. Sono due sole: l'una, molto prominente, sull' orlo boccale; l' altra, meno sviluppata, diametralmente opposta alla prima. Lo spazio intermedio, con due costole trasversali cariniformi, non presenta alcuna traccia di varici. La bocca ha caratteri normali.

2. **Fusus multiliratus,** Bell. (2).

Var. *ventricosa*, Myl.

F. a F. multilirato Bell. his notis segregandus: *Anfractibus postice vix depressis, costulis longitudinalibus rarioribus, carina transversa minus perspicua.*

Tre individui imperfetti, mancanti dell'apice e della coda, di mole mediocre (diametro: mm. 19-24). Differiscono dalla forma tipica descritta dal Bellardi e dagli altri esemplari del Museo Geologico di Torino nel numero delle coste longitudinali (non maggiore di 12), negli anfratti meno depressi posteriormente, con una costola trasversale maggiore delle altre, ma non cariniforme. La forma tipica manca in questa raccolta.

---

(1) Michelotti, *Fossiles miocènes de l'Italie sept.* p. 241, tav. XXIV, fig. 13 — Bellardi, *Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte*, Vol. I, pag. 95.
(2) Bellardi, Ibid. p. 138, tav. IX. fig. 8.

Digitized by Google

3. **Fusus semirugosus**, Bell. et Michtti (1).

Var. *exilicauda*, Myl., fig. 10.

F. a F. semirugoso genuino his notis segregandus: *Costulis longitudinalibus crebrioribus; extimo anfractu antice magis depresso: cauda prope basim gracili, tenui, recta.*

Un individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 40, diam.: mm. 14). Va distinto dalla forma tipica pel numero maggiore di coste longitudinali (12 anzichè 10), per la forma globosa dell'ultimo anfratto, terminato da una coda sottile alla base, smilza, retta e profondamente canalicolata.

4. **Myristica cornuta**, Agass. (2).

Var. *tudicloides*, Myl., fig. 15.

M. a M. cornuta genuina his notis segreganda: *Extimo anfractu medio ventricoso, antice paulo, postice valde depresso; nodis obsoletis, labrum versus evanescentibus; spira prominula; cauda exili, longiuscula.*

Un individuo di piccola mole (lungh.: mm. 65, largh.: mm. 40), mancante della estremità della coda e dell'orlo boccale. Per quanto sia variabile nei caratteri esterni della conchiglia la *Myristica cornuta* (*Agass.*), i caratteri che si osservano in questo individuo sono tali da doverlo ritenere varietà distinta dalla specie stessa: infatti, tanto negli esemplari torinesi del Museo Geologico, quanto in quelli del bacino di Vienna, descritti e raffigurati dallo Hörnes (3), l' ultimo anfratto va assottigliandosi gradatamente fino alla coda, la spira è breve, poco acuta, dal profilo quasi rettilineo; mentre nel nostro è notevole la depressione

---

(1) Bellardi, op. cit. Vol. I, p. 133, tav. IX, fig. 5.
(2) Bellardi, Ibid. pag. 157.
(3) Hörnes. *Fossile Mollusken des Tertiaer-Beckens von Wien*, Vol. I, p. 274, tav. XXIX e XXX.

Digitized by Google

anteriore dell'ultimo anfratto e la forma acuta dei primi giri della spira: inoltre, la coda relativamente sottile e liscia concorre a dare a questo fossile un aspetto che ricorda il genere *Tudicla*, *Bolten*.

5. **Clavella striata,** Bell. (1).

Var. *ecostata*, Myl., fig. 7.

C. a C. striata genuina his notis segreganda: *Testa majori; suturis profundioribus; costis longitudinalibus in ultimis anfractibus nullis, in primis autem vix perspicuis.*

Individuo imperfetto (mancante della coda), notevole per la mole (lungh.: circa mm. 45, largh.: mm. 19), per le suture canalicolate e per le costole longitudinali confinate ai primi tre o quattro anfratti, in cui sono appena visibili.

6. **Euthria magna,** Bell. (2).

Due individui conformi al tipo descritto e raffigurato dal Bellardi (2); ma di mole poco minore (dimensioni del maggiore: lungh.: mm. 60, largh. mm. 25). — Ricordo la presenza di questa forma tra i fossili di Santa Margherita (terreno *elveziano*) perchè dal Bellardi fu creduta specie propria del *tortoniano* (Stazzano).

7. **Anura Borsoni,** Gené (3).

Var. *crassostriata*, Myl., fig. 13.

A. ab A. Borsoni genuina his notis segreganda: *Testa majori, spira magis producta, cauda longiori; striis latioribus; carinis nullis; cingulo tuberculifero unico, suturae posticae propinquo.*

Individuo alquanto malconcio; ma con caratteri spiccati, per cui facilmente si distingue dalla forma tipica e dalle tre varietà

(1) Bell., Ibid. p. 188, tav. XI, fig. 3.
(2) Bellardi, op. cit., Vol. I, p. 190, tav. XIII, fig. 1.
(3) Bellardi, op. cit., Vol I, p. 202.

Digitized by Google

descritte dal Bellardi. È affine alla varietà B (v. *parvornata Sacc.*), che ha pure un solo cingolo tubercolifero: ma nella nostra i tubercoli corrono vicinissimi alla sutura posteriore; inoltre la conchiglia è assai più smilza.

8. **Ranella gigantea**, Lam. (1).

Var. *turrito-reticularis*, Myl.

R. a R. gigantea Lam. his notis segreganda: *Testa minori; anfractibus convexioribus, ultimo autem breviori; superficie papillis crebris subspinosis ornata.*

Sette individui di mole diversa (lungh.: mm. 31-53, largh.: mm. 20-31). — Questa forma, la quale mi pare corrisponda a quella trovata al Pino Torinese dal Michelotti (2), e da esso descritta col nome di *R. miocenica*, è rappresentata in questo Museo Geologico da alcuni individui, pure dei nostri colli. Differisce dalla tipica per caratteri abbastanza spiccati: mole mediocre, forma più smilza e meno depressa lateralmente, anfratti tondeggianti, regolarmente crescenti, costole longitudinali poco sporgenti, fuorchè nell'intersezione colle coste trasversali, in modo da produrre, segnatamente nei primi anfratti, una superficie regolarmente granulosa. Sebbene, a detta di molti autori, la *Ranella gigantea Lam.* sia specie assai variabile, ritengo che, non essendo stata accettata dagli altri paleontologi la divisione di essa in tre specie distinte proposta dal Michelotti (3), convenga distinguere questa nostra forma dalla tipica, quale varietà locale.

9. **Drillia crebricosta**, Bell. (4).

Var. *majuscula*, Myl., fig. 6.

D. a D. crebricosta Bell. his notis segreganda: *Testa majori, latiori; costis longitudinalibus rarioribus (undecim) superficie sublaevi: striis transversis passim vix perspicuis.*

---

(1) Bell., Ibid., p. 240.
(2) Michelotti, op. cit. p. 258.
(3) Hörnes, op. cit., Vol. I, p. 211.
(4) Bellardi, op. cit., Vol. II, p. 96.

Digitized by Google

Individuo di mole ragguardevole (lungh.: circa mm. 30, largh.: mm. 10 $^1/_2$), mancante dell'estremità della coda. — Questa forma connette la *D. crebricosta Bell.*, colla *D. raricosta* (*Bon*) (1), scostandosi tuttavia da entrambe per la maggior larghezza della conchiglia.

10. Clavatula gothica, May. (2).

a. Var. *inermis*, Myl., fig. 12.

C. a C. gothica genuina his notis segreganda: *Extimo anfractu antice laevi, ecostato; spinis marginis postici raris, muticis.*

Un individuo di mole mediocre, mancante dell'estremità caudale e del labbro esterno. — Si distingue agevolmente dalla forma tipica e dalla varietà *A* descritta e raffigurata dal Bellardi per la mancanza assoluta di costole trasversali nella parte anteriore dell' ultimo anfratto. Inoltre sono poco sviluppate le spine del margine posteriore.

b. Var. *bimarginata*, Myl., fig. 9.

His notis agnoscenda: *Anfractibus antice posticeque costa spinifera instructis; spinis marginis postici vero majoribus.*

Dieci individui di diversa mole (lungh.: mm. 30-43, largh.: mm. 11-16). — Differiscono dalla forma tipica nell'avere la carena ventrale scoperta in tutti gli anfratti, mentre in quella essa appare soltanto nell'ultimo anfratto, rimanendo nascosta negli altri.

In questa raccolta la forma tipica è rappresentata da un solo individuo.

11. Conus antiquus, Lam. (3)

Var. *producta*, Myl. (4), fig. 2.

C. a C. antiquo Lam. his notis segregandus: *Testa longiori, superne minus dilatata.*

---

(1) Bellardi, Ibid., p. 111.

(2) Bellardi, op. cit., Vol. II, p. 195 e 196.

(3) Lamarck. *Histoire nat. des Anim. sans vert.*, 2e édit., Vol. XI, p. 153.

(4) L'individuo raffigurato nella tavola non è perfetto: manca l'apice della coda, lungo circa 2 mm.

Digitized by Google

Sette individui, di cui uno di mole normale (diam.: mm. 37), gli altri più piccoli ed in parte malconci. — Il carattere principale di questa varietà locale (rappresentata nel Museo Geologico di Torino da alcuni esemplari) sta nel profilo quasi rettilineo e nella maggior lunghezza dell'ultimo anfratto, per cui il diametro trasversale della conchiglia è pari *alla metà* della lunghezza totale, mentre nella forma tipica raggiunge i $^2/_3$ di essa.

12. Conus betulinoides, Lam. (1).

Var. *pusilla*, Myl., fig. 1.

C. a C. betulinoidi genuino his notis sejungendus: *Testa valde minori; spira magis acuta; ultimo ejus ambitu subcomplanato.*

Trentotto individui di piccola mole, rispetto a quella cui giunge la forma tipica (lungh.: mm. 35-55). — Differiscono dagli esemplari pliocenici di questo Museo (tutti assai più grandi) nella forma della spira, più alta e più acuta nei primi anfratti; inoltre l'ultimo di questi essendo spianato superiormente, la sua carena riesce meno ottusa. Si scostano pure alquanto nel carattere della spira dal tipo viennese, descritto e figurato dallo Hörnes (2). Nel complesso sono conformi alla descrizione del Lamarck.

13. Conus Puschii, Micht. (3) (?), fig. 3.

Un individuo imperfetto, che ascrivo come forma aberrante alla specie *C. Puschii*, *Micht.*, cui corrisponde in tutti i caratteri dell'ultimo anfratto. È degno di nota per lo sviluppo anormale della spira, la quale, aggiungendovi idealmente i primi giri mancanti, raggiunge o supera $^1/_3$ della lunghezza totale.

---

(1) Lamarck, loc. cit.
(2) Hörnes, op. cit. p. 17, tav. I, fig. 1.
(3) Michelotti, op. cit. p. 340, tav. XIV, fig 6.

Digitized by Google

14. **Cypraea Brocchii,** Desh. (1).

Var. *flavopunctata* Myl., fig. 4.

C. a C. Brocchii genuina his notis segreganda: *Testa superne magis globosa, marginibus subnullis, puncticulis rufo-flavis passim ornata.*

Individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 25), affine al tipo torinese della *C. Brocchii*; ma contraddistinto, oltrechè dallo sviluppo scarsissimo dei margini laterali, dai punticini rossicci sparsi su tutta la superficie. Esaminati colla lente essi appaiono come piccoli incavi riempiti da un minerale ferruginoso. I caratteri della bocca sono normali.

15. **Turritella (Proto) cathedralis,** Brong. (2).

Var. *trisulca*, Myl., fig. 14.

T. a T. cathedrali Brong. his notis sejungenda: *Anfractibus magis minusve complanatis, antice tribus sulcis latiusculis instructis, postice late marginatis.*

Questa forma, rappresentata per ora da soli sette esemplari assai imperfetti e di diversa mole (15-30 mm. di diametro), si distingue facilmente dalla tipica in grazia dei tre solchi caratteristici che corrono sulla metà anteriore degli anfratti. Per quanto siano variabili i caratteri di questa specie (come ebbe ad osservare il Michelotti - op. cit., pag. 188), ritengo che la forma in parola si debba considerare come varietà distinta, scostandosi essa del pari dal tipo ad anfratti lisci e da quello confusamente e uniformemente solcato, comuni entrambi nei colli torinesi.

---

(1) Lamarck, op. cit., Vol. X, p. 575. — Hörnes op. cit., Vol. I, p. 69, tav. VII, fig. 3.

(2) Hörnes, op. cit., Vol. I, p. 419, tav. XLIII, fig. 1.

Digitized by Google

16. Turritella strangulata, Grat. (1).

Var. *mediosubcarinata*, Myl., fig. 8.

T. his notis agnoscenda: *Anfractibus prope suturam anticam plica angusta praetextis, medio autem obtusissima carina instructis; superficie rugulis sinuosis longitudinalibus ac minutis striis transversis obsolete ornata.*

Individuo unico, imperfetto alle due estremità. Diametro magg.: mm. 18, lungh.: mm. 45. — Questa forma, rappresentata nel Museo Geologico da un solo esemplare di mole alquanto maggiore del nostro, va distinta da quella tipica del Grateloup per la dilatazione anteriore meno sporgente, e la carena caratteristica nel mezzo degli anfratti.

17. Pecten solarium, Lam. (2).

Var. *elongata* (?) Myl., fig. 5.

P. *valva superiori parva, obovata, aequilatera, paulo arcuata; costis quindecim fornicatis, intus biplicatis; striis minutissimis concentricis obsoletis passim perspicuis; auriculis parvis, verticaliter minutissime striatis.*

Una valva superiore imperfetta, di piccola mole (altezza: mm. 40, diametro trasversale: circa mm. 36). Questo individuo, che dal complesso dei caratteri ritengo giovane, differisce dal *P. solarium* tipico per la forma della conchiglia allungata in direzione dorso ventrale e per la piccolezza delle orecchie.

Il Museo Geologico possiede fra i Pettini fossili dei colli torinesi due valve affinissime a questa nella forma generale, nel numero ed aspetto delle coste radiali e di mole poco minore. Possiede inol-

---

(1) Grateloup, *Conchyliologie fossile du bassin de l'Adour.* Tav. XIV, fig. 13.

(2) Lamarck, op. cit, Vol. VII, p. 145.

Digitized by Google

tre parecchie valve giovanili coi caratteri tipici della specie più o meno spiccati, ed alcune altre di mole maggiore (diam.: 10 cent. all' incirca), dall' aspetto adulto. Accenno a questo fatto perchè finora il *P. solarium* Lam. non era annoverato fra le specie fossili dei colli torinesi.

R. Museo Geologico di Torino
febbraio 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice-Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore, GORRESIO, Segretario della Classe, PEYRON, CLARETTA, ROSSI, MANNO, BOLLATI DI SAIN-PIERRE, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE MARTIIS.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio Antonio MANNO offre da parte degli Autori la « *Commemorazione del Principe Amedeo di Savoia letta dal Deputato Giovanni* FALDELLA (Torino, 1890) »; e il volume « *Les Savoyards en Angleterre au XIII siècle et Pierre d'Aigueblanche di Francesco* MUGNIER (Paris, 1891) »: — offre altresì da parte dell'Autore, Abate Ulisse CHEVALIER, Corrispondente dell'Istituto di Francia, una serie di pubblicazioni, delle quali brevemente espone l'importanza per la storia del medio evo: queste saranno singolarmente registrate nella bibliografia stampata in calce agli *Atti* dell'adunanza del 1° Marzo 1891.

Il Socio Giuseppe CARLE, il quale nell'ultima adunanza aveva presentato in dono il lavoro del nostro Socio Corrispondente, Prof. BUONAMICI sulla provenienza del codice pisano delle Pandette, la quale il dotto Autore stima da Costantinopoli, offre oggi, pur tenendosi estraneo alla questione, da parte dell'Autore, Prof. Lodovico ZDEKAUER, l'opuscolo sullo stesso argomento, col titolo: « *Su l'origine del manoscritto pisano delle Pandette Giustinianee* (Siena, 1890) », intorno alla quale origine l'Autore dissente dal Prof. BUONAMICI.

Digitized by Google

La Classe accoglie poi con gratitudine il dono, che lo stesso Socio CARLE fa del suo « *Discorso commemorativo su Pasquale Stanislao Mancini e la teoria psicologica del sentimento nazionale* » letto all'Accademia dei Lincei (Roma, 1890).

Pari gratitudine la Classe esprime al Vice Presidente che le offre il 3° volume delle « *Cronache perugine inedite* » pubblicate coi proprii tipi, e il fascicolo 4° del volume V degli « *Atti della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino*.

Adunanza del 1° Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore, GORRESIO, Segretario della Classe, PEYRON, CLARETTA, ROSSI, PEZZI, CARLE e NANI.

Il Segretario, per incarico del Presidente, presenta alla Classe il dono che le vien fatto dall'Autore Ernesto SCHIAPARELLI, Professore nell'Istituto di Studi superiori a Firenze, del secondo volume « *Libro dei funerali degli antichi Egiziani* » tradotto e commentato. L'importante e dotto lavoro, che uscì in isplendida edizione, ebbe già l'onore del premio di Archeologia dalla R. Accademia dei Lincei, e la Classe ne accoglie con gratitudine l'offerta, conoscendone i pregi. Al qual dono il giovane egittologo aggiunge il primo volume de' suoi studi sull'antico Egitto, che ha per titolo « *La catena orientale dell'Egitto* ».

Il Socio Giuseppe CARLE offre da parte dell'Autore l'opuscolo « *Relazione e Programma al Corso di Storia della Scienza costituzionale e politica italiana* » dato da Luigi ROSSI nella R. Università di Bologna (Bologna, 1890); ed informa brevemente la Classe sul contenuto.

Lo stesso Socio CARLE presenta e legge per la pubblicazione negli *Atti* una Memoria del Prof. Angelo MAJORANA della Regia Università di Catania, col titolo; « *La funzione sociale della Monarchia* ».

Digitized by Google

LETTURE

La funzione sociale della Monarchia;

Nota di ANGELO MAJORANA

SOMMARIO — I. Presunzione di antitesi fra Monarchia e Democrazia. — II. Limiti essenziali della Monarchia. — III. Virtù d'adattamento ed indole mediana della medesima. — IV. Sua efficacia nella formazione dei grandi Stati. — V. Sua indole concreta. — VI. Sua importanza nel nostro secolo. — VII. Suo ufficio di fronte alle odierne agitazioni sociali. — VIII. Suoi caratteri psicologici. — IX. Sua legge di sviluppo.

I. — È comune coscienza che la democrazia sia la legge del nostro secolo. Essa. oggi. tutto investe o traveste. Sentimenti, teoriche, fatti, opere, istituzioni: tutto ciò che si svolge in politica, è dallo influsso della democrazia determinato o per lo meno modificato. Essa alcune cose nuove vuole, altre vecchie disvuole. Fra queste, da molti scrittori e manipolatori di cose politiche, dicesi essere la monarchia.

Parrebbe, secondo alcune scuole politiche, che irrimediabile sia l'antitesi fra monarchia e democrazia. Ripetesi la sentenza di Tacito, che giudicò *dissociabili* il principato e la libertà. E se pure osservasi. come oggi frequentemente può e deve osservarsi, questa e quello essere consociati, definiscesi transitorio tale connubio, quale prodotto di transazioni contingenti. Proclamansi alcuni presupposti d'ordine più o meno razionale; per esempio: — l'eguaglianza non consente un principe irresponsabile; la sovranità popolare non si accorda con un supremo reggitore, ereditario epperò perpetuo; la libertà non è garantita da un monarca, capo del potere esecutivo e duce di eserciti permanenti; la legge naturale e fatale del progresso non deve infrangersi contro rigide e cristallizzate forme politiche.

Giacchè il momento psicologico del nostro tempo può agevolmente definirsi con questa formola: « l'evoluzione ad ogni costo, anche mercè la rivoluzione ». Già altra volta, nel mio

Digitized by Google

discorso sulla *Rivoluzione francese e sua influenza costituzionale* — ebbi a dimostrare come oggi, nelle lettere, nelle scienze, nella politica, nella vita quotidiana, privata, individuale, si rispecchino questi caratteri costanti: « la novità fatta scopo a sè stessa; il paradosso creduto la miglior forma di concepire e di esprimere il vero; accorciata la via dell'assurdo; la scala delle probabilità preponderante nei termini estremi; ricacciate le medie a libito unilaterale; proclamato il dinamismo individuale o sociale, sempre, in tutto ».

Diminuisce l'estensione e si accresce l'intensità; quindi la vita è fatta più breve, ma più attiva, e a volte convulsa. La teorica più d'ogni altra accarezzata è quella della lotta per l'esistenza, che riproduce il vecchio fatalismo sconsolato da un canto e dall'altro incoraggia all'uso di qualsiasi mezzo, pur di vincere. È acuita la sensibilità dei mali ed accresciuta l'idealità dei beni: quindi più stridente e crudele la loro antitesi. Si vuol camminare comunque, pur di progredire; ed è così che l'evoluzione diventa rivoluzione. Poichè l'individuo è rivoluzionario, per l'asseguimento dei suoi spropositati propositi: rivoluzionario contro Dio, che nega; contro gli altri individui che invidia; contro la società, che odia, credendosene vittima; contro lo Stato, ch'egli teme, pur facendolo obbietto della propria ambizione; contro se stesso perfino, che vorrebbe meno impotente, anzichè meno cupido. Di questo travaglio l'amplificazione della democrazia è espressione fedele: essa, che si fonda sul più rigoroso individualismo, ma, per naturale illogicità, dilaga bentosto nel socialismo; essa, che, pur sorgendo da una serie di affermazioni positive, sovente si perde in un complesso di combinazioni negative. Nel che — mi affretto a dirlo — il vizio è meno del principio che delle applicazioni, della teorica che della pratica.

Nondimeno egli è con notabile copia di raziocinii etici, giuridici, politici, storici, che da molti si vorrebbe stabilire questa specie di legge: « i progressi della democrazia sono in ragione inversa di quelli della monarchia ». Del che è lecito dubitare.

Sebbene il principio democratico sia oggi in continuo progresso e riesca ad assicurare maggiori guarentigie politiche e giurisdizionali, e faccia ingigantire la questione sociale; pure non può dirsi che l'efficacia del principio monarchico sia proporzionalmente sminuita. Si confrontino i primi anni del secolo nostro con questi ultimi. Innegabile è il progresso della democrazia; la quale, pres-

Digitized by Google

sochè dovunque, nei civili paesi, ha fatto istituire parlamenti rappresentativi ed ha ordinato, con assetto più o meno stabile ed uniforme, la libertà civile. Maggiore appare quel progresso ove si rifletta che gli ordinamenti democratici oggi non sono più accolti con la incomposta e febbrile festa della novità; ma cominciano a diventare *organici*, per così dire; vuoi per la maggiore elaborazione dottrinale degli istituti, vuoi per la ormai non breve consuetudine dei popoli in essi; sicchè essi stessi dànno i loro frutti benefici con maggiore ossequio alle ragioni giuridiche di tutti i cittadini.

Frattanto è innegabile che, parallelamente a codesti trionfi democratici, la forza morale della monarchia sia cresciuta, o per lo meno non isminuita. Tacendo per ora dell'Inghilterra, la quale anche per ciò fa regola a sè, possiamo osservare che, in Italia, Belgio, Spagna e in molti altri paesi, la monarchia non è più guardata dai popoli come avversaria sistematica di ogni libertà; nè è più circondata dagli antichi sospetti e pericoli. In molti paesi è considerata dalla massima parte dei cittadini (poichè in materie politiche non si può parlare di unanimità; ma la *communis opinio* è data, sempre, da una maggioranza più o meno numerosa) come istituzione al ben vivere ed alle pubbliche libertà necessaria, non meno delle assemblee elette per voto popolare. Negli stessi paesi germanici, dove l'ossequio al principe è stato sempre grande e spontaneo, per inveterato sentimento e costume, osservasi questo fatto singolare, v'è stato *parzialmente* ciò che in diritto civile dicesi *novazione:* il titolo della potestà regia riconoscesi, non più per ragioni incondizionate e quasi feudali, come soltanto una volta, ma anche per ragioni giuridiche e più veramente razionali.

Onde la Corona appare come la più perfetta rappresentante della unità dello Stato ed incorrotta garante di tutti. E poi che una tale convinzione si viene sempre meglio afforzando, più intimo e meno cieco e più sicuramente cosciente e meglio sorretto dalle classi direttive e dalle masse, diventa l'istituto della Corona; epperò più forte di vera e duratura forza.

Notisi che, appunto per il progredire de' principii democratici, oggi le istituzioni politiche non sono appoggiate come un tempo sulla forza sospettosa e violenta della polizia e delle baionette; ma sulla spontanea, libera, sincera e sicura volontà pubblica. Certamente oggi l'espressione de' principii e sentimenti antimo-

Digitized by Google

narchici non è, generalmente, prevenuta nè repressa come, per esempio, fu lungo le reazioni che seguirono al 1815 ed al 1848-49. Notisi ancora che, eccettuata in parte la Francia — la quale, per sue peculiari circostanze, fa, in senso diverso ed anche inverso dall'Inghilterra, regola a sè — le più gravi cagioni di perturbazione che si abbiano ai nostri giorni non sono prettamente politiche, ma sociali; ossia sono, fino ad un certo punto, dalla forma di governo indipendenti. Vi hanno socialisti che credono i loro ideali potersi meglio raggiungere con la monarchia che con la repubblica Ad ogni modo è di ragion comune che i criterii del radicalismo politico sono in gran parte diversi da quelli del radicalismo economico e sociale; basta por mente alle teoriche dello individualismo, della libertà, delle competenze di Stato.

Che anzi per varie cagioni sembra che un nuovo più alto ufficio debba sostenere la monarchia, ai nostri tempi. Questo vecchio principio di governo, che ha subìto tante trasformazioni, che si è accompagnato al despotismo ieratico ed al militare, che si è framezzato tante volte alle aristocrazie ed alle democrazie, che recentemente si è adagiato nella rappresentanza elettiva e libera della nazione, pare che non abbia esaurito ancora la sua vitalità e che sia destinato ad ulteriori svolgimenti.

Nella fiera lotta che da ogni parte si minaccia fra le varie classi della società, e nelle avvisaglie che scoppiano qua e là minacciose, è compromesso tutto l'ordine sociale, quindi anche il politico.

È da chiedersi: — la questione sociale come influirà sulle istituzioni politiche? come influirà sul governo parlamentare? come sulla monarchia costituzionale? come sulla monarchia in genere?

II. — Sotto forma polemica ci proponiamo un'obbiezione, che involve in sè tutta la questione. Odesi comunemente ripetere da molti:

— Se la monarchia, oggi, non solo sussiste, ma pare che progredisca, nel senso che è dalla pubblica fiducia, se non ricercata, appoggiata; ciò non segue per virtù propria di lei, ma della democrazia, alla quale essa si è piegata. I principii democratici hanno investito di nuova e maggior forza la monarchia. Questa splende di luce riflessa; e, quel che è più, di luce contraria ai

Digitized by Google

proprii principii ed alla propria essenza. La monarchia insomma vive e, se vuolsi, progredisce; ma malgrado se stessa. È un anacronismo, che sta ritto in virtù di un compromesso. Ma le istituzioni che non hanno vita propria, escono fuori del tempo loro e non sono vitali. —

L'obbiezione è grave; ma, bisogna affrettarsi a riconoscerlo, è poggiata sur un equivoco. Si precipita una conclusione giuridica su falsi presupposti politici e, sovratutto, sociologici. Si suppone che, secondo il diritto e conforme alla storia, la monarchia sia sempre sinonimo di reggimento assoluto o dispotico. Ma, sebbene questa sia un'opinione comune, non è per ciò meno erronea. E poco credibile la tenacità con cui, germogliati alcuni pregiudizi fra gli uomini, si mantengono e prosperano Quel grande principio della *personificazione*, per la quale siamo portati, certo a motivo delle nostre limitate facoltà intellettive e del nostro necessario relativismo, a costringere in unica persona un ordine complesso di cose e di fenomeni, fra loro grandemente diversi — quel principio, dico, si applica anche qui. Onde, quasi sempre, nei monarchi non si veggono che tiranni, dimenticando i più comuni e frequenti ammaestramenti della storia, e ritemprando la verità di quel detto che vuole le cose più facili essere le più difficili a conoscersi. E poichè l'argomento lo consente, ci diamo qui a discorrere dell'indole e dell'ufficio della monarchia, dal più generale riguardo sociologico.

La monarchia è stata sempre attuata nei modi più diversi e sotto le condizioni più varie. Può affermarsi però che ben raramente i principi abbiano avuto quel potere dispotico che il volgo si immagina. Sempre hanno avuto una serie più o meno numerosa di limitazioni, dovute, ora alle forze aristocratiche, nella duplice forma ieratica e militare, ora a quelle democratiche. Nè deve porsi mente alle sole *limitazioni legali* che in varii luoghi, per legge scritta o consuetudinaria, sono apposte al volere del principe; ma sovratutto alle *limitazioni di fatto*.

Un despota (parlo di lui che è l'ipotesi estrema del principe) ha un tempo necessariamente limitato, ed anche limitate le attitudini personali, nè tutte proprie o atte a reggere quella enorme *enciclopedia pratica* che è il governo dello Stato; per il quale richieggonsi le virtù del legislatore, dell'amministratore, del capitano, del finanziere, del giudice, del diplomatico. Quegli è di necessità costretto a delegare altrui molte delle sue com-

Digitized by Google

petenze: ed una tale delegazione, in definitiva, equivale a fare partecipare altrui al governo. Laonde l'azione del sovrano è *qualitativamente* diversa da quella che sarebbe se egli solo accudisse ai pubblici negozii; inoltre è, *quantitativamente*, minore. Aggiungasi che molte di questo potestà non sono delegate: ma sono ora usurpate, ora indebitamente arrogate, ora semplicemente occupate, come *res nullius*, da individui, o da sêtte, o da fazioni, o da popolo puranco. I favoriti d'ambo i sessi, nella peggiore ipotesi; i consiglieri, nella più comune; i pretoriani, ai tempi degli imperatori di Roma; i confessori, nelle monarchie di Spagna, nè di Spagna soltanto; gli uomini di mente e di cuore, gli artisti e gli scienziati, sotto principi savii; le persone più vicine al trono, quali che sieno, sotto principi deboli; la voce del popolo, sia pur latente; l'inerzia, nonchè la stessa resistenza passiva: la sempre possibile minaccia di pubblici rivolgimenti: queste sono forze che influiscono a trasformare od a limitare, in via di fatto, il potere dei principi. Nè sarà inopportuno — a riprova del nostro assunto sulla non necessaria identificazione fra monarchia e tirannia — il notare che sovente i despoti maggiori sono stati coloro che hanno afferrato la somma delle cose, in seguito a forti rivolgimenti democratici: coloro che, giusta la legge storica del Machiavello, hanno usufruito la convulsione donde sono usciti ed il conseguente accasciamento di forze politiche.

Tali sono stati sempre i tiranni sorti dalle repubbliche di Grecia e di Italia; e ad essi veramente, anche secondo le pure tradizioni etimologiche greche, bene si attaglia il nome di *tiranni*. Tali furono i Cesari; pei quali potrebbesi dimostrare, penso, che furono più despoti — nel senso del despotismo spiegato *personalmente* dal principe, e non da altri individui vicini al trono o, tanto meno, dallo Stato come istituzione — furono più despoti, dico, i primi, cioè i più vicini alla repubblica, che non gli ultimi e più lontani. Tali, serbata la differenza dei tempi, sono stati i Napoleoni.

III. — La ragione ne è chiara. Non voglio ripetere le dimostrazioni da me date, in modo sistematico, nell' altro mio scritto: *Forze e forme politiche e loro valutazione giuridica:* convien però fare alcuni accenni d'ordine generale.

La monarchia (in ispecie per quella che è sua condizione quasi essenziale: l'ereditarietà) tende a diventare istituzione nor-

Digitized by Google

male e tradizionale. Ha in sè il carattere della perpetuità; la quale, a vero dire, poichè nulla è perpetuo al mondo, e molto meno in politica, convertesi nella maggior possibile longevità. Come tale, essa, se sussiste, gli è che può sussistere: perchè contempera in sè e sotto di sè molte forze politiche, contro le quali non agisce sistematicamente, in modo da spingerle agli estremi, ma più tosto le coordina, ed omogeneamente fa svolgere. Tale ufficio di coordinamento è assai più agevolmente sostenuto dalle vecchie monarchie anzichè dalle nuove.

Queste, per imporsi, molte forze sociali debbono comprimere e fors'anco molti individui debbono sopprimere: informi il libro del *Principe*. In cosifatto periodo di formazione, realmente il despotismo è personale. Ma le vecchie monarchie, che han bisogno soltanto di conservarsi, rispettano e contemperano le varie forze politiche: cosa che, ripeto, conduce ad una finale limitazione del despotismo principesco.

Aggiungasi che la monarchia assume forme svariate ed a mala pena numerabili. Onde può dirsi ch'essa non sia tanto *forma* quanto *principio universale di governo*. Il principio, attraverso il tempo e lo spazio, ci si appalesa con forme, condizioni, limitazioni diversissime. Dal dispotismo ieratico delle grandi monarchie asiatiche fino al regime rappresentativo, in cui il re è posto in grado di fare il bene ma, giusta la formola inglese, è nella impossibilità di fare il male (*cannot do wrong*): quale lunga serie di monarchie non si ha, e come non è dessa numericamente maggiore della serie di reggimenti repubblicani?

Sovente i popoli, dopo molte vicende, ritornano al tipo monarchico, pur trasformandolo, come a ciò che di meglio, o di meno male (il che, poi, fa lo stesso, per le pratiche resultanze) abbiano avuto. E quella grande varietà di forme monarchiche e quella davvero mirabile *elasticità* e *virtù di adattamento* che ha il principato, dimostrano ed appieno giustificano l'universalità di esso. Poichè fanno buona pruova le istituzioni, le quali, anche non rispondendo a preconcette ed euritmiche idealità, si prestano, nel fatto, ora resistenti, ora pieghevoli, alle mutabili contingenze e più a lungo sussistono e meglio raggiungono i loro fini.

Frequentemente il principio monarchico appare più elastico e meno assoluto che non sieno il democratico o l'aristocratico; in ispecie perchè questi, e specialmente il primo, esplicano la loro

Digitized by Google

efficacia in modo positivo, ossia con appositi istituti, più tosto che in modo negativo. Nel governo aristocratico propriamente detto, si applica, entro la ristretta cerchia dei partecipanti alla pubblica cosa, il principio della *divisione del lavoro*, come direbbero gli economisti, e della *specializzazione degli uffici e delle funzioni*, come direbbero gli odierni sociologi. L'aristocrazia non sente il bisogno di delegare, come il monarca, molte delle sue competenze; non subisce quindi quelle limitazioni che per il monarca fu visto essere conseguenza della partecipazione che altri, per diritto o per fatto, hanno alle potestà di lui. Quella è esclusiva, quindi è più propriamente assoluta. D'altro canto, anche il principio democratico, nella sua attuazione, si mostra sovente unilaterale ed esclusivo. In via di fatto è da osservarsi, dapprima, che la democrazia pura si riduce non di rado ad una aristocrazia, se non pure oligarchia, de' capiparte. Oltre a ciò, esaminando il principio nella sua genesi, si scorge limpida la sorgente degli eccessi pratici. Presupponesi, secondo esso, che debba comandare il popolo, per ragioni assolute di diritto, morale, politica. Ora, siccome il popolo è una entità collettiva, di per sè disadatta al governo, è giuocoforza ch'esso, per così dire, si riduca, e deleghi le sue potestà ad individui i quali praticamente governino. Ma questi, che derivano il loro imperio da un sovrano assoluto (il popolo), diventano facilmente sovrani assoluti essi pure, anzi essi soltanto, e spadroneggiano, in nome del popolo, sul popolo medesimo. Gli è ciò che spesso si vide nelle democrazie greche ed italiche ed in Francia, all'epoca della grande rivoluzione.

Il principio democratico, insomma, ha una assolutezza intrinseca; la quale, purtroppo, quando quello si realizza, tende a diventare estrinseca; per modo ch'esso si moltiplica di intensità e, come non rispetta le ragioni della minoranza di fronte alla maggioranza, così può tendere a non rispettare quelle dell'individuo di fronte al tutto sociale. Il principio monarchico, invece, anche per la sua genesi logica, appare come un opportuno *termine medio*: perciò bene si raccomanda.

IV. — Qui incominciamo a vedere quale grande posto il principio monarchico abbia occupato nel secolo XIX, e si prepari ad occupare in avvenire.

Non può negarsi che una delle leggi storiche dell'età mo-

Digitized by Google

derna sia la *costituzione di grandi Stati e l'affermazione della nazionalità*. Quel grande processo storico che in Francia fu più sicuramente iniziato sotto Luigi XI ed in Ispagna sotto Alfonso il Magnanimo, che in Russia ed in Prussia fu meglio riassunto da due grandi principi, Pietro e Federico: esso stesso fu in Italia compiuto apparentemente in pochi anni, nel nostro secolo; ma, in realtà, anche da noi, antica e lunga e laboriosa ne era stata la preparazione storica: nelle arti, nelle lettere, nelle scienze, diventate patrimonio e gloria comune; nella riduzione degli Stati, antichi ed innumerevoli, a pochi principati; nelle secolari lotte, non sempre esclusivamente dinastiche, di taluno di essi, ed in ispecie di Casa Savoia; nella progressiva pubblica sfiducia verso il malgoverno forestiero; nella coscienza della nazionalità, ogni giorno svolgentesi e rinvigorentesi presso il popolo; nella lunga e gloriosa serie di rivolgimenti popolari e di martirii individuali. Se l'evoluzione nazionale ed unitaria ebbe conclusione assai più tardi che altrove, ciò vuolsi attribuire in gran parte alla mancanza di una monarchia, la quale servisse come *termine pratico* di coordinamento e di successo. Quando questa si ebbe, la evoluzione, già matura per antiche e proprie ed originarie ragioni, trionfò.

L'esempio di Italia, cui per diversi riguardi risponde l'altro di Germania, ci mostra qual nobilissimo ufficio abbia sostenuto la monarchia d'accordo con la democrazia, nel nostro secolo. E ci mostra ancora come in avvenire un tale ufficio abbia campo di estrinsecarsi. Poichè molti paesi vi hanno tuttavia che lottano per avere organico assetto, giusta il principio di nazionalità: basta por mente alla penisola balcanica. In essi la sola monarchia potrà essere, ripeto, il *termine pratico* conducente allo scopo.

Ma, a parte ciò, non è senza grande significazione il fatto che, eccettuate la Francia, la Svizzera, Andorra e San Marino, oggi tutti gli Stati europei sieno retti a forma monarchica. Nè, parlando della Francia, possonsi dimenticare le sue particolari condizioni politiche, passate e presenti, che rendono così guardingo il giudizio ed incerto il calcolo delle probabilità future. Nè debbonsi precipitare confronti ed analogie con la Svizzera, o con gli Stati Uniti del Nord America, anzi con tutte le repubbliche degli Stati Uniti delle due Americhe, cui si è di recente aggiunto il Brasile. Dappoichè, colà, la questione non

Digitized by Google

è tanto di *forma di governo*, quanto di *forma*, anzi di *sostanza di Stato*. Colà si hanno Stati federali, in cui la necessità di salvaguardare l'autonomia delle parti si impone come massimo problema politico. Mancando la rigorosa unità dello Stato, manca la principale ragione della monarchia. Lo sviluppo del principio federale è più contrario al principato che non sia lo sviluppo del principio democratico. Vi hanno molti esempii di Stati sinceramente democratici e monarchici; ma è ben più difficile vedere Stati che sieno monarchici, democratici e federali insieme. La federazione congiungendosi alla democrazia è poco compatibile colla monarchia, e da questa tende a staccare vigorosamente quella. Una ripruova di ciò, per argomento *a contrario*, parmi si possa vedere nel fatto che presso gli Stati europei in cui (quantunque con forme diverse) il principio federale è applicato, la Germania e l'Austria-Ungheria, gli ordinamenti monarchici sono meno democratici che non in altri paesi, monarchici sì, ma unitarii.

V. — In un grande Stato unitario la monarchia si adagia naturalmente, come la rappresentante suprema dello stesso. È da ricordare che in un governo francamente rappresentativo, la rappresentanza non è veste, ma legge suprema, che deve informare di sè tutti gli organi dello Stato. Laonde rappresentativo non è il solo parlamento, nelle sue due assemblee, ma anche il capo dello Stato. Essi, tuttavia, debbono essere improntati a due diversi generi di rappresentanza. Le assemblee, che sono corpi collettivi, debbono rappresentare la nazione in modo *discreto:* il Capo dello Stato, invece, in modo *concreto*. Discreto è parola che, secondo le più pure tradizioni della nostra lingua, significa *diviso nelle sue parti*, quasi *frazionato*. E tali sono le due assemblee parlamentari, ed in ispecie la popolare. Questa riproduce la nazione nelle sue varie parti, quasi *analiticamente*, e la propria origine discreta manifesta in modo molteplice e continuo. Il Capo dello Stato, all'opposto, deve rappresentare la nazione in maniera concreta, quasi *sintetica*, del tutto impersonale; e con ciò non contraddice, ma meglio favorisce l'economia e l'armonia del regime rappresentativo, assicurandone la migliore pratica. Ed è anche perciò che il secolo XIX, prosecutore assiduo della forma rappresentativa, non ha disdegnato, anzi ha sovente ricercato, i monarchi.

Digitized by Google

VI. — Molti dicono che la monarchia sia necessaria soltanto in rudi e primitivi stadî di civiltà, quando la sola forza individuale può tener fitta e ferma la compagine sociale, e che la sia da respingere quando il progresso abbia sollevato la dignità così degli individui come della società. Codesta affermazione è molte volte smentita dai fatti, i quali dimostrano la bontà del principio monarchico, anche in età progredite. Infatti, ecco in breve quale, nei tempi a noi più vicini, sembra essere stata l'influenza di quel principio.

— Esso è stato strumento efficacissimo perchè la legge storica della costituzione di grandi Stati si realizzasse, dal secolo XV-XVI (usando questa data come media) in poi.

— Ha contribuito a rinvigorire e a far meglio affermare la coscienza nazionale, parallelamente (ed in gran parte dipendentemente) alla costituzione di grandi Stati.

— Ha potuto eliminare molte difficoltà che opponevansi al finale risultato dell'unione politica, in quei paesi (come l'Italia e la Germania) in cui questa più ha tardato a seguire la spontanea unificazione della coscienza nazionale.

— Ha potentemente contribuito (se non in principio, certo nei resultati) alla instituzione e sovratutto alla diffusione, alla conservazione, alla consolidazione del reggimento rappresentativo.

Dalle quali considerazioni risulta che la monarchia non è forma arcaica, non anacronismo, non retaggio di tempi barbari o incolti o deboli per prepotenza di forze brute, non sinonimo necessario di violenza o despotismo. Essa ha potuto allearsi e si è alleata al principio di nazionalità, alla democrazia, ai parlamenti rappresentativi: ha dimostrato di saper essere armonica, grazie alla sua singolare elasticità, con tutto ciò che, di bello e di buono, il progresso dei tempi possa arrecare od assicurare.

VII. — Qui ci riconduciamo al punto di partenza. È mai a credersi che, con la instaurazione dei governi rappresentativi, il principio monarchico sia destinato ad esaurirsi?

Non è certo opera da savio il darsi agli indovinamenti o alle astrologie politiche; ma alcune ragionevoli induzioni dell'avvenire, passando dal noto all' ignoto, possonsi trarre. Ora, chi è che, affacciandosi al grande travaglio sociale dei nuovi tempi; e riflettendo alla copia di agitazioni che viene preparandosi oggi,

Digitized by Google

ed alle nobili aspirazioni, alle inconscie follie, alle spropositate ubbie che germinano d'ogni parte; e presentendo lo scoppio di lotte formidabili per un assetto totalmente nuovo di uomini e cose: chi è, dico, che potrà credere sia esaurito il còmpito di quel principio politico, la cui antica e persistente universalità ha dimostrato e dimostra esser desso davvero pratico, ed espediente, e conducente allo scopo, e alla natura psichica dell'uomo non repugnante, e dal far progredire non alieno, e in molteplice senso commendevole, per virtù di adattamento, di organamento, di sviluppo?

Chè anzi, qui, nel campo delle agitazioni sociali, un nuovo e nobilissimo campo sembra aprirsi avanti alla monarchia, come già si aperse per il principio di nazionalità e per quello rappresentativo. Poichè, sebbene la nostra epoca per molti riguardi appaia rivoluzionaria, pure è evidente ch'essa, ai nuovi ideali onde è travagliata, aspiri a provvedere stabilmente. L'anarchia non è mai sistema di governo: quand'anche la si intenda come mezzo, la si deve respingere, certo, sempre, quale scopo. E neanche come mezzo può essere accolta in altro modo fuorchè contingente. Qualsiasi fatto politico richiede associazione e coordinazione di forze; appunto perchè è fatto sociale, e la società è un complesso, più o meno organico, di forze individue che coesistono e cospirano. Del resto, anche per distruggere — valga questa osservazione soltanto dal profilo logico — fa d'uopo di una ordinata aggregazione di forze. Così il concetto negativo si fa, per l'uso dei mezzi idonei, insensibilmente positivo; nè il positivismo modale tarda a farsi finale.

Scendendo a più particolare discorso, qual meraviglia che le masse popolari, nelle lotte sociali che ci minacciano, abbiano a ricorrere, qua o là, al principio monarchico per essere disciplinate e condotte alla vittoria? Non sarebbe la prima volta che il popolo si allei al monarca contro gli aristocratici. Anzi, a chi ben guardi le storie, il processo di instituzione di tutte le monarchie cesaree, ripete appunto causa efficiente da quella alleanza, per cui un individuo solo si presenta come il naturale rappresentante del popolo, contro l'oligarchia degli imperanti. Perciò gli ebrei chiamarono i re contro i sacerdoti; ed è a credere che per ciò il maggior numero dei romani, al cadere della repubblica, abbiano salutato di buon animo Cesare ed Augusto, opponentisi ai patrizi. Qual meraviglia che, nella lotta contro la borghesia, il popolo possa, qua o là, ricorrere alla protezione

Digitized by Google

dei monarchi? È vero che devesi distinguere la lotta per far cessare i privilegii, i monopolii, i favori infiniti artificialmente dati al fine di accrescere il profitto del capitale, in danno dei consumatori e del salario, dalla lotta morbosa contro la stessa legittima formazione del capitale. Tuttavia, almeno formalmente, la borghesia oggi è paragonabile alla aristocrazia, in quanto rappresenta, di fronte alle masse di operai urbani e rustici, un minor numero di persone. Nè vale il dire che i borghesi sieno quantitativamente più numerosi dei vecchi aristocratici; poichè di fronte agli operai sono sempre una minoranza. Un tempo gli aristocratici misuravansi in raffronto a minor numero di popolo; sia perchè da questo dovevansi escludere gli schiavi, sia perchè in fatto, non meno che in diritto, era assai minore la quantità di cittadini partecipanti alla vita pubblica. Oggi è cresciuto il numero del popolo, e, dentro questo, quello degli ottimati. Ma, per il crescere uguale dei due termini della proporzione, non si altera il rapporto.

D'altronde la rassomiglianza fra la borghesia d'oggi e la vecchia aristocrazia, non è solo quantitativa, ma, sovratutto, qualitativa. Dappoichè entrambe rappresentano, o sembra, se non il privilegio, almeno una più fortunata condizione economica.

VIII. — In appoggio al nostro assunto ci si affacciano alcune considerazioni d'ordine psicologico.

La monarchia è un principio di più facile e pronta intellezione per le masse; nè di intellezione soltanto, ma anche di appreensione affettiva. La stessa superiorità personale del principe ed il fastigio del trono si impongono alle turbe. Le quali, più spesso degli individui nutrono sentimenti, che in apparenza si direbbero contraddittorii, ma che in fatto sono governati da unico, sebbene ascoso, legame logico e psicologico. Ond'è che le masse hanno bensì il sentimento dell'eguaglianza, ma hanno ben pure quello della disuguaglianza, cioè della spontanea sottomissione a ciò che si mostra più forte o più grande. Quindi non di rado il sovrano intimamente soggioga le menti ed i cuori. Aggiungasi che, per un'altra delle contraddizioni apparenti testè accennate, la presenza del principe, agli occhi della moltitudine, frequentemente si accorda bene col principio d'eguaglianza. Infatti, pur togliendo il principe, ei farà d'uopo che qualcuno resti a capo dello Stato. Chi sarà mai costui? Un uomo, certo; ed un uomo

Digitized by Google

come gli altri, sorto dal popolo. Ora, è precisamente ciò, quel che offende la moltitudine. Un re ereditario pare che offenda meno. La coscienza della superiorità di lui e della sua stirpe è, per tradizione, così diffusa nel volgo, che. con una tal quale inconscienza, continuasi a prestare ubbidienza a lui ed ai suoi. Invece il nuovo venuto dà ombra; e. quantunque precaria sia la sua potestà, suscita invidia: invidia, forse. non meno che sospetto.

Notisi ancora che la moltitudine ama abbandonarsi alla legge di inerzia e si rende schiva delle novità ed ossequente alle tradizioni. Infatti, tutti i rivolgimenti politici e sociali sono prima dalle classi superiori preparati e maturati, poi dalle masse eseguiti. Il principio monarchico favorisce in modo essenziale codesta tendenza d'inerzia: il che, se è un gran male quando si volge a pubblico danno e ad usufruimento per parte di individui o consorterie, è pure un bene, quando possa riuscire ad assicurare la conservazione dei beni già acquisiti.

Che le masse, poi, sieno legate alle tradizioni, è abbondantemente provato dal fatto, che la religione, istituto se altro mai tradizionale, ha nella fede delle moltitudini il suo naturale campo di sviluppo. Epperò religione e monarchia si dànno reciprocamente la mano, come bene vedesi in tutte le età originarie dei popoli, quando il principio monarchico identificasi col teocratico. Le moltitudini, frattanto, che per lunga consuetudine hanno rispettato il principe, dalla antica continuità del principato logicamente inducono la continuità futura; e, lusingate nel proprio temperamento tradizionale, sono sempre più e meglio condotte a prestar fede ad un istituto non disarmonico al proprio carattere.

Le considerazioni testè svolte hanno, per così dire, valore *statico;* ma anche dall'aspetto *dinamico* sono corroborate dai fatti. Ciò che accade quando la monarchia è da lunga stagione istituita, prevedesi, prima della sua istituzione, che debba accadere in seguito; epperò la si ricerca, o per lo meno non si combatte. L'armonia psicologica fra il principato ed il popolo disvelasi anche nei periodi di lotta, quando nuovi istituti e rapporti si vogliono creare. In tali casi, anzi, il principato è forse più ricercato che non in altri. Anche le istituzioni politiche della repubblica romana imponevano la dittatura in momenti di pubblico pericolo. E qui notisi, con intento di analogia *a fortiori*, che noi discorriamo di fatti politici naturali e spontanei, non già disciplinati dall'azione preventiva e riflessa del legislatore.

Digitized by Google

IX. — Ai concetti suesposti, nondimeno, non vuolsi dare troppo larga significazione. Il nuovo campo d'azione, aperto avanti alla monarchia, è sempre sottoposto alle varie condizioni del tempo e dello spazio. Il precedente discorso ha forse un valore più negativo che positivo, in quanto tende ad affermare la possibilità che quel campo non sia chiuso, anzichè la necessità che sia aperto. Tanto più che oggi sembra che incomba una crisi ai governi parlamentari; i quali pagano il fio di essere stati troppo caldamente invocati per il passato e di avere suscitato troppo grandi speranze. Queste, naturalmente, non hanno potuto essere mantenute tutte; la disillusione è sopravvenuta in molti, e con essa una iniziale reazione, per cui odesi spesso ripetere: « si stava meglio quando si stava peggio. » Un tale concetto, associandosi alle nuove esigenze sociali, darebbe suffragio e credito a qualsiasi novità, quand'anche questa sia un larvato ritorno all'antico. Ma se da ciò la monarchia può trarre immediato vantaggio, non deve obliarsi che il principio fondamentale è sempre il democratico, ed è questo che veramente contiene in sè la legge del tempo; quindi ad esso la monarchia deve ispirarsi, se vuole sussistere. Infatti, il principio democratico appunto oggi impone al principato di sussistere e di trasformarsi.

Il concetto fondamentale, di ragione scientifica e storica, è il seguente: « la monarchia è un *principio universale di governo* ». Essa non si racchiude nel patriarcato, non nel principato ieratico, non nel cesarismo, non nella feudale gerarchia dispotica, non nel legittimismo, neanche nello stesso costituzionalismo rappresentativo e parlamentare. Essa deve seguire i tempi e adattarsi: in ciò stanno la sua ragione e la sua forza.

Una grande legge evolutiva vi è stata, per cui la monarchia da *teocratica* si è fatta *democratica*. Ma non basta: oggi, se essa vuole conservarsi, deve diventare *sociale*. È questa una legge storica e fatale, che non consente passi all'indietro, perchè si riattacca alle più generali condizioni della società moderna.

L'individuo e la società rappresentano due concetti egualmente originarii ed efficienti. Discutesi sempre quale dei due sia destinato a prevalere in modo assoluto, lungo l'evoluzione storica. La questione si riconduce al generale problema della legge del progresso: argomento di gravi dubbii e controversie. Pare a me che anche qui si rispecchi il carattere fondamentale della legg edi evoluzione, che porta ad un successivo alternarsi dei due prin-

Digitized by Google

cipii di *integrazione* e di *differenziazione*. Vi sono molti sociologi, ai nostri giorni, che, seguendo più o meno fedelmente le orme dello Spencer, professano che il fine ultimo della evoluzione sia la *specializzazione*, mercè cui si ottiene la maggior possibile *individuazione*. Credo invece che lo sviluppo di questo principio debba essere e sia parallelo a quello medesimo di integrazione. È ben vero che essi sembrano in antitesi fra di loro; ma l'antitesi, come spesso suole accadere, è meramente logica (quasi per *iuxtapositio*), ma non sostanziale. Poichè anche qui (anzi qui più che altrove) si rivela il principio fondamentale di quel procedimento per *media*, che nel campo personale e civile dicesi *transazione* ed in quello meccanico è « la *risultante* di forze contrarie, applicate ai medesimi punti. » Ora, la transazione, la risultante, la media, noi le abbiamo anche nei rapporti dei due principii individuale e sociale, e particolarmente nella loro evoluzione combinata.

Ciò malgrado, qualunque possa essere il risultato finale della evoluzione, è certo che, nei singoli tratti di tempo, ora l'uno ora l'altro di quei due principii prevale in modo singolare. Anche il tempo, sebbene formi una unità indefinita e senza soluzione di continuità, può considerarsi diviso in frazioni (che metaforicamente si definirebbero *individuali*), di cui ciascuna ha figura e caratteri proprii. Nell'una o nell'altra di queste diverse singole frazioni, hanno prevalenza, ora il principio individuale, ora quello sociale. Si alternano in modo da giustificare quasi i *corsi* e *ricorsi* di G. B. Vico: concetto da me largamente svolto nella mia *Ipotesi di una legge di embriologia sociale*. Frattanto, al giorno d'oggi, non vi ha dubbio che sia in grande sviluppo il principio sociale, di che si hanno prove continue nei progressi del socialismo cattedratico, governativo e financo piazzaiuolo. Si tende, se non ad eliminare, a diminuire l'individuazione, accrescendo l'integrazione: e ciò, naturalmente, per mezzo dell'organo più acconcio, lo Stato. Non giova qui indagare se e quanto ciò sia un bene e sia per durare. Basti la constatazione del fatto.

Ma, per i fini del nostro lavoro, vuolsi osservare che la monarchia rappresenta di per sè un principio integrale. E questa la principale cagione per cui, *a priori*, essa non si disvela in totale antitesi col socialismo. L'uno e l'altra, almeno nella loro origine logica, hanno questa concordanza eminente: significano due processi di *integrazione*.

Digitized by Google

In politica, più che altrove, debbonsi lamentare i pregiudizii di sentimenti, di idee, di parole. Molti oggi credono e ripetono che il socialismo sia democratico; mentre, in verità, le premesse da cui esso parte, contraddicono a quelle della democrazia, che, nella sua essenza, è, o piuttosto dovrebbe essere, *individualista*. È vero che oggi, presso i più, il principio democratico si è, in teoria ed in pratica, sformato; ma non per ciò chi bene consideri le cose deve mutar giudizio. In un mio studio sul *Socialismo inglese*, ho avuto occasione a rilevare la genesi, anche psicologica, della singolare alterazione che ha subìto il principio democratico.

La monarchia, invece, fin nel suo concetto originario, esprime il processo di integrazione; quindi meglio può esercitare la *funzione sociale* di cui abbiamo discorso Tanto più si crederà a ciò in quanto si rifletta che quella comprende in sè un principio *relativo* ed *universale*, dotato di una estrema virtù d'*adattamento*. Prova ne sia il fatto di essersi piegata al carattere democratico dei tempi. Non potrebbe, quindi, tornare addietro e rifare la propria evoluzione senza spezzarsi; a meno che la società stessa, rotta la via del progresso, abbia a precipitare in novella barbarie.

Ma questo sarebbe vano e stolto vaticinio.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 25 Gennaio all'8 Febbraio 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

Donatori	
R. Accademia delle Scienze di Berlino.	* G. G. J. JACOBI's gesammelte Werke; herausgegeben auf Veranlassung der k. Preussischen Akademie der Wissenschaften; V Band, herausg. von K. WEIERSTRASS. Berlin, 1890; in-4°.
Società Medico - chirurg. di Bologna.	* Bullettino delle Scienze mediche pubblicato per cura della Società Medico-chirurgica e della Scuola medica di Bologna; serie 7ª, vol. I, fasc. 12. Bologna, 1890; in-8°.
Boston " "	Journal of Morphology edited by C. O. WHITMAN with the cooperation of E. PHELPS ALLIS; vol. IV, n. 2. Boston, 1890; in-8° gr.
Società belga di Microscopia (Bruxelle).	Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVII, n. 3. Bruxelles, 1891; in-8°.
Accad. Gioenia di Catania.	* Bollettino mensile dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, ecc.; nuova serie, fasc. XV, nov. 1890. Catania, 1890; in-8°.
J. V CARUS (Lipsia).	* Zoologischer Anzeiger herausg von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig; XIV Jahrg, n. 354, 355. Leipzig, 1891; in-8°.
Società Reale di Napoli.	* Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società R. di Napoli); serie 2ª, vol IV, fasc. 12. Napoli, 1890; in-4°.

Digitized by Google

Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc., publiées par A. GOUGUENHEIM; t. XVII, n. 1. Paris, 1891; in-8°. — La Direzione (Parigi).

* Revista do Observatorio — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno V, n. 12. Rio de Janeiro, 1890; in-8° gr.. — Osservatorio di Rio Janeiro.

* Atti dell'Accademia pontificia de'Nuovi Lincei, ecc.; anno XLIII, Sess. IVa del 16 marzo; Va del 20 aprile; VIa del 25 maggio 1890. Roma, 1890; in-4°. — Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei (Roma).

Beitrag zur Statistik der Geschwülste; unter Besonderer Berücksichtigung, der Aetiologie mit Ausschluss der Cystengeschwülste und der Drünesenhyperplasien; Inaugural-Dissertation der medicinischen Facultät der kaiser-Wilhelms Universität Strassburg zur Erlangung der Doctorwürde, vorgelegt von Otto RAPOK. Leipzig. 1890; 1 fasc. in-8°. — Università di Strasborgo.

Beitrag zur hypodermatischen Anwendung unloslicher Quecksilberpräparate zur Behandlung der Syphilis; Inaug.-Diss., etc., von Carl LEVY. Strassburg i. E, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber das « Timbo » (Paullinia pinnata) ein brasilianisches Fischgift; Inaug.-Diss., von Dr. Phil. Waclaw von SOBIERANSKI. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Verletzungen des Kindes Vorzugsweise des Schädels bei spontaner Geburt mit casuistischen Beiträgen aus der Frauenklinik der kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg, etc.; Inaug.-Diss., etc., von Konrad von HOESSLIN. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Myomotomie und die Versongung des Stumpfes nach derselben; Inaug.-Diss., etc., von Simon FELSENTHAL. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Das Codeïn als Narcoticum und Anästheticum; Inaug.-Diss., etc., von Wilhelm HEINDINGSFELD. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Wolffberg's quantitative Farbensinnprüfung zur Diagnose von Refraktionsanomalien; Inaug.-Diss., etc. von Edmund BICKART. Emmedingen, 1890; 1 fasc. in-8° gr. — Id.

Beitrag zur Symptomatologie der Perforationsperitonitis im Gefolge des ulcus ventriculi perforans; Inaug.-Diss., etc., von Isidor STRUCK. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die künstliche Frühgeburt und ihr Erfolg bei Beckenenge auf Grund von 22 an der Universitäts-Frauenklinik zu Strassburg seit 1879-80 beobachteten Fällen; Inaug.-Diss., etc., von C. FINCK. Strassburg, 1890; 1 fasc in-8°. — Id.

Università di Strasborgo — Ueber Veränderungen des Hornhautradius unter dem Einfluss von Atropin, Homatropin, Physostigmin und Cocain; Inaug.-Diss., etc., von Siegfried Boss. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur reflectorischen Hemmung der Herzthätigkeit; Inaug.-Diss., etc., von Albert Reiff. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ein Fall von Kleinhirntuberkel im Kindesalter; Inaug.-Diss., etc., von Paul Koenig. Strassburg i. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ein Fall von doppelseitiger arteria hyaloidea persistens; Inaug.-Diss., etc., von Robert Fuchs. Strassburg i. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber Ovariotomie in der Schwangerschaft; Inaug.-Diss, etc., von Max Wachenheimer. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber die Wirkung des Atropin auf den Darmkanal in Hinsicht auf die Behandlung eingeklemmter Unterleibsbrüche mit Belladonna oder Atropin, Inaug.-Diss., etc., von Kurt Hagen. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Die Ovariotomie bei Greisinnen; Inaug.-Diss., etc., von Ludwig Spanier. Strassburg i. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ein Fall von Einklemmungsshok nebst Darmparalyse bei Hernia inguin. incarcerata; Inaug.-Diss., etc., von Hermann Trier. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber Psychosen in Folge von Masturbation; Inaug.-Diss., etc., von Julius Meyer. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber Endresultate der Hüftgelenk-Resectionen; Inaug.-Diss., etc., von Paul Baerr. Leipzig, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber Tuberculose des Uvealtractus; Inaug.-Diss., etc., von Fr. Xav. Haugg. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber mechanische Behandlungsmethode und ihre Erfolge bei tabes dorsalis; Inaug.-Diss., etc., von Julius Beutner. Strassburg i. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur Lehre der Schwangerschaftsniere; Inaug.-Diss., etc., von Julius Baruch. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber periodische Manie; Inaug.-Diss., etc., von Hugo Levin. Strassburg i. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Ueber die Entstehung der wahren Aneurysmen; Inaug.-Diss., etc., von Carl MANCHOT. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°. — Università di Strasborgo

Ueber die Symptomatologie des Delirium tremens; Inaug.-Diss., etc., von Gustav ASCHAFFENBURG Wien, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Drainage des Peritoneums bei Peritonitis; Inaug. Diss., etc.; von Karl STUEHLEN. Würzburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber die Kaliberverhältnisse der quergestreiften Muskelfasern; Inaug.-Diss., etc., von Reitaro MAYEDA, aus Kioto, Japan. München, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber den Zusammenhang einiger krankhafter Zustände des Magens mit anderen Organerkrankungen; Inaug.-Diss., etc., von W. SOLTAU FENWICK, M. B. Lond. - London; 1 fasc. in-8°. — Id

Beiträge zur Klinik und Casuistik der traumatischen Geistesstörungen; Inaug.-Diss., etc., von Paul RICHTER. Berlin, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Augenblenorrhoe; Inaug.-Diss., etc., von Achatz FRIEDMAN. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Die Wirkungen der Castration auf den weiblichen Organismus; Inaug.-Diss., etc., von Siegfried BRODNITZ. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ein Beitrag zur Lehre von der atrophisirenden Kinderlähmung; Inaug.-Diss., etc., von S. von BIEMA. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber das Lecithin und Cholesterin der rothen Blutkörperchen; Inaug.-Diss., etc., von Paul MANASSE. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber den Einfluss der Influenza auf den weiblichen Sexualapparat; Inaug.-Diss., etc., von Gustav MEYER. Strassburg, 1890: 1 fasc. in-8°. — Id.

Ueber Triaethylcarbinol als Sclafmittel; Inaug.-Diss., etc., von P. DOEHRING. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Tertiäres Amyl-carbamid als Hypnoticum; Inaug.-Diss., etc., von Simon VOGEL. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Beschreibung eines Falles von protrahierter Geburt; Inaug.-Diss., etc., von Otto GUNZ. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Zur Contagiositätsfrage der Varzen und spitzen Condylome; Inaug.-Diss., etc., von Karl BERNA. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Università di Strasborgo — Einige Fälle von Gehirntumoren ohne Stauungspapille; Inaug.-Diss., etc. von Eduard LANGSDORF. Strassbug, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Beiträge zur Kenntniss der Stammanatomie von *Phitocrene macrophylla* BL.; Inaug.-Diss., etc., der matematischen und naturwissenschaftlichen Facultät der kaiser-Wilhelms-Univ.-Strassburg, etc., von B. L. ROBINSON. Leipzig, 1889; 1 fasc. in-4°.

Id. — Ueber Gesichtsfeldeinengungen bei allgemeinen Neurosen; Inaug.-Diss., etc., von Ludwig WOLFF. Strassburg I. E., 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — Bestimmung der Potentialdifferenzen welke zu einer Funkenbildung in Luft zwischen verschiedenen Electrodenarten erforderlich sind; Inaug.-Diss., etc, von Johannes FREYBERG. Leipzig, 1889; 1 fasc. in- °.

Id. — Ueber das γ-Aethylcaprodeltalacton und γ-Benzylcaprodeltalacton; Inaug.-Diss., etc., von Constantin CHRIST. Strassburg, 1889, 1 fasc. in-8°.

Id. — Die Lamprophyrgänge des südlichen Vorspessart; Inaug.-Diss., etc., von, Erwin GOLLER. Stuttgart, 1889; 1 fasc. in-8°.

Id. — Ueber das Dalton'sche Gesetz; Inaug.-Diss., etc., von B. GALITZINE. Strassburg, 1890; 1 fasc. in-8° gr.

Id. — Contributions to our knowledge of Phenuvinic Acid and Phenylketopentene; Inaug.-Diss. of th mathem. and nat.-Sc. Faculty etc; submitted by Artur COLEFAX. Strassburg; 1 fasc. in-8°.

R. Università di Torino. — Annuario della R. Università degli Studi di Torino per l'anno accademico 1880-91. Torino 1891; 1 vol. in-8°.

Società meteor. italiana (Torino). — * Annuario meteorologico italiano pubblicato per cura del Comitato direttivo della Società meteorologica italiana; anno VI, 1891. Torino; 1 vol. in-16°.

Id. — Chelonii scoperti nei terreni cenozoici delle prealpi venete; Memoria del Barone Achille DE ZIGNO. Venezia, 1889; 1 fasc. in-4°.

Id. — — Chelonii terziari del Veneto; Memoria seconda del Barone Achille DE ZIGNO. Venezia, 1890; 1 fasc. in-4°.

Id. — — Barone Achille DE ZIGNO — Ofidiani trovati allo stato fossile, e descrizione di due colubri scoperti nei terreni terziari del Veneto. Padova, 1890; 1 fasc. in-8°.

L'Autore. — La resistance du verre, par M. J. HENRIVAUX (Estr. de la *Revue Scientifique*); 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

— Étude de la transformation des carbures d'hydrogène en présence de la vapeur d'eau aux températures elevées, par MM. Coquillon et Jules Henrivaux. Paris, 1891; 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

Guida al calcolo delle coordinate geodetiche, di Nicòdemo Iadanza. Torino, 1891; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Primo Elenco di *Diatomacee* del laghetto artificiale del pubblico giardino di Modena, e qualche nozione sulla biologia di queste alghe; Nota di L. Macchiati (Estr. dal *Bullettino della Società Bot. ital.*, Adunanza della Riunione in Verona, 5 settembre 1890, nel *Nuovo Giorn. bot. ital.*, vol. XIII, n. 1); 1 fasc. in-8°. — L'A.

— Seconda contribuziono alla Flora del gesso; Nota di L. Macchiati (Ibid.); 1 fasc. in-8°. — Id.

— Nota preventiva sulla morfologia ed anatomia del seme della *vicia narbonensis* di L. Macchiati (Ibid.); 1 fasc. in-8°. — Id.

Emile des Ormiers; par Alfred Mercier (Etrenne offerte aux lecteurs du *Journal de l'Athénée*, le 1 janvier 1891); 1 fasc. in-8° gr. — L'A.

La Scuola tecnica e il Ginnasio; per Eugenio Semmola. Napoli, 1890; 1 fasc. in-4°. — L'A.

Dall'8 al 22 Febbraio 1891

Donatori

* Le Stazioni sperimentali agrarie italiane; Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, ecc., diretto dal Prof. Ing. Mario Zecchini, Direttore della R. Stazione enologica sperimentale di Asti; vol. XIX, fasc. 6. Asti, 1890; in-8° gr. — R. Stazione enologica sperim. d'Asti.

* Commentari dell'Ateneo di Brescia, per l'anno 1890. Brescia, 1890; 1 vol. in-8°. — Ateneo di Brescia.

* Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy et Harvard College; vol. XX, n. 6: Notice of Calamocrinus Diomedae, a new Stalked Crinoid from the Galapagos, dredged by the U. S. Fish Commission Steamer « Albatross », Lieut.-Commander Z. L. Tanner, U. S. N., commanding; by A. Agassiz; — n. 7: The origin and development of the Central Nervous System in Limax maximus; by Annie P. Henchmann. Cambridge U. S. A., 1890; in-8°. — Museo Zool. compar. (Cambridge).

Digitized by Google

Cambridge. — The scientific Papers of James CLERK MAXWELL, edit. by W. D. NIVEN; vol. I. Cambridge, 1890; in-4°.

Accad. delle Sc. di Cracovia. — * Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie: — Comptes rendus des séances de l'année 1891, Janvier. Cracovie, 1891; in-8°.

Scuola politecnica di Delft. (Paesi Bassi). — * Annales de l'École polytechnique de Delft; t. VI, 1890, 2e livrais. Leide, 1890; in-4°.

R. Acc. Irlandese delle Scienze (Dublino). — * The Transactions of the R. Irish Academy; vol. XXIX, part. 14. Dublin, 1891; in-4°.

Id. — — Proceedings of the R. Irish Academy; 3 series, vol. I, n. 4. Dublin, 1891; in-8°.

R. Coll. de' Fisici di Edimborgo. — Reports from the Laboratory of the R. College of Physicians Edinburgh; edit. by J. Batty TUKE and Noël PATON; vol. III, Edinburgh, 1891; in-8°.

La Direzione (Filadelfia). — * The Journal of Comparative Medicine and Veterinary Archives, edit. by W. A. CONKLIN, etc., vol. XII, n. 1. Philadelphia. 1891; in-8°.

Società Senkenbergiana, di Francoforte. — * Abhandlungen herausgegeben von der Senkenbergischen Naturforschenden Geselschaft; XVI Band, 2 Heft, Frankfurt a. M., 1890; in-4°.

Società Reale di Londra. — * Proceedings of the R. Society of London; vol. XLIX, n. 296. London, 1890; in-8°.

R. Soc. astron. di Londra. — * The quarterly Journal of the geological Society of London; vol. XLVII, n. 185, part. 1. London, 1891; in-8°.

La Direzione (Nuova York). — Comptes-rendus de l'Athénée Louisiannais, etc.; 4e série, t. II, livrais. 1e. Nouvelle-Orléans, 1891; in-8°.

Soc. filomatica di Parigi — Société philomatique de Paris, etc. — Table générale par noms d'auteurs des articles contenus dans le 5e, 6e et 7e séries des Bulletins (1836 à 1888). Paris, 1890; 55 pag. in-8°.

Scuola nazionale delle Miniere (Parigi). — * Annales des Mines, etc.; 8e série, t. XVIII, 5e livrais. de 1890. Paris, 1890; in-8°.

Soc. Zoologica di Francia (Parigi). — * Bulletin de la Société zoologique de France pour l'année 1890; t. XV, n. 10. Paris, 1890; in-8°.

Parigi. — Histoire des plantes. — Monographie des Acantacées, par H. BAILLON, pagines 403-476. Paris, 1891; in-8° gr.

Soc. fis.-chimica dell' Università di Pietroborgo. — Journal de la Société physico-chimique russe à l'Université de St.-Pétersbourg; t. XXII, n. 9. St.-Pétersbourg, 1890; in-8°.

Digitized by Google

* Atti della Società toscana di Scienze naturali – Processi verbali, vol. VII, pag. 129–198. Pisa, 1890; in-8° gr. — Soc. Toscana di Scienze nat. (Pisa).

Bollettino della Società generale dei Viticoltori italiani; anno VI, n. 2, 3. Roma, 1891; in-8° gr. — Società dei Viticolt. ital. (Roma).

* Rivista di Artiglieria e Genio; anno 1891, vol. I, gennaio. Roma; in-8°. — La Direzione (Roma).

Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XIX, disp. 12. Roma, 1891; in-4°. — Società degli Spettr. ital. (Roma).

– Frontespizio e Indice delle Memorie contenute nel vol. XIX, anno 1890; in-4°. — Id.

Bollettino medico-statistico dell'Ufficio d'Igiene della città di Torino; anno XIX, n. 28-36. Torino 1890; in-4°. — Municipio di Torino.

Rivista mensile del Club Alpino italiano; vol. X, n. 1. Torino, 1891; in-8°. — Il Club alp. ital. (Torino).

* Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt, etc.; 1890, n. 14–18; 1881, n. 1. Wien, 1890-91; in-8° gr. — Istituto geologico di Vienna.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, etc., Jahrg. 1890. XL Band, 4 Quartal. Wien, 1890; in-8°. — Vienna. * *

* Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending 1890, June 30. Washington, 1890; 1 fasc. in-8°. — Osserv. Navale degli Stati Uniti (Washington).

Die Entwicklung der Elemente; Entwurf zu einer biogenetischen Grundlage für Chemie und Physik, von Gustav WENDT. Berlin, 1891; 49 pag. in-8°. — L'Autore.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 1° al 15 Febbraio 1891.

Donatori

* Viestnik hrvatskoga arkeologickoga Drutztva; Godina XIII, Br. 1. U Zagrebu, 1891; in-8°. — Soc. archeologica (Agram).

* Etymologicum magnum Romaniae. — Dictionarul limbei istorice si poporane a Românilor, lucrat după dorinţa si cu cheltuiéla M. S. Regelui Carol I, sub auspiciele Academiei Române; de B. PETRICEICU-HASDEU; t. II, fasc. 3. ABECIU-AŞTERNAT. Bucuresci, 1890; in-4°. — Accad. Rumena delle Scienze (Bukarest).

Bibliot. nazionale di Firenze. — Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 122. Firenze, 1891; in-8° gr.

Soc. di Letture e Conv. scient. di Genova. — * Ateneo Ligure — Rassegna mensile della Società di Letture e Conversazioni Scientifiche di Genova; anno XIII, ottobre-dicembre 1890. Genova, 1891; 1 fasc. in-8°.

Gotha. * * — Dr. A. Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, herausg. von Prof. Dr. A. Supan; XXVII Band, n. 1. Gotha, 1891; in-4°.

Università di Lovanio. — Université de Louvain — Recueil de Travaux publiés par les Membres de la Conférence d'Histoire, sous la direction de M. le Prof. Ch. Moeller; 2° fasc. — La querelle des investitures dans les diocèses de Liège et de Cambrai, par Alfred Cauchie: 1ère partie, Les reformes grégoriennes et les agitations réactionnaires (1075-1092). Louvain, 1890; in-8°.

Id. — Les droits de Charles-Quint au Duché de Bourgogne: — Un chapitre de l'histoire diplomatique du XVI° siècle; Dissertation pour le Doctorat en Sciences morales et historiques, par Alfred de Ridder. Louvain, 1890; 160 pag. in-8°.

Id. — De la justice pénale; Étude philosophique sur le droit de punir; Dissertation pour le Doctorat en philosophie de l'École St.-Thomas d'Aquin à Louvain; par Isidore Maus. Bruxelles, 1890; 1 vol. in-8°.

Id. — De resurrectione corporum: Dissertatio theologica quam cum subjectis thesibus, etc., pro gradu Doctoris, etc., propugnavit Ludovicus Jos. Mierts. Lovanii MDCCCXC; 1 vol. in-8°.

Id. — Theses Facultatis theologicae (sine titulo), n. DCXI-DCXXI; in-8°.

Id. — Theses Facultatis Philosophiae et Litterarum (sine titulo), n. XXII-XXIV; in-8°.

Id. — Annuaire de l'Université catholique de Louvain; sixième année, 1842. Louvain; 1 vol. in-16°

Id. — Annuaire de l'Univ. cath. de Louvain; cinquante-cinquième année, 1891. Louvain, 1 vol. in-16.

Id. — Programme de Cours: année académique 1890-91. Louvain, 1890; 1 fasc. in-8°.

Lipsia. * * — Allgemeine deutsche Biographie; 154 und 155 Lieferung (Band XXXI, Lfg. 4 und 5). Leipzig, 1890; in-8° gr.

R. Istit. Lomb. (Milano). — * Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIII, fasc. 20; vol. XXIV, fasc. 1. Milano, 1890-91; in-8°.

Digitized by Google

* Compte rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1891, n. 2, pag. 41-60; in-8°. — Soc. di Geografia (Parigi).

Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno VIII, n. 11. Roma, 1890; in-8° gr. — Ministero d'Agr. Ind. e Comm. (Roma).

* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ecc.; serie 4ª, vol. VII, fasc. 2, 1° sem. Roma, 1891; in-8° gr. — R. Accademia dei Lincei

Atti del Parlamento italiano — Sessione del 1863-64-65, 4° periodo (dal 2 ottobre 1864 al 22 febbraio 1865 (VIII Legislatura); 4ª ediz. riveduta da G. Galletti e P. Trompeo; vol. IX, X (XV e XVI della Sessione). — Discussioni della Camera dei Deputati, Roma, 1890; in-4°. — Camera dei Deputati (Roma).

— Sessione 1889-90 (4ª della XVI Legislatura) — Discussioni: vol. I. II, III, IV, dal 25 novembre 1888 all'11 luglio 1890. Roma, 1890; in-4°. — Id.

— Vol. V, Indice alfabetico ed analitico delle materie contenute nei quattro volumi delle Discussioni della Camera dei Deputati, Sessione 1889-90. Roma, 1890; in-4°. — Id.

— Legislatura XVI, Sessione quarta 1889-90, dal 26 novembre 1889 all'11 luglio 1890; = Raccolta degli Atti stampati per ordine della Camera; vol. I, Documenti dal I al XVbis; vol. II, dal XVI al XXXII; in-4°. — Id.

— Legislatura XVI, Sessione quarta 1889-90, dal 26 novembre 1889 all'11 luglio 1890: — Raccolta degli Atti stampati per ordine della Camera; vol. I, dal n. 1 al 10; vol. II, dal n. 11 al 60; vol, III, dal. n. 61 al 68; vol. IV, dal n. 69 al 114; vol. V, dal n. 115 al 180. Roma; in-4°. — Id.

- Discorsi parlamentari di Marco Minghetti, raccolti e pubblicati per deliberazione della Camera dei Deputati; vol. V, VI, VII, VIII. Roma, 1890; in-8° gr. — Id.

-- Manuale ad uso dei Deputati al Parlamento nazionale; XVII Legislatura. Roma, 1890, in-8° picc. — Id.

* Studi e Documenti di Storia e Diritto; Pubblicazione periodica dell'Accademia di Conferenze storico-giuridiche, anno XI, fasc. 4. Roma, 1890; in-4°. — Accademia di Conferenze storico-giuridiche (Roma).

Consiglio Comunale di Torino; 1890-91, n. I-VIII. Torino, in-4°. — Municipio di Torino.

Il Rosario e la Nuova Pompei; Periodico mensuale benedetto tre volte da Leone XIII; anno VIII, quad. 1. Valle di Pompei, 1891; in-8°. — La Direzione (Valle di Pompei)

Sulla storia del manoscritto pisano-fiorentino delle Pandette; alcune osservazioni del prof. Francesco Buonamici. Bologna, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

Ing. Leonardo Carpi. — Sui mezzi di sicurezza nelle ferrovie in relazione alle diverse cause d'infortunii; Conferenza tenuta il 20 luglio 1890 nel R. Istituto d'Incoraggiamento, in Napoli. Firenze, 1891; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Digitized by Google

Dal 15 Febbraio al 1° Marzo 1891

Donatori

Donatori	
Società Savoiarda di Storia d'Arch. (Chambéry).	* Mémoires et documents publiés par la Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie; t. XXIX (2ᵉ série, t. IV). Chambéry, 1890; in-8°.
Bibliot. nazionale di Firenze.	Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 123. Firenze, 1891; in-8° gr.
Id.	— Indice del Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute ecc., nel 1890; pag. 1-32, A-DEA. 2 fasc. in-8° gr.
R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).	* Abhandlungen der philologisch-historischen Classen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XII, n. 2. Leipzig, 1891; in-8° gr.
R. Accademia di Storia (Madrid).	* Buletin de la R. Academia de la Historia; t. XVIII, cuaderno 2. Madrid, 1891; in-8°.
Soc. di Geografia (Parigi).	* Bulletin de la Société de Géographie, etc.; 7ᵉ série, t. XI, 4ᵉ trimestre 1890. Paris, 1890; in-8°.
Ministero delle Finanze (Roma).	Statistica del Commercio speciale di importazione e di esportazione dal 1° gennaio al 31 dicembre 1890. Roma, 1891; 1 fasc. in-8° gr.
Ministero d'Agr., ind. e Comm. (Roma).	Annali di Statistica — Statistica industriale, fasc. XXVI — Notizie sulle condizioni industriali della Provincia di Porto Maurizio, con una carta stradale e industriale: fasc. XXVII. — Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Udine, con una carta, ecc. Roma, 1890; in-8°.
R. Accademia dei Lincei (Roma).	* Atti della R. Accademia dei Lincei; anno CCLXXXVII, 1890 — serie 4ᵃ, Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, vol. VII, parte 2ᵃ. — Notizie degli Scavi. luglio, agosto. Roma, 1890; in-4°.
Bibliot. nazionale Vitt. Emanuele (Roma).	Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. — Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. VI, n. 1. Roma, 1890; in-8° gr.
La Direzione (Spalato).	* Bullettino di Archeologia e Storia dalmata, ecc.; anno XIII, n. 12. Spalato, 1890; in-8°.
Società d'Arch. e Belle Arti (Torino).	* Atti della Società di Archeologia e Belle Arti per la provincia di Torino; vol. V, fasc. 4. Torino, 1890; in-8°.

Digitized by Google

* Atti del R. Istituto di Scienze, Lettere ed Arti, serie 7ª, t. II, disp. 1, 2. Venezia, 1890-91 ; in-8°. — R. Istit. Veneto (Venezia).

I diarii di Marino Sanuto, ecc.; t. XXX, fasc. 135. Venezia, 1891; in-4°. — Venezia.

Pasquale Stanislao Mancini e la Teoria psicologica del sentimento nazionale; Discorso commemorativo del Socio CARLE (Estr. dalle *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, serie 4ª. vol. VI, parte 1); 1 fasc. in-4°. — L'Autore

Cartulaire de l'Abbaye Notre-Dame de Leoncel au diocèse de Die — Ordre de Citeaux —, publié, d'après les documents originaux conservés aux archives de la Prefecture de la Drôme, par l'Abbé C. U. J. CHEVALIER: 1e livrais. Montélimar, 1869; in-8°. — Ab. U. CHEVALIER

Choix de documents historiques inédits sur le Dauphiné, publiés, d'après les originaux conservés à la Bibliothèque de Grónoble et aux archives de l'Isère, par l'Abbé C. U. CHEVALIER. Lyon, 1874; 1 vol. in-8° gr. — Id.

Collection de Cartulaires dauphinois — tome deuxième, 1e livrais. — Actes capitulaires de l'Eglise Saint-Maurice de Vienne, Statuts, Inféodations Comptes, publiés, d'après les registres originaux, par l'Abbé C. U. J. CHEVALIER. Vienne, 1875; in-8°. — Id.

Le Mystère des Trois Doms, joué à Romans en MDIX, publié d'après le manuscrits original avec le compte de sa composition, mise en scène et représentation et des documents relatifs aux représentations théatrales, en Dauphiné du XIV au XV siècle; par feu Paul-Emile GIRAUD et Ulysse CHEVALIER. Lyon, 1887; pag. CXLVII,-928; in 4°. — Id.

Repertorium hymnologicum — Catalogue des chants, hymnes, proses, séquences, tropes, en usage dans l'Église latine depuis les origines jusqu'à nos jours, par le chanoine Ulysse CHEVALIER; 1 fasc., A-D (n. 1-4539): Extrait des *Analecta Bollandiana*. Louvain, 1889; in-8°. — Ab. U. CHEVALIER

De l'hymnologie latine, à propos d'un ouvrage récent; par A. DEVAUX. Lyon, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

Cartulaire de l'Abbaye de St-Chaffre du Monastier, et Chronique de St-Pierre du Puy; Cartulaire du Prieuré de Paray-Le-Monial et visites de l'Ordre de Cluny, publiés par le chanoine Ulysse CHEVALIER. Montbéliard, 1891; 1 vol. in-8°. — Id.

Cronache della città di Perugia edite da Ariodante FABRETTI; vol. III (1503-1579). Torino, coi tipi privati dell'Editore 1890; in-8°. — A. FABRETTI.

Commemorazione del Principe Amedeo di Savoia, Duca d'Aosta, letta dal Deputato Giovanni FALDELLA al R. Istituto di Scienze sociali « Cesare Alfieri » in Firenze, alla presenza del nuovo Duca d'Aosta, Emanuele Filiberto, addì 22 giugno 1890. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°. — L'Autore

Digitized by Google

L'A. — François MUGNIER — Les Savoyards en Angleterre au XIII siècle, et Pierre d'Aigueblanche, évêque d'Héreford. Chambéry, 1891 ; 1 vol. in-8°.

Il Direttore. — Il primo centenario della nascita di Ferrante Aporti; Bollettino bimestrale diretto dal Prof. Pietro NIGRA; n. 3, 4, 5. Mantova 1890-91 ; in-4°.

L'A. — Lodovico ZDEKAUER — Su l'origine del manoscritto pisano delle Pandette giustinianee e la sua fortuna nel Medio Evo: Prolusione al corso libero di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Siena. Siena, 1890; 1 fasc. in-8°.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
377 (50 C 3) 15 IV-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 9ª, 1890-91

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, SPEZIA, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Fra le opere stampate che giunsero recentemente in dono all'Accademia merita menzione speciale un libro del signor Prof. A. CHAVEAU, Membro dell'Istituto di Francia, col titolo: *Le travail musculaire et l'énergie qu'il représente.*

Vengono in seguito letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i quattro lavori seguenti:

1° « *Nota intorno a teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva* »; del Socio D'OVIDIO. Questo studio si collega ad altri dello stesso Socio già presentati in adunanze precedenti.

2° « *Influenza dell'eccentricità dell'alidada sui vernieri ed un microscopio ad ingrandimento costante* »: Nota del Prof. Nicodemo JADANZA, presentata dal Socio NACCARI.

3° « *Sulla velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine* »; Nota dell'Ing. Angelo BOTTIGLIA, Prof. nel R. Museo Industriale Italiano, presentata dal Socio FERRARIS.

4° *Della struttura dell'epitelio vaginale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza* »; lavoro del Dott. Ignazio SALVIOLI, presentato dal Socio BIZZOZERO.

Digitized by Google

LETTURE

Osservazioni intorno ad alcune forme del Gen. Apoblema *Dujard.*;

di FR. SAV. MONTICELLI

(Lavoro letto nell'adunanza del 14 Dicembre 1890)

Rudolphi ha trovato nei Clupeidi oltre al *D. appendiculatum* altre due forme differenti che indicò coi nomi di *D. ocreatum* e *D. ventricosum;* l'una trovò nell' intestino della *Clupea Harengus*, laltra nell'*Alosa vulgaris*. La prima specie descrisse per la prima volta col nome di *Fasciola ocreata* nel *Wiedemann's Archiv.*, J. III, I, pag. 79 e ridescrisse nell'*Entoz. Hist.*, Vol. II a pag. 397-398; la seconda nell'*Entoz. Synop.* a pag. 108 e 398. Alla prima specie riferì la *Fasciola halecis* di Gmelin ed il *Distoma halecis* di Zeder (ved. *Ent. Hist.*, pag. 398).

Egli così caratterizzò le due specie nuove:

1° *D. ocreatum: teres, collo antrorsum tenuiore divergente, cauda retractili, poris globosis, antico terminali, ventrali majore.*

2° *D. ventricosum: teres oblongum, abdomine prominente, poris globosis, ventrali majore* (pag. 108).

Al primo Distoma assegnò una lunghezza di mill. 1,2 a 2,25, al secondo quella di mill. 1,12 — 1.5.

Il Dujardin (1), tenuto conto della coda o appendice caudale retrattile, collocò il *D. ocreatum* nel suo sottogenere *Apoblema* (pag. 422); il *D. ventricosum*, invece, enumerò fra le specie di Distoma che non aveva potuto classificare con certezza nei suoi sottogeneri (pag. 465).

Diesing (2) riunì i due distomi nel suo gruppo degli *inermia* a *corpus teres* e ad *acetabulum sessile ore majus* (3), considerandoli, come già il Dujardin, forme distinte dal *D. appendiculatum*. Il Cobbold (3) li registra semplicemente a pag. 29 della sua *Synopsis*.

(1) *Hist. Nat. des Helminthes.*
(2) *Syst. Helm.*, I, pag. 369 (*D. ventricosum*), pag. 372 (*D. ocreatum*).
(3) In: *Journ. of the Linnean Society of London Zoology*, I (estratto).

Digitized by Google

Nel 1859 il Molin (1) riferì al *D. ocreatum*, Rud. un Distoma della *Clupea alosa* e modificò la frase di Rudolphi nel modo seguente: *Corpus teres inerme, os terminale globosum: collum antrorsum attenuatum acetabulum ore majus prominulum ad colli basim: apertura genitalis ante acetabulum: penis retortaeformis: porus excretorius in apice appendicis brevis retractilis.* Long. 0.01—0.02.

Diesing (2), nei suoi *Nachtrag* alla *Revision der Myzhelminthen* riporta il *D. ocreatum* Rud. con le nuove notizie fornite dal Molin, osservando che la *Clupea alosa* è un nuovo ospite del detto Distoma, fino allora noto solo della *Clupea harengus*.

Il Wagener (3) (1860) dall'esame di materiale fresco e da comparazione dei tipi di Rudolphi esistenti nel Museo Zoologico di Berlino scrive che: « Die Angaben über *Distoma appendiculatum*, unter welchem Artnamen sehr verschiedene Species von den Autoren verstanden werden, sind sehr luckenhaft », e conclude dalle sue ricerche che:

« Es sind bis jetz nur vier Distomenspecies mit zurückziehbarem schwanze bekannt:

1) *D. ventricosum* R.
2) *D. excisum* R.
3) *D. tornatum* R.
4) *D. rufoviride* R. »

Alle « übrigen, welche noch von Rudolphi und Dujardin als Distomen mit zurückziehbarem Schwanze aufgeführt werden, sind entweder auf die oben genannten zurückzuführen oder aber sie haben gar nichts mit dieser Thiergruppe zu thun » infatti del *D. ventricosum* scrive « von Rudulphi ist es als *D. appendiculatum, ocreatum, crenatum, ventricosum* beschrieben worden ».

Nello stesso lavoro a pag. 183 dice che dall'esame degli esemplari tipici di Rudolphi risulta che i seguenti Distomi così classificati in collezione dal Rudolphi sono = *D. ventricosum: D. ocreatum* e *D. appendiculatum* del ventricolo della *Clupea alosa*, *D. crenatum* ex int. *Gasterosteus aculeatus*, *D. appendiculatum* ex int. *Salmo Salar*.

---

(1) *Prospectus helminthum quae in prodr. faunae helm. Venetae*, ecc. in: Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289.

(2) In: Sitz. Bericht k. Akad. Wien, Bd. XXXV, pag. 432.

(3) Ueber *Distoma appendiculatum* Rud. in: *Arch. f. Naturg*, 1860, 26 Jahr. I, pag. 166-167.

Digitized by Google

Molin (1861) nel *Prodromus Faunae helmintolog.*, ecc. (1), riporta il *D. ocreatum* e ne dà una figura. (Dal contesto si vede che egli non conosceva ancora il lavoro del Wagener). In questo lavoro il Molin, per meglio stabilire le differenze, dà pure una figura e descrizione del *D. appendiculatum*, ne stabilisce la sinonimia (pag. 204 Tav. II, fig. 3) e ne modifica, ampliandola, la frase diagnostica.

Olsson nel 1860 (2) descrive un *Distoma appendiculatum* Rud. et Molin ed un *Distoma ocreatum* Molin. Il primo, come si rileva dal contesto (pag. 46, Tav. V, fig. 95), è il *D. ventricosum* Rud. del Wagener, del quale accetta in parte le conclusioni, solo lo chiama *appendiculatum* col Molin, perchè questo nome è più antico del *ventricosum*. Il secondo è un Distoma che egli crede identico al *D. ocreatum* di Molin. Questa identità, secondo egli dice, si fonda esclusivamente sui caratteri dati dal Molin *penis retortaeformis* ed *apertura genitalis ante acetabulum*, perchè egli ammette che Molin sotto il nome di pene comprende pure la tasca del pene e la vescicola seminale esterna [« att Molin under penis inbegripit äfven bursa med vescicula semin. exter. »] (pag. 48-49, Tav. V, fig. 96-98). Egli sulla fede di Wagener non crede il *D. ocreatum* Rud.=*D. ocreatum* Molin.

Van Beneden (3) a pag. 67-69 indica il *D. ventricosum* Rud. della *Clupea sprattus*, dell'*Alosa finta* ed *A. communis* e dà un disegno degli esemplari della *Alosa finta* (Pl. IV, fig. 11). A pag. 67 indica un *D. minimum* n. sp. fra i parassiti della *Clupea sprattus*, ma non lo descrive, nè figura; in nota scrive d'averlo trovato in abbondanza nei ciechi pilorici e nello intestino di due individui presi nei serbatoi di ostriche.

Il Linstow nel *Compendium. d. Helminth.* fra i parassiti della *Clupea* (Alosa) *vulgaris*, segna il *D. ventricosum* R. come = al *D. ocreatum* Molin (4).

Carus (5) ha riunito al *D. ventricosum* Rud. di G. Wagener il *D. appendiculatum* p. p., *ocreatum* Molin, *crenatum* Rud. *D. appendiculatum* Duj. Mayer, ed il *D. varium* Eysenhardt.

---

(1) In: *Denk. k. Akad. Wien*, Bd. XIX, pag. 209, tav. VII, fig. 7.

(2) *Entozoa, jakttagna hos skandinaviska Hafsfiskar*, II, Platy, elminthes in: Lunds Universitets Arsskrift, tom. IV.

(3) *Les poissons des côtes de Belgique*, etc.

(4) V. pag. 209, n. 1462.

(5) *Prodromus faunae mediterraneae*, Vol. I, pag. 125.

Digitized by Google

Stossich (1) ammette: un *Distomum ventricosum* Rud., al quale riferisce il *D. ventricosum* Wagener ed il *D. ventricosum* Rud. indicato e figurato dal Van Beneden (loc. cit.), ed un *D. ocreatum* Molin, al quale riporta il *D. ocreatum* Molin di Olsson. Siccome lo Stossich non fa cenno di un *D. ocreatum* Rud. e cita nella sinonimia del suo *D. ventricosum* Rud. il Wagener, il quale, come si è innanzi visto, ritiene il *D. ocreatum* Rud. = al *D. ventricosum*, così io credo che egli lo consideri sinonimo del *D. ventricosum*.

Io ho ritrovato nelle *Clupea pilchardus* del nostro golfo un Distoma che ho riferito al *D. ocreatum* Molin (2) ed ho asserito essere esso identico al *D. ocreatum* Rud. e differente dal *D. ventricosum* Rud. col quale Linstow identificava (v. loc. cit. innanzi) il *D. ocreatum* Molin.

Recentemente il Juel, che ha dato una Synopsis (3) delle specie finora descritte del genere *Apoblema* Dujardin:

I. mette fra i sinonimi del *D. appendiculatum* Rud. il *D. ventricosum* Rud. del Wagener con l'osservazione « ich kann nicht finden, dass mit der Beschreibung Rudolphi 's von *D. ventricosum*, in Ent. Synops. pag. 108 und. 398, eine *Apoblema* - Art gemeint ist ».

In nota aggiunge che la *Fasciola ocreata* Rud. = *D. ocreatum* Rudolphi « scheint die vorige Art zu sein, wie auch Wagener und Olsson (teste Wagenero) annehmen ».

II. accetta fra le specie il *D. ocreatum* Molin dell'Olsson (non Rudolphi) come forma distinta attribuendo il nome specifico a quest' ultimo.

---

(1) *I Distomi dei pesci marini e di acqua dolce*. Trieste 1886, pag. 11-12.

(2) *Note elmintologiche: Sul nutrimento e sui parassiti della sardina (Clupea pilcardus) del Golfo di Napoli*, in: Boll. Soc. Nat. Napoli, Vol. I, fasc. 2, 1887, pag. 87 e nota 3.

(3) *Beiträge zur Anatomie der Trematodengattung Apoblema* Duj. in: Bihang, till. k. Svenska Vet. Akad. Handlingar. Bd. 15, Af. IV, n. 6.

Questo *A*. (pag. 3) per la presenza dell'appendice caudale e per le particolarità anatomiche da lui osservate, che allontanano le *Apoblema*, secondo la sua opinione, dagli altri Distomi, crede di elevare il sottogenere *Apoblema*, a genere distinto. Io credo questo operato pienamente giustificabile, chè parmi la presenza di un'appendice caudale ed il peculiare modo di sbocco dei genitali sono delle caratteristiche generiche sufficienti ed equivalenti a quelle invocate per gli altri generi di *Distomidae* e d'altra parte, credo utile smembrare il genere *Distomum* troppo ricco di specie. La mancanza della *vagina* (canale Laurer), invocata dal Juel

Digitized by Google

III. enumera fra le specie dubbie o poco note del genere insieme ai *D. gigas* e *Raynerianum* del Nardo (1) e *D. Labri-rupestris* Olsson, anche il *D. ocreatum* Molin non Rudolphi, nec Olsson.

In questo anno il Sonsino (2) dai suoi studi sui Distomi appendicolati dei Pesci conclude che le sue osservazioni « collimerebbero con la classazione dei *Distomi appendicolati* fatta dal Wagener nelle quattro specie innanzi ricordate »: egli di queste ne descrive tre, *D. excisum*, *D. rufoviride*, *D. ventricosum*.

Dalla esposizione storica che ho fatto si vede che gli A. non sono tutti d'accordo sulle specie del genere *Apoblema* innanzi menzionate.

Scopo del presente studio è appunto di vedere se le due citate specie del Rudolphi *D. ocreatum* e *D. ventricosum* sono o no da conservarsi, e stabilire la loro sinonimia. Siccome però la loro sorte è legata a quella del *D. appendiculatum*, così debbo occuparmi anche di quest'ultimo.

Nelle collezioni zoologiche di Berlino, che, grazie alla cortesia del Prof. Möbius, ho potuto studiare, ho esaminati i tipi

---

come caratteristica generica, non può esser considerata come tale, perchè essa non si avvera solo nelle *Apoblema*. Io ho dimostrato infatti che essa può mancare anche in altri *Distomi* (*D. Richiardi*). V. *Boll. Soc. Nat.* in Nap., Vol. III, pag. 134 e posseggo osservazioni di simil genere sopra altre specie di *Distomi*.

(1) L'A. mette questi due *Distomi* fra le forme dubbie del suo genere *Apoblema* sulle indicazioni del Carus (*Prodromus faun. medit.*, pag. 125-126), pur osservando che in « *der Beschreibung Nardo 's wird von keinem einziehbaren Schwanze geredet* » (pag. 6-7). Le mie osservazioni personali provano evidentemente che il *D. gigas* Nardo non è un *Apoblema* (*Proc. Zool. Soc.* 1889, pag. 322, Pl. XXXIII, fig. 2-3). Il Carus ha male interpretato le parole della frase del Diesing (*Syst. Helm.*, I, pag. 373) *cauda longa retrorsum incrassata obtusa*, perchè il Nardo nella sua descrizione indica così la parte posteriore del corpo del suo *Distoma*.

L'esame di alcuni individui di *Distoma* raccolti nell'intestino del *Luvarus imperialis* a Trieste, dall'amico prof. M. Stossich gentilmente comunicatimi e che io riferisco al *D. Raynerianum* del Nardo, mi ha dimostrato evidentemente (cosa della quale io era precedentemente convinto) che anche questo non appartiene al genere *Apoblema* e che anche per questa specie era stata non bene interpretata la frase diagnostica del Diesing (copiata, come quella del *gigas*, dal Nardo *v. in: Isis*, 1833, pag. 523-524.

(2) *Studii e notizie elmintologiche, in: Proc. verb.* Soc. Tosc. Sc. Nat., 1890, 4 maggio, pag. 9-16 (estratto).

Digitized by Google

di Rudolphi del *D. ocreatum*, *D. ventricosum* e quelli del *D. ventricosum* Wagener, e da questo esame e dallo studio critico comparativo delle varie descrizioni e figure date dei *D. appendiculatum* Rud., *D. ocreatum* Rud. e *D. ventricosum* Rud., non che di materiale fresco, sono arrivato alle conclusioni seguenti:

I. che il *D. ocreatum* e *D. ventricosum* Rud. sono forme distinte dal *D. appendiculatnm* Rud., dal quale si distinguono pricipalmente, oltrecchè per altri caratteri anatomici, per avere una coda brevissima (1), per le loro dimensioni molto minori e per il punto di sbocco allo esterno degli organi genitali.

Dai quali caratteri si rileva come il *D. ventricosum* del Wagener non può aver nulla di comune col *D. ventricosum* Rud. ma è invece forma identica all'*A. appendiculatum* Rud.

II. che il *D. ventricosum* Rud. ed il *D. ocreatum* Rud. vanno riuniti insieme in una sola specie che deve chiamarsi *A. ocreatum* Rud., essendo questo il nome più antico.

III. che il *D. ocreatum* Molin deve considerarsi sinonimo dell'*A. ocreatum* Rud.

IV. che il *D. ocreatum* Molin dell'Olsson (*D. ocreatum* Olsson del Juel) deve rientrare nei sinonimi dell'*A. appendiculatum*.

V. che il Distoma da me ritrovato nelle *Clupea pikhardus* del Golfo di Napoli, e che ho riferito al *D. ocreatum* Rud. dopo le comparazioni e gli studi fatti, deve esser considerato specie distinta dall'*A. ocreatum* (= *A. ventricosum*), dall'*A. appendiculatum* e dalle altre del genere *Apoblema*.

Descriverò ora e stabilirò la sinonimia dell'*A. appendiculatum*. Rud e dell'*A. ocreatum* Rud. e descriverò pure la nuova specie che indicherò col nome di *A. Stossichii*, dedicandola all'amico Prof. Michele Stossich di Trieste.

---

(1) Secondo il Rudolphi l'appendice caudale si troverebbe (vedi la diagnosi innanzi riportata) solo nel *D. ocreatum*, ma come io ho potuto vedere la coda, assai breve, esiste anche negli esemplari di *D. ventricosum* di Rudolphi da me esaminati, come innanzi esporrò.

Digitized by Google

APOBLEMA APPENDICULATUM Rud.

(Distoma appendiculatum)

in: Wiegmann's Archiv., Jahr. III, pag. 78, tab. II, fig. 6.

(Fig. 6, 12, 15*b*).

Note critiche.

Ammessa innanzi la non identità del *D. ventricosum* Wag. col *D. ventricosum* Rud., ne risulta che il Distoma descritto da Wagener deve entrare fra i sinonimi dell'*A. appendiculatum* Rud. L'Olsson (e ne ho dette le ragioni) ed il Juel anch'essi riferiscono il *D. ventricosum* Wag all'*A. appendiculatum* di Rud., ma la differenza fra la mia e la loro conclusione sta in ciò che essi nel riferire il *D. ventricosum* Wag. al *D. appendiculatum* Rud. ammettono col Wagener pure la identità del *D. ocreatum* Rud. e *D. ventricosum* col *D. appendiculatum*.

Dalle mie ricerche credo poter stabilire nel modo seguente la descrizione e sinonimia dell'*A. appendiculatum*. Non do una figura, perchè essa è stata già data dal Wagener ed è sufficiente a permettere il riconoscimento della specie (1).

Descrizione

Corpo inerme, ugualmente cilindrico, allungato per tutta la sua lunghezza, anteriormente ristretto, coniforme, molto contrattile, con appendice caudale di mediocre lunghezza (2) [circa la metà della lunghezza totale del corpo, in media], molto ristretta posteriormente ed a punta acuta, retrattile interamente. Tutta la superficie del corpo è fortemente pieghettata trasversalmente: tale pieghettatura, fortissima nei due terzi anteriori del corpo, si fa nel terzo posteriore meno apparente e così pure nella appendice caudale, nella quale spesso sembra mancare del tutto.

Ventosa anteriore piccola subglobosa, ventrale, subterminale.

---

(1) Op. cit., Tav. VIII (per errore indicata col n. IX) fig. 1-7 (2-7 particolarità) *D. ventricosum*.

(2) Comparativamente a quella lunga del *D. excisum*, lunghissima del *D. tornatum*, breve del *D. rufoviride* e brevissima dei *D. ocreatum* e *ventricosum* e della n. sp. *A. Stossichii*.

Digitized by Google

Ventosa posteriore grande, due volte maggiore della anteriore.

Le due ventose sono tra loro assai ravvicinate e la piccola porzione di superficie ventrale che intercede tra esse mostrasi incavata leggermente. Apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore. Faringe a palla, esofago brevissimo, subnullo. Braccia intestinali esili, molto lunghe, che si spingono nella appendice caudale senza raggiungere l'estremità di questa. Tronco mediano del sistema escretore che si biforca dietro i testicoli in prossimità del testicolo posteriore.

Testicoli due, piccoli, globosi, situati l'uno innanzi all'altro, molto ravvicinati, nella linea mediana del corpo, nella metà della lunghezza del corpo (non calcolata, s'intende, l'appendice caudale). Dai singoli testicoli partono due deferenti i quali si fondono presto in un unico ed esile deferente brevissimo che si apre in una vescicola (ricettacolo) seminale esterna, spesso ristretta nel mezzo, a formare due cavità consecutive. Dalla estremità anteriore della vescicola seminale si origina la tasca del pene, che è di mediocre lunghezza e poco ondulata; il pene lungo quanto la tasca rivestito di papille coniche: la tasca del pene è circondata da numerose cellule prostatiche (*Drusenzellen* del Juel). La tasca del pene sbocca in vicinanza dell'ovidutto esterno nella estremità posteriore di un antro genitale di forma ovalare allungata e di complicata struttura (*Vestibulum genitale* Juel) che si apre allo esterno nella innanzi detta apertura genitale.

Ovario anch'esso globoso situato nella linea mediana del corpo innanzi le glandole vitelline e dietro i testicoli. Dall'ovario parte inferiormente un canale il quale da un lato si allarga (1) in una vescicola (ricettacolo seminale interno), dall'altro (ovidutto interno) si continua con l'utero; prima di slargarsi a formare l'utero, l'ovidotto riceve il dottolino vitellino e lo sbocco delle glandole del guscio. L'utero subito dopo la sua origine si dirige verso l'estremità posteriore del corpo, ravvolgendosi su se stesso e raggiunge l'appendice caudale nella quale si addentra per breve tratto, poi risale facendo poche ondulazioni fino all'altezza dei vitellogeni; da questo punto i suoi ravvolgimenti divengono maggiori e complicati; poi di nuovo si fa meno ravvolto (ovidutto esterno)

---

(1) JUEL, op. cit., pag. 32, indica questa porzione nell'*A. excisum* come un *Befruchtungsgang*.

Digitized by Google

e descrivendo poche ondulazioni va a sboccare nel modo innanzi detto nell'antro genitale.

I vitellogeni sono due, semplici, rotondeggianti, giustapositi, situati nel mezzo della regione del corpo che intercede tra la ventosa posteriore e l'appendice caudale: essi sono riuniti fra loro da un vitelloduttо trasverso che è formato dalla riunione dei singoli vitelloduttі dei due vitellogeni, i quali nel loro punto di fusione si rigonfiano spesso leggermente a formare un piccolo ricettacolo vitellino; da questo parte il dottolino impari innanzi detto (1), che sbocca nell'ovidotto interno. Le uova sono perfettamente ovalari, assai numerose e molto piccole.

Il colorito generale di questa specie è gialletto molto chiaro anteriormente; posteriormente variabile dal giallo ocra al giallo chiaro; l'appendice caudale nella sua parte anteriore è colorata come la parte posteriore del corpo; la sua estremità è bianchiccia trasparente.

Lungh. 2-6 mill.

Sinonimia.

Per la sinonimia di questa specie fino al 1850 rimando al Diesing (Syst. Helm. Vol. I, pag. 370): enumero ora solamente quelle forme che devono ritenersi sinonime del *D. appendiculatum* illustrate da tal epoca ai giorni nostri.

1858	*D. appendiculatum*	Diesing. Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXII, pag. 342.
1859	»	» ibid. » XXXV, pag. 431.
1859	»	Cobbold. Synopsis of Distomidae, p. 27.
1859-61	»	Molin. Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289. » Denk. k. Akad. Wien, Bd. XIX, p. 204, Tav. II, fig. 3.
1868	»	Olsson. Entoz. skand. hafsfisk. II, pagina 46, Tav. V, fig. 95.

(1) Secondo il Juel, invece, i singoli vitelloduttі dei vitellogeni sboccherebbero indipendentemente l'uno dall'altro nell'ovidotto, v. pag. 32, fig. 12 (*A. excisum*).

Digitized by Google

1870 *D. appendiculatum* Van Beneden. P. J. Poiss. côtes de Belgigue parasitet comm. pag. 66, Tav. IV, fig. 15.

1876 » Olsson. Bidrag till Skand. Helminth. fauna. I, pag. 20, n° 17.

1881 » Levinsen. Gronland's Trematodfauna, pag. 9.

1883-88 » Stossich. Bull. Soc. Adr. Sc. Nat. Vol. VIII, pag. 115; Vol. IX, pag. 159, Vol. IX, pag. 47, Vol. X, pag. 90, Vol. X, pag. 184.
I Distomi dei Pesci Marini e di acqua dolce, pag. 13. — Appendice al lavoro suddetto pag. 5.

1889 » Juel. Beiträge zur Anatomie der Trematodengatt. Apoblema, p. 4, fig. 17.

1860 *D. ventricosum.* Wagener. Ueber Distoma appendiculatum, p. 166, Tav. VIII, fig. 1-7.

1884 » (p.p.) Carus. Prodr. Fauna Medit. Vol. I, pag. 125.

1886 » (p.p.) Stossich. I Distomi dei Pesci, ecc., pag. 11.

1888 Appendice al detto lavoro p. 5.

1890 » (p.p.) Sonsino, Studi e notizie elmintologiche. Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., Pr. verb. 4 Maggio 1890, p. 12-13.

1868 *D. ocreatum.* Olsson. Entozoa Skandinav. hafsfisk. II, pag. 48-49, Tab. V, fig. 96-98.

Habitat. — Questo Distoma si trova frequente in moltissimi pesci molto diversi, ed è certamente il Distoma che ha più larga distribuzione zoologica fra tutti. Io non enumero qui tutti i pesci nei quali è stato finora trovato, osserverò solo che nei Pesci dei golfo di Napoli l'ho anche ritrovato comune e frequente; frequentissimo ed abbondante specialmente nella *Clupea alosa* Cuv.; non l'ho finora mai trovato nella *Clupea pilchardus* Walb.

Digitized by Google

NOTE BIOLOGICHE.

Möbius e Willemoes-Suhum (1) hanno trovato nel Baltico sia libero, sia nelle larve pelagiche di Vermi e nei Copepodi liberi (Cyclops) una sorta di Distoma appendiculato asessuato, che, probabilmente, secondo il Willemoes-Suhum, passerebbe direttamente nei Pesci per mezzo delle larve di Anellidi e dei Copepodi e si trasformerebbe, secondo Möbius, nel *D. ocreatum* della *Clupea harengus.* Più tardi il Giesbrecht ha ritrovato lo stesso Distoma appendicolato asessuato più frequentemente nel *Pseudocalanus elongatus (Lucullus acuspes)* e raro nel *Centropages hamatus* della baia di Kiel (2).

Dalle descrizioni brevi date dal Willemoes-Suhum e dal Giesbrecht non era possibile dire con certezza se veramente fosse questa forma da loro trovata quella larvale del *D. ocreatum* come credeva il Möbius.

La cortesia del sig. Dr Giesbrecht, che ha voluto gentilmente mettere a mia disposizione i Distomi da lui trovati nei Copepodi di Kiel, mi ha permesso uno studio più accurato di questa forma di Distomide appendicolato e di concludere che esso è *la forma giovane dell'A. appendiculatum.*

Questa identificazione permette, come io credo, di spiegare la così larga distribuzione zoologica dell'*A. appendiculatum* appetto degli altri Distomidae dei pesci, perchè essendo i Copepodi nutrimento ordinario e forse esclusivo (3) per alcune specie di pesci (Clupeidi) e potendolo essere accidentalmente o fors'anco ordinario di molte altre specie di pesci, questi possono facilmente acquistare l'*A. appendiculatum.*

Non descriverò qui questa forma giovane che può facilmente riconoscersi dal disegno che ne do (fig. 6, 12). Osserverò solo

---

(1) *Biologisches Beobacht. über nieder Meersthiere,* in: *Zeit. Wiss. Zool. Band.* XXXI, pag. 383, § 3. *Entwick. eines appendiculate Distoms.*

(2) *Die freilebenden Copepoden der Kieler Fohrde — Bericht Comm. zu Wiss. Unters. d. Deut. Meere in Kiel* 1877-81, pag. 163.

(3) Infatti Möbius nel Baltico ha frequentemente osservato che il contenuto dello stomaco della *C. harengus* constava esclusivamente di Copepodi. (*Temora longircmis*) — *Jahrsb. d. Comm. zur Wiss. Unter. d. Deut. Meer. in Kiel,* 1873, *Exped. der Untersuchung. der Ostsee* in Sommer 1871, cap. IV, pag. 140-141.

Digitized by Google

che essa presenta già tutti gli organi genitali sviluppati e non un accenno dei medesimi, come sostiene il Willemoes-Suhum, ma non si osserva ancora produzione di uova (fig. 12); forse l'osservazione di Will.-Suhum si riferisce alle forme larvali non ancora penetrate nei Copepodi. L'individuo disegnato nella fig. 6 misura $^1/_2$ mill. in lunghezza, quello della fig. 12 1 mill. appena.

Il Willemoes-Suhum ed il Giesbrecht (op. cit.) non sono d'accordo sul modo come questa forma giovane penetra nei Copepodi. Il primo dice che esso penetra nei *Cyclops* per la parte anteriore del corpo. Il secondo descrive più minutamente come penetra nei *Centropages hamatus* e sostiene che vi entra per la estremità caudale. Io non ho osservazioni in proposito e quindi non posso dirimere la controversia, ma pare a me più possibile l'opinione del Willemoes-Suhum che penetri per la parte anteriore per le ragioni che più oltre dirò. Quel che ho potuto osservare e constatare è che l'*Apoblema* occupa quasi tutto il corpo del Copepodo del quale ha distrutti i tessuti del corpo (fig. 6).

Osservazioni.

Il Juel segna con dubbio fra le specie del genere *Apoblema* il *Distomum* (Fasciola) *scabrum* del Müller (Zool. Danica, p. 14, Tab. LI, fig. 1-8) con la seguente nota.

« Rudolphi citirt in Ent. Hist pag. 406 unter dem Namen *D. scabrum* die Beschreibung Muller's.: in Entoz. Synops pag. 424 beschreibteraber unter demselben Namen eine ganz andere Art, die warscheinlich der Untergattung Echinostoma Dujardin angehört, welche er in Lota molva gefunden hat: dieser Irrthum hat seitdem in der Litteratur fortgelebt, ecc... ».

Dall'esame della descrizione e delle figure del Müller io mi son convinto che la sua *Fasciola scabra* è la stessa cosa del *D. appendiculatum:* quindi il *Distoma scabrum* di Zeder, riportato dal Rudolphi, Entoz. Hist, pag. 406-408, alla *Fasciola scabra* di Müller, rientra nei sinonimi dell'*A. appendiculatum*.

Quanto al *Distoma scabrum* dal Rud. descritto nella Synops. sono d'accordo col Juel: esso è specie tutt'affatto differente, ma non sono d'accordo con lui nel ritenere le forme di *Apoblema* dell'Olsson (v. Juel, pag. 7, citat. Olsson n° 19, pag. 48) del *Gadus melanostomum*, *Rombus laevis* e *Pleuronectes limandoides* come distinte dall'*A. appendiculatum :* credo pure all'identità specifica

Digitized by Google

dell'*A.* descritta sotto il nome di *D. appendiculatum* dal Levinsen (Groenl. Trematodfauna) coll'*A. appendiculatum.*

APOBLEMA OCREATUM Rud.

(*Fasciola ocreata* Rud.)

in Wiedmann's Archiv., Jahr. III, I, pag. 79.

[= *Ap. ventricosum (D. ventricosum)* Rud. Ent. Synopsis, Vol. II, pag. 108-398].

(Fig. 1, 5, 7, 10, 11, 14, 15*c*)

Descrizione.

Corpo breve piriforme o fogliforme, anteriormente ristretto, posteriormente rigonfio: appendice caudale brevissima, retrattile, conica, subacuta. Non esiste una vera pieghettatura della superficie del corpo ; questa mostrasi solamente rugosa.

Ventosa anteriore globosa, ventrale, subterminale. Ventosa posteriore più grande della anteriore prominente, situata nella porzione posteriore della metà anteriore del corpo.

Apertura genitale poco innanzi la ventosa posteriore a livello dell'arco dell'intestino. Faringe piccola, allungata, ovoidale: esofago molto lungo ; braccia intestinali mediocri prolungantisi fino all'estremo posteriore del corpo.

Testicoli due, grandetti, situati l'uno accanto all'altro simmetricamente ai lati della linea mediana del corpo, sul cominciare della metà posteriore del corpo; i dotti escretori dei singoli testicoli mettono capo in un breve deferente unico, che si apre in un ricettacolo seminale esterno che è di mediocri proporzioni ed a forma di pera allungata e presenta nella sua parte anteriore uno strozzamento che determina due cavità consecutive, come avviene nell'*A. appendiculatum;* esso mette capo in tubo lungo che contiene il pene e sbocca nell'antro genitale: lungo il decorso del pene si osservano numerose glandole prostatiche.

Digitized by Google

Ovario situato innanzi i testicoli, dietro i vitellogeni nella linea mediana del corpo sul cominciare del terzo posteriore di questo: esso è di forma irregolare ed alle volte ha aspetto lobato. Dal suo lato antero-dorsale si origina l'ovidotto che si ripiega a formar l'utero, che, dopo aver descritto numerosi ravvolgimenti, all'altezza dei testicoli si svolge in un tubo serpeggiante e va a sboccare nell'antro genitale che qui è breve e tubolare. Dall'ovidotto interno si parte un tubo che si slarga a formare un ricettacolo seminale interno, come nella *A. Stossichii*, nella quale specie lo descriverò più minutamente.

Vitellogeni due, semplici, alle volte a contorni irregolari, situati all'altezza della ventosa posteriore, circa alla metà della lunghezza totale del corpo, innanzi i testicoli: i vitellodutti si rivolgono nella parte posteriore del corpo verso l'ovario, all'altezza del quale si incontrano in un grosso ricettacolo vitellino, dal quale parte un breve dotto che sbocca nell'ovidotto interno prima che in questo si aprano le glandole del guscio.

Il sistema escretore differisce da quello delle altre specie perchè le due braccia anteriori dell'Y formata dai grossi tronchi non si fondono: almeno io non ho potuto mai vederla questa fusione ad arco all'altezza della faringe, così evidente nelle altre specie.

Le uova sono numerose e rotondeggianti, più grandi di quelle dell'*A. appendiculatum*.

Lunghezza da 1-2,30 mill.

SINONIMIA.

Anche per la sinonimia di questa specie fino al 1850 rimando al Diesing (Syst. Helm. Vol. I, - *D. ventricosum* pag. 369, *D. ocreatum* pag. 372), nemmeno cito la *Revisio* dello stesso Diesing e la *Synopsis* del Cobbold, perchè già citate nel testo.

1859 *D. ocreatum* Molin in: Sitz. Ber. Ak. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289.

1861 » Molin in: Denk. Akad. Wien, Bd. XIX, pag. 209, tab. III, fig. 7.

1870 » ? Van Beneden P. J. Poiss. côt. Belg., ecc. pag. 64, confr. pure nota 3.

Digitized by Google

1886	*D. ocreatum*	(p. p.) Stossich I Distomi Pesci mar., p. 12,
1888	»	Appendice al lavoro, ecc., pag. 5.
1889	»	Juel. Beiträg. z. Anat. d. Gatt. Apoblema pag. 7 (*D. ocreatum* Molin), forme dubbie o poco note.
1870	*D. ventricosum*	Van Beneden P. J. Poiss. côt. Belg., ecc., pag. 68, Pl. IV, fig. 11-11*.
1884	»	(p. p.) Carus. Prodromus faunae medit., pag. 125.
1886	»	(p. p) Stossich. I Distomi dei pesci, ecc., pag. 11.
1888	»	(p. p.) Stossich. Appendice al lavoro, ecc, pag. 5.
1889	*D. Carolinae*	Stossich. Bull. Soc. Adr. Vol. XI, pag. 4. Tav. XIII, fig. 55. Append., ecc.. p. 5.
1890	»	(p.p.) Sonsino. Studi e notizie elmintologiche.

NOTE CRITICHE.

Sono stato indotto a riunire insieme le due specie principalmente dall'esame degli esemplari tipici e delle descrizioni del Rudolphi. Da quanto innanzi è detto si rileva che la differenza osservata da questo nelle A. due specie (vedi le diagnosi) sta appunto nella assenza nel *D. ventricosum* dell'appendice caudale che esiste invece nell'*ocreatum*. Ma questa coda assai breve esiste anche negli esemplari tipici del *D. ventricosum*. Le fig. 5 e 11 della Tav. sono ricavate da alcuni schizzi da me presi a Berlino dagli esemplari tipici del Rudolphi. La fig. 5 rappresenta un individuo di *D. ocreatum* della Clupea Harengus Mai. 28 R. (Così il cartellino autografo del Rud. che rimanda, come per tutte le specie di Entozoi della collezione, al suo libro *Entoz. Hist.*, Vol. II p. 379). La fig. 11 rappresenta uno degli esemplari del boccaccetto portante l'indicazione « *D. ventricosum*. Clupeae alosae 29, 817 Arimmi reperii ».

Ora, considerando le due figure si vedrà chiaro come l'appendice caudale, il solo carattere differenziale importante tra le due specie, esiste in entrambe, e come e quanto si rassomiglino tra loro le due forme. — Aggiungo inoltre che sul cartellino del *D. ocreatum* ho osservata la correzione a matita, che sembra essere dello stesso carattere del Rudolphi, del nome *ocreatum*

Digitized by Google

in quello di *ventricosum*. La differenza di *habitat* non ha in generale gran valore e massime nel caso nostro, giacchè, infatti, il Distoma dell'Alosa trovasi anche nella *Clupea finta* (ne ho osservati dei belli esemplari di questo ospite nella collezione di Creplin a Greifswald, ed il van Beneden ve l'ha pure trovata ed ha appunto disegnati degli esemplari di questo ospite i quali concordano a capello con le mie figure) e nella *Clupea sprattus* (van Beneden citato), e quindi è possibilissimo che esso possa trovarsi anche nella *Clupea harengus*. In questa *Clupea* dopo il Loeuwenhoek ed il Rudolphi non è stato, a quanto mi risulta, più ritrovato il *D. ocreatum*, ma esaminando bene la incompleta descrizione datane dal Rudolphi si rileva che questa può addirsi anche bene al *D. ventricosum*. Anche le dimensioni date delle due forme sono quasi uguali.

HABITAT. — Questa specie è molto frequente nell'intestino della *Clupea alosa* (io ne ho raccolto individui anche nelle appendici piloriche), della *Clupea finta* e *Clupea sprattus*. Nella *Clupea harengus* ne ha rinvenuto numerosi esemplari il Rudolphi. Non tengo conto degli altri *habitat* assegnati a questa specie dagli A., perchè, come sotto il nome di *D. ventricosum*, era indicato spesso pure l'*appendiculatum*, per lo scambio avvenuto fra queste due specie, non si può con certezza dire se nei pesci indicati sia stata trovata l'una o l'altra specie: io inclino per altro a credere che si tratti piuttosto dell'*A. appendiculatum* che dell'*A. ocreatum* (=*ventricosum*) che, a quanto sembra, è circoscritto ai *Clupeidi*.

NOTE BIOLOGICHE.

Quale sia il mezzo per il quale questa specie di *Apoblema* arrivi nelle Clupee summenzionate, è ignoto; io suppongo che possano essere anche in questo caso dei Copepodi, dei quali ho trovato pieno lo stomaco delle Alose da me disseccate a Napoli. L'alimento di queste sembra essere, nel nostro Golfo, lo stesso di quello delle *Clupea pilchardus*, chè su per giù nel loro stomaco ho rincontrate le stesse forme trovate in queste.

OSSERVAZIONI.

Io ho ritrovata questa specie abbondantissima nelle nostre Alose e pare lo sia anche nelle altre Clupee che infesta: essa si trova nella metà anteriore del tubo intestinale; nella poste-

Digitized by Google

riore è raro trovarla; sembra preferire la regione dei ciechi pilorici, nei quali, come ho sopra notato, è facile ritrovarla isolatamente. Questa specie è facilmente riconoscibile ad occhio nudo o con occhio armato di semplice lente per le sue caratteristiche e per il suo colore: in mezzo al muco intestinale essa si mostra trasparente e colorata di un giallo bruno-ocraceo tendente un po' al verdastro. Isolata dal muco, ed osservata a più forte ingrandimento, si mostra trasparente con la metà posteriore (dove sono le uova in massa) di color giallo verdastro e con due macchie bruno-rossastre (i vitellogeni) all'altezza della ventosa posteriore: questa è colorata d'ordinario di una tinta rosso ocracea molto pallida, ora più, ora meno forte, che alle volte si estende a tutte le parti che la circondano. L'esame della descrizione e figura del *D. Carolinae* Stossich. e la comunanza di ospite col *D. ocreatum* mi hanno convinto della identità delle due forme.

APOBLEMA STOSSICHII n. sp.

(Fig. 2, 3, 4, 8, 9, 13, 15 *a*, 16, 17).

Descrizione.

Corpo allungato, subterete, anteriormente un poco ristretto: appendice caudale brevissima, retrattile, spesso non visibile. Superficie del corpo pieghettata trasversalmente: pieghettatura abbastanza forte

Ventosa anteriore piccola, cerciniforme, subterminale, ventrale.

Ventosa posteriore assai più grande dell'anteriore (quasi il doppio), situata nel terzo anteriore del corpo.

Apertura genitale dietro la ventosa anteriore a livello dell'arco dell'intestino. Faringe globosa: esofago lungo: braccia intestinali esili, allungate che raggiungono l'estremo posteriore del corpo.

Testicoli due e piccoli situati l'uno accanto all'altro simmetricamente ai lati della linea mediana del corpo, nella metà anteriore della lunghezza della parte del corpo che intercede fra la ventosa posteriore e l'estremo caudale; i singoli dotti escretori mettono capo in un unico deferente che si apre in un grande ricettacolo seminale esterno che è situato quasi immediatamente

Digitized by Google

dietro la ventosa posteriore. Questo ricettacolo è molto grande, quasi il doppio di un testicolo e si continua in un condotto che nella sua estremità, poco slargata, contiene il pene.

Lungo tutto il decorso di questo dotto si osservano numerose e grosse, relativamente alla piccolezza dell'animale, glandole prostatiche: queste non si posson osservare a fresco, nè su buone preparazioni in toto, ma solamente su sezioni: esse per forma e disposizione rassomigliano a quelle delle altre *Apoblema* e del *Dist. varicum* Müller.

Ovario situato innanzi al vitellogeno, dietro i testicoli, nella linea mediana del corpo, a metà (quasi) lunghezza della porzione di questa compresa fra l'estremo caudale e la ventosa posteriore. Dalla parte infero posteriore dell'ovario si origina l'ovidotto interno: questo da un lato manda un diverticolo che mette in una vescicoletta piriforme che è il ricettacolo seminale interno, dall'altro si continua nell'utero che descrive molte circonvoluzioni, frammettendosi fra gli organi genitali ed occupando tutta quasi la metà posteriore del corpo: all'altezza del ricettacolo seminale esterno l'utero si svolge in tubo serpeggiante che va a sboccare nell'antro genitale, che è di forma tubulare, imbutiforme. Vitellogeno unico grande situato immediatamente dietro l'ovario disposto quasi ad abbracciarlo: esso non è rotondeggiante ma ha contorni irregolari che alle volte lo fanno parere lobato: dal vitellogeno parte un unico dottolino che sbocca alla base dell'utero: poco innanzi lo sbocco del vitellodutto trovasi l'ammasso delle glandole del guscio. — Manca come nelle altre specie la vagina (1).

Il sistema escretore è fatto come nelle altre specie del genere: i tronchi grossi sono ripieni di concrezioni, che si colorano vivamente in rosso col picrocarminio nei preparati in toto.

Le uova, relativamente alla piccolezza della specie, sono molto grandi, più grandi di quelle dell'*A. appendiculatum*.

Esse sono piene di masse vitelline e non contengono ancora l'embrione: in alcune ho potuto osservare distintamente la cellula germinale che è grande ed è spostata verso uno dei poli (il più largo) dell'uovo (fig. 13).

La nuova specie misura appena un millimetro o poco più.

---

(1) In questa specie come nella precedente, non ho riscontrata quella struttura e disposizione del ricettacolo seminale interno osservata dal Juel (op. cit., pag. 35-36) nell'*A. excisum*, *A. rufoviride*, *A. appendiculatum*.

Sinonimia.

La sinonimia dell'*Apoblema Stossichii* è la seguente:

1887 *D. ocreatum* Monticelli. Boll. Soc. Nat. Napoli, Anno I, pag. 87.
1888 » Stossich. Appendice al mio lavoro, ecc., p. 5, N° 3 (3).

Note critiche.

L'*A. Stossichii* differisce dall'*A. ocreatum*, con la quale ha di comune la estrema picciolezza e la brevità dell'appendice caudale, oltrecchè per la forma generale del corpo, per la disposione generale degli organi genitali e specialmente per la forma e disposizione del vittellogeno, che è unico e posteriore all'ovario, mentre nell'*A. ocreatum* è duplice e situato innanzi a questo. Per l'unico vitellogeno esso differisce pure da tutte le altre specie di *Apoblema* a coda breve, ed anche da quelle a coda lunga.

Il *Distoma minimum* n. sp della *Clupea sprattus* del quale ho innanzi parlato, non descritto, nè figurato dal van Beneden nel lavoro sui pesci del Belgio ed i loro parassiti, è forse un sinonimo dell'*A. Stossichii?* Il nome imposto dal van Beneden potrebbe farlo supporre, chè la piccolezza è appunto una delle principali caratteristiche della mia n. sp e d'altra parte non è supponibile potesse essere l'*A. ocreatum* che era ben noto al van Beneden che lo ha, come innanzi ho detto, anche ben disegnato.

Habitat. — Questa specie è comunissima nell'esofago e nel ventricolo della *Clupea pilchardus* Walb. del nostro golfo nella quale io l'ho ritrovata in tutte le stagioni dell'anno. Nella scorsa estate io ho avuto occasione di ritrovarla nell'esofago e nel ventricolo della *Clupea aurita* Cuv. che in certi periodi dell'anno si trova abbastanza comune sul nostro mercato di pesci.

Note biologiche.

Nella noterella citata in sinonimia di questa n. sp. io sospettai che essa probabilmente potesse pervenire nella *Clupea pilchardus*, per mezzo dei Copepodi, perchè essi sono i più larga-

Digitized by Google

mente rappresentati nello stomaco della sardina e ne formano il nutrimento principale

Quantunque io non abbia ancora potuto rinvenire nei Copepodi ritrovati nello stomaco alcuna forma giovane di *A. Stossichii*, pure le mie nuove ricerche sul nutrimento della *Clupea pilchardus* e *Clupea aurita* confermano la mia supposizione, tanto più che quest'anno in una *Clupea pilchardus* ho trovato fra i resti di Copepodi una forma di Distoma, in una sorta di cisti avventizia, che sembravami somigliasse molto all'*A. Stossichii;* digraziatamente era in tali cattive condizioni che non mi fu dato poterlo bene studiare per accertarmi delle sue affinità coll'*A. Stossichii.*

In queste nuove ricerche ho trovato nello stomaco ed esofago delle nostre sardine sempre abbondantissimi *Copepodi* di specie differenti, che non ho potuto tutti determinare con certezza: ho ritrovate pure le due forme dubbiosamente nuove, da me citate nella mia Nota. Al nutrimento in questa menzionato devo aggiungere dei *Doliolum*, delle *Phronima* (rarissimamente) e degli scarsi *Peridinium*, che in allora non aveva ritrovati. Ho ritrovati ancora avanzi di Eteropodi e Pteropodi abbondanti; alcune sardine da me esaminate nello scorso Agosto avevano lo stomaco zeppo di radule e resti di *Pteropodi.*

Queste osservazioni provano sempre maggiormente che la *Clupea pilchardus* ad eccezione dei Copepodi, che formano la base costante del suo nutrimento, si ciba di ciò che trova, e che ha quindi nutrimento assai variabile secondo le stagioni e secondo i luoghi.

Osservazioni.

Questa specie così comune e frequente si ottiene facilmente quando si spacca lo stomaco e l'esofago della *Clupea pilchardus* e si raschia lungo le pareti e raccogliendo il contenuto si passa su dei porta-oggetti che, coperti debitamente, si sottopongono al microscopio. Essa apparisce evidente in mezzo al muco ed ai resti di alimento per il suo colorito generale caratteristico verdastro. Isolata essa ha colorito giallo verdastro e spicca in bruno-verdastro l'unico vitellogeno, ed in giallo intenso il ricettacolo seminale esterno: la massa delle uova tende al verdastro. Come si vede anche ad un esame superficiale, questa specie mostrasi

Digitized by Google

così differente dalla precedente che non si può con questa confondere.

Considerazioni generali sul Gen. *Apoblema.*

In nota a pag. 6 ho brevemente espresso le ragioni che mi inducono ad accettare l'opinione di Juel e considerare il gruppo dei Distomi provvisti di un'appendice caudale come formante un genere distinto della sottofamiglia dei *Distomidae* per il quale è da accettarsi il nome di *Apoblema*, proposto dal Dujardin, che lo riteneva un sottogenere del genere *Distomum*. Ora ritorno sulla più importante di tutte, cioè la presenza di una coda, giacchè è necessario di cercare di stabilire quale valore morfologico si debba attribuire a questa appendice, che non si osserva in nessun altro digenetico adulto, e quale importanza essa possa avere nella vita dell'animale.

È essa omologa alla coda delle *Cercarie* e quindi da ritenersi un carattere larvale conservato nello stato adulto?

L'appendice caudale può essere breve, brevissima, subnulla, in alcune specie (*A. ocreatum*, *A. Stossichii*, *A. microporum*), in altre lunga (*A. appendiculatum*) ed alle volte lunghissima (*A. tornatum*). Sono le forme a coda più lunga le forme più antiche, e quelle a coda breve quelle che hanno subìto una riduzione successiva della appendice caudale?

Disgraziatamente lo sviluppo e la biologia di queste Distomidi ci è poco noto e per quante ricerche avéssi da lungo tempo fatte allo scopo, mosso dal desiderio di risolvere le questioni innanzi proposte, non mi è riuscito poter fare osservazioni, che mi mettessero sulla via di risolverle. Non ho potuto, infatti, seguire lo sviluppo delle forme da me studiate ed in tutte le forme del genere da me esaminate non ho trovato mai embrioni nelle uova contenute nell'utero e nemmeno nelle uova, che spesso ho trovato numerose nel tubo digerente degli ospiti.

I risultati negativi delle mie ricerche m'inducevano a ritenere ed interpretare l'appendice caudale come una sorta di semplice allungamento della parte posteriore del corpo determinatasi principalmente per permettere una maggiore estensione dell'utero. Questa interpretazione veniva implicitamente ad ammettere che tale modificazione era un adattamento posteriore allo stato larvale di *Cercaria*, manifestantesi all'epoca della maturità sessuale solamente

Digitized by Google

e che quindi le forme a coda breve nelle quali essa è poco distinta dal corpo, quando è in estensione e non ha tanta contrattilità, come quella delle forme a coda lunga, dove si mostrano sviluppati degli speciali fasci muscolari destinati a favorirla, fossero da considerarsi iniziali e primitive.

Ma le osservazioni di Möbiuse Willemoes-Suhum che hanno trovate le larve di *A. appendiculatum* fornite di appendice caudale, libere e penetranti, come le Cercarie, nelle larve pelagiche di Anellidi e nei Copepodi, le osservazioni di Giesbrecht a conferma di quelle degli A. succitati, la presenza di un'altra forma larvale di Apoblema osservata dal Will. nella *Beroe rufescens* (1) e dal Busch (2) nelle *Sagitta* e liberamente nuotante, ed il fatto da me osservato di aver trovato fra le squame di una *Solea* sp. una forma giovane riferibile all'*A. excisum*, mi hanno indotto a stabilire una omologia fra la coda delle Cercarie e l'appendice caudale delle *Apoblema*, e ritenere che questa sia una modificazione successiva, un nuovo adattamento della coda, che stando alla regola, le Cercarie di *Apoblema* avrebbero avuto, la quale, invece di staccarsi o venir riassorbita, come avviene nelle comuni *Cercarie*, è persistita allo stato adulto modificandosi per un nuovo adattamento. Le forme a coda breve, ammettendo la omologia innanzi accennata, rappresenterebbero forme che hanno avuto, forse, una coda lunga e che ora non presentano che solo un rudimento di questa.

Ho innanzi esposto brevemente, senza commentarli, i fatti biologici che mi hanno spinto ad ammettere la omologia enunciata: ora è necessario esaminare più dappresso i fatti e vedere se veramente è possibile di stabilire questa omologia. Tutti i Distomi, prima di raggiungere la loro maturità sessuale passano per un ospite intermedio nel quale s'incistano aspettando di poter pervenire nell'ospite definitivo: per raggiungere quest'ospite intermedio, quando questo vive nell'acqua, le larve del Distoma, le Cercarie, sono provviste di una coda, ossia di un prolungamento della parte posteriore del corpo, che per la sua mobilità serve come organo di locomozione e permette alle Cercarie di ritrovare l'ospite intermedio e penetrarvi.

(1) *Ueber Distoma Beroes, in: Arch. f. Naturg.*, 1844, pag. 343-344, tab. X, fig. 10-13.

(2) *Beobacht über Anat, u. Entwickl. ein. Wirbell. Seethiere,* Berlin 1851.

Digitized by Google

Lo sviluppo embrionale delle *Apoblema* non ci è noto, ma sappiamo però che la forma giovane prima di raggiungere l'ospite definitivo, si annida in un altro ospite intermedio (incistandovisi come *A. labri rupestris* Olsson, o no *A. appendiculatum*, *A.* sp. Will.) e per penetrare in questo essa ha un periodo di vita libera. Questa forma giovane è, dunque, biologicamente, omologa alla Cercaria degli altri Distomi: vediamo ora se lo è morfologicamente. Come nelle Cercarie, in questa forma giovane delle *Apoblema* allo stato libero troviamo gl'inizii degli organi genitali e , come nelle Cercarie nella parte posteriore del corpo la coda, in questa (v. *A. appendiculatum*, *A. sp.* Will., *A. excisum*) troviamo un prolungamento della parte posteriore del corpo, l'appendice caudale. Questa è retrattile ed ha speciali fasci muscolari, atti a permetterlo, ed anche le Cercarie possono in parte ritrarre la coda ed hanno, per raggiungere questo scopo, dei fascetti muscolari, non così differenziati e svilluppati, come nelle *Apoblema*, ma che funzionano analogamente a questi (1). La struttura di questa appendice della forma giovane di *Apoblema* è anch'essa fondamentalmente simile a quella della coda delle Cercarie. Come in alcune Cercarie avrebbe osservato il Villot, il sistema escretore, tronco impari delle *Apoblema*, si continua nell'appendice caudale. Questa differisce solo essenzialmente dalla coda delle Cercarie, perchè in essa si prolungano i gambi intestinali.

Dalle cose dette mi pare che anche i dati morfologici concorrono a stabilire una omologia fra la Cercaria dei Distomi e la forma giovane delle *Apoblema* e quindi mi pare che esse possano considerarsi *morfologicamente* e *biologicamente omologhe*. Ciò ammesso, ne risulta evidente, per le comparazioni innanzi fatte la omologia della appendice caudale della forma larvale di *Apoblema* con la coda della *Cercaria* ed io credo ne risulti anche la analogia: quantunque non vi sieno osservazioni in proposito, io credo, infatti, che nelle forme giovani libere di *Apoblema* la appendice caudale serva, come la coda della Cercaria, come organo di locomozione e come aiuto per la penetrazione nell'ospite intermedio (e ciò darebbe naturalmente ragione al Willemoes-Suhum che sosteneva la penetrazione dell'*Apoblema* nei *Cyclops* per la

---

(1) Vedi: Schwarze. *Postembryonal Entwich.* ecc., in: *Zeit. Wiss. Zool.* Bd. 43, pag. 46, tav. III, fig. 10, 13, 15.

parte anteriore) (1). Mentre però la Cercaria penetrata nell'ospite intermedio, perde la sua coda o la riassorbisce, nell'*Apoblema* essa persiste. Da tutto ciò ne risulta come conseguenza che l'appendice caudale delle forme adulte di *Apoblema* può considerarsi l'omologa della coda delle *Cercarie.*

Ma l'appendice caudale delle *Apoblema* quantunque fondamentalmente identica alla coda delle Cercarie, pure mostra delle caratteristiche proprie, come p. e. il prolungarsi in essa delle braccia intestinali e dell'utero: ma questi possono naturalmente interpretarsi come mutamenti avvenuti in seguito, per la persistenza della coda larvale negli adulti, come un nuovo adattamento di questa. Tutti i fatti esposti e le considerazioni fatte ci fanno pensare che le *Apoblema*, infatti, provengano da forme primitive, nelle quali la coda larvale tipica delle Cercarie si è conservata ed ha man manò subìto i nuovi adattamenti suddescritti, i quali si saranno esplicati in una serie di forme di passaggio, ora non più esistenti, che per le tendenze abbreviative dell'ontogenia, non si ripetono in questa, che invece ci dà l'ultimo portato dell'adattamento della coda delle Cercarie: ciò spiegherebbe la presenza delle braccia intestinali dell'appendice caudale anche nelle forme giovani di *Apoblema.*

Le specie di *Apoblema* a coda breve e brevissima si spiegherebbero ammettendo che in esse l'appendice caudale abbia subìta una riduzione posteriore, si sia, in breve, manifestata una tendenza a perderla. Noi non conosciamo disgraziatamente le forme giovani libere di *Apoblema* ad appendice caudale breve e quindi non possiamo sapere come e quando si manifesti nello sviluppo ontogenetico questa tendenza. Se sono delle larve nuotanti, è da supporre però che questa riduzione avvenga nell'ospite intermedio.

Dalla somma delle cose dette mi si presenta un quesito che pare ne emerga evidente, cioè: Si è autorizzati veramente a considerare la coda, o meglio, l'appendice caudale delle *Apoblema* come una coda di Cercaria persistente allo stato adulto e modificata ulteriormente, oppure si avrebbero ragioni per credere

---

(1) Di quanto aiuto sia la coda delle *Cercarie* nella penetrazione di questa io ho potuto bene osservare nella *C. setifera*, della quale ho potuto studiare il suo periodo di vita libera ed il modo come essa cerca l'ospite, vi entra e vi si incista (v. mia Nota in proposito, in *Boll. Soc. Nat.* Vol. II, pag. 193-199 e *Saggio di una Morfologia dei Trematodi*, pag. 78-79).

Digitized by Google

invece che la coda delle Cercarie sia un derivato della appendice caudale delle *Apoblema?*

Ritornando sulle considerazioni esposte si potrebbe vedere che alcuni fatti parlano in favore di che le forme primitive di Distomidae fossero state provviste di un'appendice posteriore, che nello stato larvale serviva come aiuto alla locomozione, persistente allo stato adulto, appendice che, perchè forse inutile nello stato adulto, sia andata perduta e non ne è rimasta traccia che nella ontogenia, trasformandosi in una caratteristica larvale e meglio specializzandosi per la funzione alla quale è destinata.

Conclusioni sistematiche.

In seguito alle mie ricerche l'ordinamento sinottico delle specie del genere *Apoblema* proposto dal Juel deve essere alquanto modificato.

Egli propone aggruppare nel modo seguente le nove specie del genere da lui ammesse:

A. Haut durch feine querlaufende Erhebungen regelmässig geringelt.

a. Dotterstöcke nicht tiefe gelappt, deutlich getrennt.

1. *A. appendiculatum* Rud., 2. *A. ocreatum* Olsson, nec Rudolphi, 3. *A. scabrum* O. F. Muller.

b. Dotterstöcke bestehen aus langen cylindrischen in einem Punkte zusammenfliessenden Lappen.

4. *A. excissum*, 5. *A. crenatum* Molin non Rudolphi, 6. *A. tornatum* Rud.

B. Haut nicht regelmässig geringelt.

7. *A. rufoviride*, 8. *A. grandiporum* Rud., 9 *A. mollissinum* Levinsen.

Ora, siccome alcune delle forme da lui messe fra le dubbie rientrano fra quelle da ammettersi (*D. ocreatum* Molin), altre vengono ad essere escluse di fatto dal genere *Apoblema* (*D. gigas* e *D. Raynerianum* Nardo) ed altre due nuove devono aggiungersi alle note: l'*A. Stossichii* ed il *Distomum microporum* (1) da me descritto del *Plagyodus ferox*, il quadro proposto dal Juel non prestandosi più ad un aggruppamento delle specie, che rag-

(1) *Proc. Zool. Soc. of. London*, 1889, pag. 322, Plt. XXXIII. fig. 1.

Digitized by Google

giunga lo scopo di guidare al facile riconoscimento di queste, io propongo l'altro seguente:

I. Appendice caudale lunga.

a) — Cute pieghettata.

† — Vitellogeni due ramosi.

o Ventosa anteriore integra; apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore.

. Ventosa anteriore più piccola della posteriore. 1 *A. tornatum* RUD.

.. Ventosa anteriore più grande della posteriore. 2 *A. crenatum* MOLIN.

oo Ventosa anteriore posteriormente interrotta; apertura genitale nell'interruzione di questa. 3 *A. excisum* RUD.

†† — Vitellogeni due rotondeggianti; apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore. 4 *A. appendiculatum* RUD.

b) — Cute non pieghettata. 5 *A. grandiporum* MOLIN.

II. Appendice caudale breve.

a) — Cute pieghettata.

† — Vitellogeno unico rotondeggiante: apertura genitale dietro la ventosa anteriore. 6 *A. Stossichii* MONTIC.

b) — Cute non pieghettata, alle volte rugosa.

† — Ventosa posteriore più piccola della anteriore. 7 *A. microporum* MONTIC.

†† — Ventosa posteriore più grande della anteriore.

o Vitellogeni due rotondeggianti; apertura genitale innanzi la ventosa posteriore. 8 *A. ocreatum* RUD.

oo Vitellogeno unico ramoso; apertura genitale a metà distanza tra le due ventose.

. Ovario rotondeggiante . . 9 *A. rufoviride* RUD.

.. Ovario lobato . . . 10 *A. mollissimun* LEVINS.

Digitized by Google

Secondo le mie conclusioni, che vengono riassunte nel quadro proposto, le specie del genere *Apoblema* da ammettersi si riducono a nove. Oltre l'esclusione dei due Distomi del Nardo io credo debba essere escluso anche il *Distomum apertum* ritenuto dal Dujardin e dal Juel come specie dubbie del genere *Apoblema*. Come specie dubbia del genere va però registrata l'*A. Labri-rupestris* dell'Olsson (Bidrag til Skandinav. Helm. fauna, pagina 20, N. 20) trovato immaturo ed incistato.

Ho considerate come forme distinte l'*A. crenatum* Molin e *A. excisum* Rud. che sono affinissimi tra loro, ma esprimo il dubbio che forse possono essere la stessa cosa: ciò a giudicare dal confronto della figura del *D. crenatum* data dal Molin (Sitz Ber. k. Akad. Wien, XXXVII. Tav. I, fig. 3) con quella del *D. excisum* data dal Wagener. (Op. cit. Tav. IX, fig. 10.).

Devo qui ricordare ad evitare ulteriori equivoci, che il *D. crenatum* del Molin (*Apoblema crenatum*) non è la stessa cosa del *D. crenatum*, descritto dal Rudolphi, nell'*Entoz. Hist.*, pagina 404, N. 44, del *Gasterosteus aculeatus* e disegnato nella Tab. V, fig. 1 e più tardi dal medesimo A., nella sua *Entoz. Synops.*, pag. 110, n° 85, riferito ed identificato al *D. appendiculatum*.

Napoli, Stazione Zoologica, 15 novembre 1890.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Lettere comuni a tutte le figure.

ag — antro genitale
ap — appendice caudale
b — bocca
e — esofago
f — faringe
gg — glandole del guscio
gp — glandole prostatiche
i — braccia intestinali
ov — ovario
ovd — ovidutto interno
p — pene e tasca del pene

Digitized by Google

rse — ricettacolo seminale esterno
rsi — ricettacolo seminale interno
rv — ricettacolo vitellino
se — tronchi del sistema escretore
t — testicoli
ut — utero
Va — Ventosa anteriore
vd — vaso deferente
Vp — Ventosa posteriore
vtl — vitellogeni
vt — vitellodutti

NB. Tutte le figure, eccetto le fig. 2, 3, 5, 10, 11, 12, sono state eseguite col sistema Zeiss e con la camera chiara Abbe.

Fig. 1 *Apoblema ocreatum* Rud.; figura d'insieme da preparazioni a fresco, o debitamente fissate. $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 15,

» 2 *Apoblema Stossichii* n. sp.; $\frac{2}{C}$ senza camera chiara: figura d'insieme $\times 145$, pag. 19-20;

» 3 *Apoblema Stossichii*, figura d'insieme dello sbocco dei genitali e dei loro rapporti reciproci e delle parti dell'apparato maschile $\frac{2}{D}$ ad occhio $\times 230$, pag. 19-20.

» 4 *Apoblema Stossichii;* sezione frontale per lasciar vedere i rapporti e la disposizione delle glandole prostatiche: contorni $\frac{4}{4,0} \times 250$, dettagli $\frac{8}{4,0} \times 500$, pag. 20.

» 5 Figura ricavata da uno schizzo preso da un esemplare tipico di *D. ocreatum* della *Clupea harengus* della collezione di Rudolphi, pag. 17.

» 6 *Pseudocalanus elongatus* contenente la forma giovane di *Apoblema appendiculatum:* $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 13.

» 7 Estremità posteriore dell'*Apoblema ocreatum* vista di profilo per mostrare l'appendice caudale: $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 15.

» 8 Sezione frontale di *Apoblema Stossichii:* contorni $\frac{2}{c} \times 145$, dettagli $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

Digitized by Google

Fig. 9 Figura ricavata da due sezioni frontali, alquanto oblique, consecutive di *Ap. Stossichii* per mostrare i rapporti e le disposizioni degli organi genitali femminili: contorni $\frac{4}{4,0} \times 250$, dettagli $\frac{8-12}{4,0} \times 500$, 750, pag. 20.

» 10 Figura d'insieme dei rapporti dell'ovidutto interno, ricettacolo vitellino ed ovario dell'*A. ocreatum*: ad occhio $\frac{2}{C} \times 145$, pag. 20.

» 11 Figura ricavata da uno schizzo di un esemplare tipico di *D. ventricosum* Rud della *Clupea alosa* della collezione di Rudolphi, pag. 17.

» 12 Forma giovane di *A. appendiculatum* estratta dal corpo di un *Pseudocalanus elongatus*: ad occhio $\frac{2}{C} \times 145$, pag. 13-14.

» 13 Un uovo di *Ap. Stossichii* nel quale si vede la cellula germinativa spostata verso il polo più largo dell'uovo: $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

» 14 *A. ocreatum*: figura d'insieme dello sbocco dei genitali e dei loro rapporti reciproci; si vede l'insieme delle parti escretorie dell'apparato maschile e delle glandole prostatiche: $\frac{2}{C} \times 145$, pag 15-16.

» 15 Uova delle tre specie di *Apoblema* descritte nel testo viste al medesimo ingrandimento per stabilire i loro rapporti di grandezza: $\frac{4}{4,0} \times 240$

a — *A Stossichii*, pag. 20.
b — *A, appendiculatum*, pag. 11.
c — *A. ocreatum*, pag. 16.

» 16 Un pezzo del tubo escretore principale dell'*A. Stossichii*: $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

» 17 *Apoblema Stossichii*; figura d'insieme: $\frac{2}{C} \times 145$, p. 19.

Digitized by Google

Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva;

Nota del Socio Prof. ENRICO D'OVIDIO

§ 1. Siano x_1, x_2, x_3 le cordinate omogenee di un punto in un piano; si scelga come assoluto del piano una conica A di equazione

$$a_{xx} \equiv a_{11} x^2_1 + \ldots + 2\, a_{23} x_2 x_3 + \ldots = 0\ ,$$

e si ponga

$$a_{xx} \equiv a_{11} x_1 x'_1 + \ldots + a_{23} (x_2 x'_3 + x^3 x'_2) + \ldots$$

Se $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$, $M(y_1, y_2, y_3)$ sono due punti del piano, ogni punto N della loro retta ha coordinate della forma

$$\lambda x'_1 + \mu y_1\ , \quad \lambda x'_2 + \mu y_2\ , \quad \lambda x'_3 + \mu y_3\ ,$$

corrispondenti univocamente ai valori del parametro $\lambda : \mu$; e si ha, in una determinazione metrica proiettiva di assoluto A,

$$\mathrm{tg}^2\, P'N = \frac{a_{x'x'} a_{\lambda x' + \mu y\,,\, \lambda x' + \mu y} - a^2_{x'\,,\, \lambda x' + \mu y}}{a^2_{x'\,,\, \lambda x' + \mu y}} = \frac{(a_{x'x'} a_{yy} - a^2_{x'y}) \mu^2}{(a_{x'x'} \lambda + a_{x'y} \mu)^2}\ .$$

Sia C una conica del piano, di equazione

$$c_{xx} \equiv c_{11} x_1^2 + \ldots + 2\, c_{23} x_2 x_3 + \ldots = 0\ ;$$

e si ponga

$$c_{xx'} \equiv c_{11} x_1 x'_1 + \ldots + c_{23} (x_2 x'_3 + x_3 x'_2) + \ldots$$

I due punti N'_1, N'_2, comuni alla retta $P'M$ ed alla conica C, corrisponderanno alle radici $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$ della equazione

$$c_{\lambda x' + \mu y\,,\, \lambda x' + \mu y} = c_{xx'} \lambda^2 + 2\, c_{x'y} \lambda \mu + c_{yy} \mu^2 = 0\ ;$$

Digitized by Google

cosicchè potremo assumere

$$\lambda_1\lambda_2 = c_{yy}\,,\quad \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1 = -2\,c_{x'y}\,,\quad \mu_1\mu_2 = c_{x'x'}\,.$$

Quindi avremo

$$\operatorname{tg} P'N'_1 \operatorname{tg} P'N'_2 = \frac{(a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y})\,c_{x'x'}}{(a_{x'x'}\lambda_1+a_{x'y}\mu_1)(a_{x'x'}\lambda_2+a_{x'y}\mu_2)}$$

$$= \frac{(a^2_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y})c_{x'x'}}{a^2_{x'x'}c_{yy}-2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y}+a^2_{yy}c_{x'x'}}\ (*).$$

Il prodotto $\operatorname{tg} P'N'_1 \operatorname{tg} P'N'_2$, se P' rimane fisso, varia con M: in particolare è zero con $a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y}$, cioè quando M percorre le due tangenti t'_1, t'_2 condotte da P' ad A; ed è infinito quando M annulla $a_{x'x'}\lambda_1+a_{x'y}\mu_1$ o $a_{x'x'}\lambda_2+a_{x'y}\mu_2$, cioè quando M percorre le rette r'_1, r'_2, che uniscono P' ai punti d'incontro di C con la polare di P' rispetto ad A.

Del pari, se $P''(x''_1, x''_2, x''_3)$ è un altro punto, e se la retta $P''M$ seca C in N''_1, N''_2, si ha

$$\operatorname{tg} P''N''_1 \operatorname{tg} P''N''_2 = \frac{(a_{x''x''}a_{yy}-a^2_{x''y})\,c_{x''x''}}{a^2_{x''x''}c_{yy}-2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y}+a_{yy}^2\,c_{x''x''}}\,,$$

e così via.

Il rapporto

$$\frac{\operatorname{tg} P'N'_1 \operatorname{tg} P'N'_2}{\operatorname{tg} P''N''_1 \operatorname{tg} P''N''_2}$$

$$= \frac{c_{x'x'}}{c_{x''x''}}\cdot\frac{a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y}}{a_{x''x''}a_{yy}-a^2_{x''y}}\cdot\frac{a^2_{x''x''}c_{yy}-2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y}+a^2_{yy}c_{x''x''}}{a^2_{x'x'}c_{yy}-2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y}+a^2_{yy}c_{x'x'}}$$

(*) Se si adopera la notazione simbolica, ponendo $a_{xx}\equiv a^2_x\equiv a'^2_x\equiv\cdots$, $c_{xx}\equiv c^2_x$, si avrà

$$a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y} = [a, a', (x'y)]^2\,,$$

$$a_{x'x'}\lambda + a_{x'y}\mu = (a_{x'}\lambda + a_y\mu)\,a_{x'}\,,$$

$$(a_{x'x'}\lambda_1 + a_{x'y}\mu_1)(a_{x'x'}\lambda_2 + a_{x'y}\mu_2) = a^2_{x'x'}c_{yy} - 2a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y} + a^2_{yy}c_{x'x'}$$
$$= [a, c, (x'y)]\,[a', c, (x'y)]\,a_{x'}a'_{x'}\,.$$

Digitized by Google

varia con M, se P' e P'' rimangono fissi. Se si vuole che esso abbia un dato valore ρ, il punto M avrà per luogo la quartica

$$c_{x'x'}(a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y})(a^2_{x''x''}c_{yy}-2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y}+a^2_{yy}c_{x''x''})$$
$$=\rho\, c_{x''x''}(a_{x''x''}a_{yy}-a^2_{x''y})(a^2_{x'x'}c_{yy}-2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y}+a^2_{yy}c_{x'x'})\,;$$

e variando ρ, si otterrà un fascio di quartiche, al quale apparterranno le quaderne di rette $(t'_1, t'_2, r''_1, r''_2)$, $(t''_1, t''_2, r'_1, r'_2)$; cosicchè queste quartiche avranno per punti doppi P', P'' e passeranno per gli altri 8 punti comuni alle due quaderne. La quartica corrispondente a $\rho = c_{x'x'} : c_{x''x''}$ passerà pel polo della retta $P'P''$ rispetto ad A.

Sia

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv \alpha_{11}\xi^2_1 + \ldots + 2\,\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots = 0$$

l'equazione di A come inviluppo: chiamati a, α i discriminanti di a_{xx}, α_{xx}, potremo porre

$$\alpha_{11} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{11}}, \ldots, \alpha_{23} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{23}}, \ldots,$$

onde

$$a\alpha = 1\,.$$

Nel caso che A si scinda in una coppia di punti $L(p_1, p_2, p_3)$, $L'(p'_1, p'_2, p'_3)$, si ha (posto $\xi_x = \xi_1 x_1 + \ldots$)

$$\alpha_{\xi\xi} = \xi_p \xi_{p'}\,, \quad \alpha = 0\,,$$
$$\alpha\, a_{xx} = -\frac{1}{4}(x p p')^2\,, \quad \alpha\, a_{xx'} = -\frac{1}{4}(x p p')(x' p p')\,,$$
$$\alpha(a_{xx}a_{x'x'} - a^2_{xx'}) = \alpha_{(xx'),(xx')} = (x x' p)(x x' p')\,;$$

e ricordando che $P'N = \lim \dfrac{\operatorname{tg} PN}{\sqrt{\alpha}}$ per $\alpha = 0$, si trova

$$\overline{P'N}^2 = -\frac{4\,(x'yp)\,(x'yp')\,\mu^2}{(x'pp')^2\left[(x'pp')\lambda + (ypp')\mu\right]^2}\,,$$

$$P'N'_1 . P'N'_2 = \frac{4\,(x'yp)\,(x'yp')\,c_{x'x'}}{(x'pp')^2\left[(x'pp')^2 c_{yy} - 2\,(x'pp')\,(ypp')\,c_{x'y} + (ypp')^2 c_{x'x'}\right]}\,.$$

Digitized by Google

Allora le quartiche testè considerate passano per L, L' e pei due punti comuni a C ed alla retta LL'.

Siccome per $y \equiv \nu p + \nu' p'$ si ha

$$(x'yp) = -\nu'(x'pp'), \quad (x'yp') = \nu(xpp'), \quad (ypp') = 0;$$

così, se M è un punto della retta LL', risulta

$$\overline{P'N}^2 = \frac{4\mu^2\nu\nu'}{\lambda^2(x'pp')^2}, \qquad P'N'_1 . P'N'_2 = \frac{4\nu\nu' c_{x'x'}}{(x'pp')^2 c_{yy}},$$

e però

$$\frac{P'N'_1 . P'N'_2}{P''N''_1 . P''N''_2} = \frac{c_{x'x'}}{c_{x''x''}} \cdot \frac{(x''pp')^2}{(x'pp')^2} = \text{cost.}$$

Questa relazione è la generalizzazione di un teorema di Apollonio, del quale è conseguenza la proporzionalità fra i quadrati di due corde parallele e i prodotti dei segmenti in cui dividono il diametro coniugato, fra le tangenti da un punto e i diametri ad esse paralleli, ecc. Tale teorema fu esteso da Newton a curve d'ordine qualunque, sempre nel dominio della Geometria euclidea. Or siccome il procedimento dianzi tenuto serve anche se c_{xx} è di grado superiore a 2; così, limitandoci all'ultima relazione, otteniamo il teorema:

« Se due rette rotano in un piano intorno a due punti fissi « secandosi sempre su una retta fissa, assumendo come assoluto « del piano due punti di questa retta, sarà costante il rapporto « dei prodotti dei segmenti che una data curva algebrica del piano « determina sulle due rette rotanti a contare dai due punti ».

Di qui segue che il teorema di Carnot, relativo ai segmenti che una curva algebrica determina sui lati di un poligono, sussiste quando l'assoluto è una coppia di punti.

§ 2. Riprendiamo la forma canonica di a_{xx}, c_{xx} e le varie denominazioni e notazioni adottate nella Nota « *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva* » (Atti dell'Acc. di Torino, v. XXVI, 11 Genn. 1891) e nell'altra « *Sulle coniche confocali...* » (ibid. 25 Genn.).

Chiamiamo *diametri principali* di C tutte le rette per O_h $(h = 1, 2, 3)$. Sia $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ un punto di C; il diametro coniugato del diametro $O_hP'(x'_l x_k - x'_k x_l = 0)$ e passante per O_h

Digitized by Google

ha l'equazione $c_k x'_k x_k + c_l x'_l x_l = 0$, e seca C in due punti uno dei quali è $P''(\pm x'_k \sqrt{c_k c_l},\ c_l x'_l,\ -c_k x'_k)$; ora si ha, per un assoluto qualunque A,

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P' = \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{a_h x'^2_h}\ ,\quad \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = \frac{a_l c^2_k x'^2_k + a_k c^2_l x'^2_l}{a_h c_k c_l x'^2_h}\ ,$$

$$\mathrm{sen}^2\,(O_h P', O_h P'') = \frac{a_k a_l c^2_h x'^4_h}{(a_k x'^2_k + a_l x'^2_l)(a_l c^2_k x'^2_k + a_k c^2_l x'^2_l)}\ ,$$

onde le relazioni

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P' + \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = -\frac{c_h (a_k c_l + a_l c_k)}{a_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P' . \mathrm{tg}^2\, O_h P'' . \mathrm{sen}^2 (O_h P', O_h P'') = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

generalizzazione dei due teoremi di Apollonio sulle grandezze di due diametri coniugati. Il secondo può ricevere anche la forma

$$\mathrm{tg}^2\, O_h t' . \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

indicando con t' la tangente a C in P', la quale seca $O_h P'$ su o_h.

§ **3.** Siano invece $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$, $P''(x''_1, x''_2, x''_3)$ estremi di due semidiametri perpendicolari per O_h; sarà $a_k x'_k x''_k + a_l x'_l x''_l = 0$, e potremo assumere

$$x''_k = a_l x'_l,\ x''_l = -a_k x'_k,\ c_h x''^2_h = -(c_k a^2_l x'^2_l + c_l a^2_k x'^2_k)\ ,$$

onde

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P'' = -\frac{c_h a_k a_l}{a_h} \cdot \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{c_k a_l x'^2_l + c_l a^2_k x'^2_k}\ ;$$

e però, ricordando che $c_{x'x'} = 0$, troveremo la relazione

$$\cot^2 O_h P' + \cot^2 O_h P'' = -\frac{a_h (a_k c_l + a_l c_k)}{c_h a_k a_l} = \mathrm{cost.}$$

§ **4.** Vi sono infiniti circoli bitangenti a C, e i due punti di contatto con C di un tal circolo sono quelli dove un dia-

Digitized by Google

metro qualunque per O_k seca C, mentre i due punti di contatto con A cadono sulla retta coniugata di quel diametro rispetto a $I_0 I_k$ e $I_k I_l$; infatti tutto ciò si può dedurre dall'osservare che, supposto

$$c_{xx}+\xi_x^2=\rho\, a_{xx}+\eta_x^2,$$

si ha

$$c_{xx}-\rho\, a_{xx}=(\eta_x+\xi_x)(\eta_x-\xi_x),$$

e viceversa.

In particolare, vi sono due circoli bitangenti a C in P_k e P'_k: essi toccano A due volte risp. su o_k e o_l, han per centri O_k e O_l, hanno come autoconiugato il triangolo $O_1 O_2 O_3$, sono in omologia con C rispetto a O_k e o_k, a due loro diametri perpendicolari per O_k ed O_l corrispondono nell'omologia due diametri coniugati di C, e le loro equazioni sono

$$a_l c_{xx}-(ac)_k x_k^2=c_l a_{xx}-(ac)_k x_k^2=0 \quad,$$

$$a_k c_{xx}+(ac)_l x_k^2=c_k a_{xx}+(ac)_k x_l^2=0 \quad.$$

Consideriamo p. e. il circolo Γ, che tocca C in P_k, P'_k ed ha il centro in O_k. Una retta mobile per O_k, $\xi_k x_k+\xi_l x_l=0$, seca o_k C, Γ nei punti

$$O'_k(0,\xi_l,-\xi_k),\quad M_k\left[\pm\sqrt{-(c_k\xi_l^2+c_l\xi_k^2):c_k},\ \xi_l,-\xi_k\right],$$

$$N_k\left[\pm\sqrt{-(c_k\xi_l^2+c_l\xi_k^2)\,a_l:a_k c_l},\ \xi_l,-\xi_k\right],$$

e si ha

$$\mathrm{tg}^2\, O'_k M_k=-\frac{a_k}{c_k}\cdot\frac{c_k\xi_l^2+c_l\xi_k^2}{a_k\xi_l^2+a_l\xi_k^2},\quad \mathrm{tg}^2\, O' N_k=-\frac{a_l}{c_l}\cdot\frac{c_k\xi_l^2+c_l\xi_k^2}{a_k\xi_l^2+a_l\xi_k^2},$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{tg}^2\, O'_k M_k}{\mathrm{tg}^2\, O'_k N_k}=-\frac{a_k c_l}{a_l c_k}=\cot^2\tfrac{1}{2}P_k P'_k=\text{cost.}$$

§ 5. Consideriamo le due tangenti r_k, r'_k condotte da O_k a C, che diremo *asintoti*.

Combinando le loro equazioni $x_k\sqrt{c_k}\pm x_l\sqrt{-c_l}=O$ con quelle di una tangente qualunque t di C, ossia $c_{xx'}=O$, abbiamo pei punti $r_k t\equiv T_k$, $r'_k t\equiv T'_k$,

$$x_k=\sqrt{-c_l},\quad x_l=\mp\sqrt{c_k},\quad c_k x'_k x_k=(x'_k\sqrt{-c_k}\mp x'_l\sqrt{c_l})\sqrt{c_k c_l};$$

Digitized by Google

ed applicando la formola dell'area di un triangolo, cioè

$$\text{sen}^2 PP'P'' = \frac{a(x x' x'')^2}{a_{xx} a_{x'x'} a_{x''x''}},$$

otteniamo

$$-\text{sen}^2 O_h T_h T'_h =$$

$$\frac{4\, a_k\, a_l\, c c^3_h\, x'^4_h}{\left[(ac)_h c^2_h x'^2_h - a_h c_k c_l (x'_k \sqrt{-c_k} - x'_l \sqrt{c_l})^2\right]\left[(ac)_h c^2_h x'^2_h - a_h c_k c_l (x'_k \sqrt{-c_k} + x'_l \sqrt{c_l})^2\right]}.$$

Questa espressione in generale non rimane costante mentre t varia.

Ma se l'assoluto degenera in due punti, e precisamente se $\alpha_h = 0$, si ottiene

$$O_h T_h T'_h = \lim \frac{\text{sen}^2 \overline{O_h T_h T'_h}^2}{\alpha^2} = \frac{4 c^2_h}{\alpha^2_k \alpha^2_l c} = \text{cost.}$$

§ 6. Una tangente mobile di C segna su due tangenti fisse due punteggiate proiettive; e però fra i segmenti δ, δ' che essa vi determina a partire da due punti assegnati, p. e. dai punti di contatto, passa una relazione della forma

$$\lambda \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\delta' + \mu \operatorname{tg}\delta + \mu' \operatorname{tg}\delta' + \nu = 0 \quad ;$$

la quale diviene

$$\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\delta' = \text{cost.}$$

solo quando il punto comune alle due tangenti fisse ha la stessa polare rispetto a C ed A; il che, se A è una conica propria, avviene quando le tangenti fisse sono due asintoti r_h, r'_h; e, se A si scinde in due punti, avviene sempre quando le due tangenti fisse son parallele.

Due rette, che siano coniugate rispetto a C e mobili intorno a un punto fisso O, secano una tangente fissa t di C in coppie di punti di una involuzione, i cui punti doppî sono sulle tangenti da O a C; quindi le distanze ε, ε' fra il punto di contatto T della data tangente t e due punti corrispondenti dell'involuzione sono legati da una relazione della forma

$$\lambda \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon' + \mu(\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varepsilon') + \nu = 0 \quad .$$

Digitized by Google

A T corrisponde nell'involuzione il polo della OT. Se questi due punti sono ortogonali, la relazione d'involuzione si riduce a

$$\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon' = \text{cost.}$$

Due rette coniugate rispetto a C secano una tangente di C in due punti tali, che le altre due tangenti di C passanti per essi si secano sulla polare del punto comune a quelle due rette coniugate (STAUDT, *Geom. d. Lage*, 254). Quindi segue che, per generare la precedente involuzione, si possono adoperare le coppie di tangenti tirate dai punti di una retta fissa (polare di O).

Scegliendo per punto fisso O_h, si ha $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon' = $ cost. quando T è uno dei quattro vertici P_k, P'_k, P_l, P'_l. Che se inoltre l'assoluto degenera in due punti di o_h, allora si ha $\varepsilon\varepsilon' = $ cost. qualunque sia T.

§ 7. Da quel che abbiamo esposto in questa Nota e nelle due dianzi citate emerge che, quando si cercano le proprietà metriche di una conica C assumendo come assoluto del suo piano una conica qualsiasi A, ciascun vertice del triangolo $O_1 O_2 O_3$ autoconiugato rispetto a C e A fa l'ufficio analogo a quello del centro di C nella metrica euclidea, le rette passanti per O_1, O_2, O_3 fanno l'ufficio analogo a quello dei diametri di C, e i lati o_1, o_2, o_3 del detto triangolo l'ufficio analogo a quello degli assi di C. Noi perciò li abbiamo chiamati rispettivamente *centri*, *diametri*, *assi principali* di C. L'epiteto « principale » è stato adoperato ad evitar confusioni; poichè sonvi altri punti ed altre rette, che nella metrica proiettiva posseggono in una certa misura proprietà analoghe a quelle del centro, dei diametri e degli assi della metrica euclidea; siccome risulterà dai seguenti cenni.

Sia A' la conica polare-reciproca di A rispetto a C, la quale ha per equazioni in coordinate di punti e di rette

$$a'_{xx} \equiv \sum \alpha_h c^2_h x^2_h = 0 \ , \quad \alpha'_{\xi\xi} \equiv \sum a_h \gamma^2_h \xi^2_h = 0 \ .$$

Le tangenti di A' hanno per poli rispetto a C i punti dell'assoluto A, e da questo punto di vista sono analoghe ai diametri della metrica euclidea, e possiamo chiamarli *diametri* di C.

Sia inoltre A'' la conica polare-reciproca di A' rispetto ad A, la quale ha le equazioni

$$a''_{xx} \equiv \sum a^3_h \gamma^2_h x^2_h = 0 \ , \quad \alpha''_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha^3_h c^2_h \xi^2_h = 0 \ .$$

Digitized by Google

Ogni diametro di C ne ha due coniugati, cioè le tangenti condotte ad A' dal suo polo rispetto a C.

Una tangente (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di A' soddisfa la $\alpha'_{\xi\xi}=0$; i suoi poli rispetto a C e A sono $(\gamma_1\xi_1, \gamma_2\xi_2, \gamma_3\xi_3)$, $(\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3)$, la retta di questi poli è $\left(\frac{a_1c_1(ac)_1}{\xi_1}, \frac{a_2c_2(ac)_2}{\xi_2}, \frac{a_3c_3(ac)_3}{\xi_3}\right)$, e questa retta è tangente ad A' quando

$$\beta_{\xi\xi}\equiv\sum\beta_h\xi^2_k\xi^2_l=0\,,$$

posto

$$\beta_h\equiv a^2_h(ac)^2_h\,.$$

Or questa equazione rappresenta una curva di quarta classe, che chiameremo B; quindi raccogliamo che le otto tangenti comuni alle curve A', B si possono dividere in quattro coppie, e quelle di ciascuna coppia sono due diametri di C coniugati e perpendicolari; sicchè possiamo chiamarle le quattro coppie di *assi* di C.

È facile verificare che la B è altresì l'inviluppo delle rette che uniscono i poli delle tangenti di A' rispetto a C ed A.

Accenniamo le principali proprietà della curva B.

Come tutte le coniche A, C, C', A', A'' hanno O_h e o_h $(h=1,2,3)$ come centro ed asse di omologia armonica, così anche la B; onde segue che le quattro coppie di assi sono a due a due omologiche-armoniche rispetto a O_h e o_h.

La B ha per tangenti doppie o_1, o_2, o_3; e precisamente o_h la oscula nei punti $\beta_k\xi^2_l+\beta_l\xi^2_k=0$ armonici con O_k, O_l; e i sei punti di osculazione giacciono sulla conica W di equazioni

$$w_{xx}\equiv\sum\beta_h x^2_h=0\,,\quad \omega_{\xi\xi}\equiv\sum b_h\xi^2_h=0\,,\quad (b_h\beta_h\equiv1)\,,$$

la quale ha pure il triangolo $O_1O_2O_3$ come autoconiugato.

Le rette da O_l ai punti di osculazione di o_h con B inviluppano la conica

$$w_{\xi\xi}=\sum\beta_k\xi^2_h=0\,,\qquad \omega_{xx}=\sum b_hx_h^2=0\,.$$

Quattro tangenti di B sono $(\pm\sqrt{\beta_1}, \pm\sqrt{\beta_2}, \pm\sqrt{\beta_3})$: esse sono le tangenti comuni a C' e A, e si trovano a due a due in omologia armonica rispetto a O_h e o_h.

Digitized by Google

Altre tangenti di B sono $[\pm\sqrt{\beta_1\gamma_1}, \pm\sqrt{\beta_2\gamma_2}, \pm\sqrt{\beta_3\gamma_3}]$; esse sono le tangenti comuni comuni a C' e A'', e si trovano a due a due in omologia armonica rispetto a O_k e o_k.

Per ogni punto di o_k passano due tangenti di B (oltre la doppia osculatrice o_k), omologiche-armoniche rispetto a O_k e o_k; le due coppie di tangenti passanti per due punti di o_k armonici rispetto a O_k e O_l secano o_k e o_l risp. negli stessi punti.

Nella corrispondenza birazionale

$$\eta_1:\eta_2:\eta_3\equiv\xi_2\xi_3:\xi_3\xi_1:\xi_1\xi_2\,, \quad \text{ossia} \quad \xi_1:\xi_2:\xi_3=\eta_2\eta_3:\eta_3\eta_1:\eta_1\eta_2\,,$$

a un punto $\Sigma y_k\eta_k=0$ corrisponde una conica $\Sigma y_k\xi_k\xi_l=0$ iscritta nel triangolo $O_1O_2O_3$; a una retta per O_k un punto di o_k; e in particolare, alla retta da O_k al punto $\Sigma y_k\eta_k=0$ il punto di contatto di o_k con W; alla conica W corrisponde la curva B; alle due tangenti da O_k a W i due punti di contatto di o_k con B.

La B ha quattro punti doppî, le cui equazioni sono compendiate nella

$$\sum\pm\xi_k\sqrt{b_k}=0\ ;$$

ed a due a due essi sono in omologia armonica con O_k e o_k.

L'ordine della B è $4.3-2.3=6$.

Ogni retta per O_k seca B in tre coppie di punti in involuzione.

Indicando con n_0, n_1, n_2, n_3 il trinomio $\Sigma\xi_k\sqrt{b_k}$ e quelli che ne derivano col mutarvi di segno un sol radicale, si ha

$$w^2_{\xi\xi}-n_0n_1n_2n_3=2\,b_1b_2b_3\beta_{\xi\xi}\,.$$

Le quattro coppie di tangenti nei punti doppî di B toccano la conica W.

L'equazione della B può anche scriversi così:

$$\sqrt{n_0}+\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\sqrt{n_3}=0\ ,$$

ovvero

$$(n^2_0+\ldots-2n_0n_1-\ldots)^2-64\,n_0n_1n_2n_3=0\ .$$

L'equazione della B in coordinate di punti è

$$b_{xx}\equiv\left[\sum\beta_kx^2_k\right]^3-27\beta_1\beta_2\beta_3x^2_1x^2_2x^2_3=0\ .$$

Digitized by Google

Quanto alle equazioni degli otto assi di C, essa dipenderà da tre equazioni di 2° grado.

Ci asteniamo dal calcolarle; e solo notiamo che i prodotti delle coordinate omonime di due assi coniugati sono proporzionali a $a_1 c_1 (ac)_1$, $a_2 c_2 (ac)_2$, $a_3 c_3 (ac)_3$.

Se a_{xx}, c_{xx} e $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ son date, non nella forma canonica, ma nella forma più generale, si possono esprimere come funzioni intere di a_{xx}, c_{xx}, u_{xx}, a, c, s, s' le a'_{xx}, c'_{xx}, a''_{xx}, b_{xx}, w_{xx}, e come funzioni intere di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$, $\chi_{\xi\xi}$, ... le $\alpha'_{\xi\xi}$, ... Del pari l'equazione delle quattro coppie di assi si può esprimere come funzione intera di 4° grado di a_{xx}, c_{xx}, u_{xx} con cofficienti interi in a, c, s, s'. Ma non intendiamo di ricavare tali espressioni.

Se l'assoluto A degenera in due punti L, L' di o_3, C' diviene una coppia di punti di o_3, A' una coppia di rette per O_3, cioè le polari l, l' di L, L' rispetto a C, ed A'' una coppia di punti di o_3, armonici rispetto a L e L' coi punti lo_3, $l'o_3$. I diametri di C sono allora le rette per O_3, che è il centro, e gli assi sono o_1, o_2.

Ciò è d'accordo col fatto, che per $\alpha_3 = 0$ risulta

$$a'_{xx} = \alpha_1 c^2_1 x^2_1 + \alpha_2 c^2_2 x^2_2\,, \quad \alpha''_{\xi\xi} = \alpha^3_1 c^2_1 \xi^2_1 + \alpha^3_2 c^2_2 \xi^2_2\,,$$

$$\alpha^2_3 \beta_{\xi\xi} = (ac)^2_3 \xi^2_1 \xi^2_2\,.$$

Se invece l'assoluto degenera in due rette l, l' per O_3, A' degenera in due punti di o_3, cioè nei poli L, L' di l, l' rispetto a C, e A'' in due rette per O_3, armoniche rispetto a l, l' con $O_3 L$, $O_3 L'$. I punti L, L' sono allora i centri di C, le rette per L e quelle per L' ne sono i diametri; e vi sono due coppie di assi, cioè $(o_3, O_3 L)$, $(o_3, O_3 L')$.

Ciò è d'accordo col fatto, che per $a_3 = 0$ risulta

$$a_{xx} = a_1 x^2_1 + a_2 x^2_2\,, \quad \alpha'_{\xi\xi} = a_1 \gamma^2_1 \xi^2_1 + a_2 \gamma^2_2 \xi^2_2\,,$$

$$a''_{xx} = a^3 \gamma^2_1 x^2_1 + a^3_2 \gamma^2_2 x^2_2\,, \quad \beta_{\xi\xi} = a^2_1 a^2_2 c^2_3 (a_2 \xi^2_1 + a_1 \xi^2_1)\,,$$

$$w_{xx} = a^2_1 a^2_2 c^2_3 (a_1 x^2_1 + a_2 x^2_2)\,.$$

Torino, 8 Marzo 1891.

Influenza della eccentricità dell'alidada sui vernieri, ed un microscopio ad ingrandimento costante;

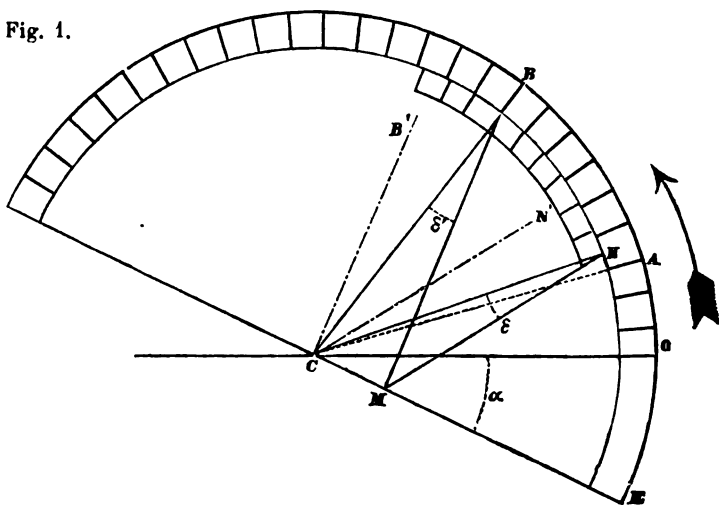
Nota del Prof. NICODEMO JADANZA

I.

Influenza della eccentricità dell'alidada sui vernieri.

Il sig. G. B. MAGNAGHI nel suo libro: *Gli strumenti a riflessione per misurare angoli* ha, per il primo, esaminato la influenza che la eccentricità dell'alidada ha sulla *lettura di un verniero*. Essendo la cosa di molta importanza crediamo non inutile esporne una nuova dimostrazione.

Sia C (fig. 1) il centro del circolo graduato (lembo) di un goniometro qualunque ed M quello dell'alidada; $M\ N$ la posi-

Fig. 1.

zione del raggio dell'alidada che va al punto N che rappresenta lo *zero* del verniero.

Se O è l'origine della graduazione che procede crescendo nel senso della freccia, l'angolo che si legge sul circolo graduato è

$$OCN = OCA + ACN$$

(A è la divisione del lembo che precede immediatamente lo zero del verniero). Ponendo $OCA = \alpha$, sarà:

$$OCN = \alpha + ACN.$$

Il valore del piccolo angolo ACN si ottiene per mezzo del verniero. Indicando con l il valore angolare della più piccola parte del lembo e con n il numero delle parti in cui è diviso il verniero, l'approssimazione di questo è $\frac{l}{n}$; quindi se la k^{ma} divisione del verniero coincide colla corrispondente del lembo in B, si avrà per valore dell'angolo ACN l'espressione

$$ACN = k\,\frac{l}{n}$$

la quale è vera quando non vi è eccentricità.

Nel caso attuale si ha:

$$ACN = ACB - NCB$$

ed

$$NCB = NMB + \varepsilon - \varepsilon'$$

$$(\varepsilon = MNC\,, \quad \varepsilon' = MBC)\,;$$

quindi, osservando che è

$$ACB = k\,l\,, \quad NMB = k\,l'$$

(l' essendo il valore angolare della più piccola parte del verniero). sarà:

$$ACN = k\,(l - l') + \varepsilon' - \varepsilon$$

ovvero, essendo $l - l' = \frac{l}{n}$

$$ACN = \frac{k\,l}{n} + \varepsilon' - \varepsilon$$

Digitized by Google

L'influenza della eccentricità dell'alidada sul verniero sarà dunque espressa dalla quantità:

$$\omega = \varepsilon' - \varepsilon \qquad \ldots\ldots (1).$$

I due triangoli *CNM*, *BCM*, ponendo $CM = e$ ed indicando con r il raggio del circolo graduato, dànno

$$\operatorname{sen} \varepsilon : e = \operatorname{sen} NMC : r$$
$$\operatorname{sen} \varepsilon' : e = \operatorname{sen} BMC : r$$

donde, ponendo $P = NME$, $\lambda = NMB$, si ottiene

$$\varepsilon = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} P$$

$$\varepsilon' = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} (P + \lambda)$$

e quindi $$\omega = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \left[\operatorname{sen} (P + \lambda) - \operatorname{sen} P \right],$$

ovvero $$\omega = \frac{2\,e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda \cos \left(P + \frac{1}{2} \lambda \right) \qquad \ldots (2).$$

Il massimo valore di ω si ottiene quando λ ha il valore dell'ampiezza totale λ_m del verniero e quando $P + \frac{1}{2} \lambda = 2 k \pi$. In tale ipotesi il massimo valore ω_m della *influenza della eccentricità* sul verniero è dato da

$$\omega_m = \frac{2\,e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda_m \qquad \ldots\ldots (3).$$

Nel caso di $\lambda_m = 9^\circ 50'$ come è effettivamente quando il circolo è diviso in *sesti* di grado, supponendo

$$e = 0^{mm}, 01 ; \quad r = 60^{mm}$$

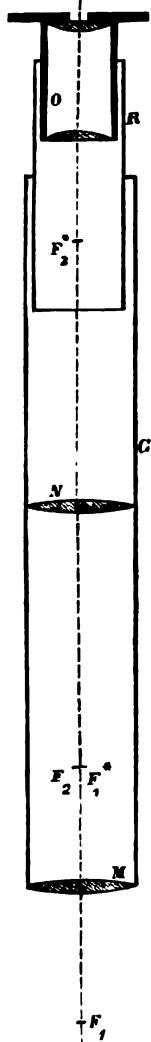
si ottiene $$\omega_m = 5'', 89 .$$

Adunque l'influenza della eccentricità dell'alidada sulle letture dei vernieri non è una quantità trascurabile; e quindi vi è una ragione di più per dare la preferenza ai microscopi, piuttosto che ai vernieri, quando si vogliono leggere circoli graduati.

Digitized by Google

II.

Un microscopio ad ingrandimento costante.

Fig. 2.

La ragione principale per cui molti pratici sono alieni dall'abbandonare il verniero nelle letture dei circoli graduati è che essi credono il microscopio composto un apparecchio molto delicato, e quindi poco adatto per gli strumenti destinati ai lavori topografici pei quali, in generale, non è necessaria una gran precisione. Codesto ha qualche fondamento di vero nei microscopi forniti di vite micrometrica nei quali una variazione nella distanza della lente obbiettiva del microscopio dal circolo graduato produce non solo una variazione nel sito in cui si forma l'immagine, ma anche una variazione nella grandezza di questa. E per coloro che non hanno molta pratica la correzione da fare riesce certamente lunga e noiosa.

A tale inconveniente si può ovviare coll'istrumento che qui presentiamo, cioè col MICROSCOPIO AD INGRANDIMENTO COSTANTE.

Il microscopio ad ingrandimento costante è rappresentato dalla fig. 2ª. L'obbiettivo, invece di essere formato da una sola lente, è un sistema composto di due lenti M ed N e propriamente un *sistema telescopico* (afocale). Indicando con φ_1 la distanza focale della lente M e con φ_2 quella della lente N (le due lenti si suppongono infinitamente sottili), se Δ è la loro distanza, si ha:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \varphi_2 + \varphi_1 \\ \varphi_2 &= k\varphi_1 \qquad (k > 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Essendo l'obbiettivo un sistema composto telescopico, il rapporto tra una dimensione dell'immagine normale all'asse e la corrispondente dimensione dell' oggetto è una quantità costante, qualunque sia la posizione dell'oggetto. L'obbiettivo adunque darà di un

Digitized by Google

oggetto una immagine sempre maggiore di esso, e propriamente sarà:

$$\textit{Immagine} = \text{k.}\ \textit{oggetto} \qquad \ldots. \quad (5).$$

L'oculare O ingrandisce ancora codesta immagine data dall'obbiettivo telescopico e quindi l'ingrandimento totale è anch'esso costante.

È facile vedere che il fuoco anteriore F_1 della lente M ed il fuoco posteriore F_2^* della lente N sono due punti coniugati del sistema telescopico (M, N), quindi se l'oggetto è collocato in F_1, la sua immagine si troverà in F_2^*.

Ad uno spostamento dell'oggetto verso destra o verso sinistra di F_1 corrisponde uno spostamento della immagine verso destra o verso sinistra di F_2^*.

Codesti spostamenti sono legati dalla relazione:

$$\frac{\xi^* - F_2^*}{\xi - F_1} = \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} = k^2 \qquad \ldots.. (6).$$

nella quale ξ, ξ^* sono le ascisse di due punti coniugati (oggetto ed immagine) qualunque riferiti ad una origine arbitraria; F_1, F_2^* sono le ascisse del primo fuoco della lente M e del secondo fuoco della lente N contate dalla medesima origine.

Il tubo R che contiene il reticolo e l'oculare è bene che abbia uno scorrimento abbastanza grande nel tubo C che contiene l'obbiettivo; si avrà così sempre la possibilità di vedere la immagine di un oggetto situato in prossimità del fuoco F_1 (a destra o a sinistra).

La utilità di codesto microscopio risulterà evidente qualora lo s'immagini applicato alla lettura della graduazione dei circoli di un teodolite. Un casuale spostamento nella distanza tra la lente M e la graduazione del circolo non obbliga l'osservatore ad una noiosa rettificazione; sarà sufficiente spostare, per mezzo di una chiavetta, il tubo R per portare il reticolo nel sito dove si trova la immagine.

Torino Febbraio 1891.

Digitized by Google

Sulle velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine;

Nota dell'Ing. Prof. ANGELO BOTTIGLIA

I. **Lavoro raccolto sulle palette di una turbina.** — Qualunque sia il tipo di una turbina e qualunque sia il modo di agire dell'acqua sulle sue palette, il lavoro raccolto su queste si può sempre intendere espresso dal prodotto della pressione esercitata dal liquido sulle palette stesse per la velocità dei punti a cui questa pressione è applicata.

Egli è appunto esprimendo in questo modo il lavoro raccolto sulle palette di una turbina che si può dedurre un'espressione generale, applicabile a qualunque turbina, della velocità di massimo rendimento e stabilire relazioni, utili nella pratica, fra questa velocità e quella a vuoto.

Siano:

V_0 la velocità effettiva colla quale l'acqua effluendo dal distributore viene ad incontrare le palette della motrice,

V_1 la velocità assoluta colla quale l'acqua abbandona le dette palette,

R ed R_1 le distanze dall'asse di rotazione dei centri delle luci d'introduzione e di uscita dell'acqua dalla ruota mobile,

v e v_1 le velocità di rotazione dei punti della turbina situati rispettivamente alle distanze R ed R_1 dall'asse,

u_0 ed u_1 le velocità relative dell'acqua all'ingresso ed all'uscita dai condotti rispetto alle velocità di rotazione v e v_1,

u_p la velocità perduta dall'acqua nell'entrare nei condotti mobili,

p e p_1 le pressioni, misurate in altezza di colonna d'acqua, dell'acqua nelle sezioni d'ingresso e d'uscita dai condotti motori,

h l'altezza delle luci di introduzione sulle luci d'efflusso della ruota girante,

$180^\circ - \beta_0$, $180^\circ - \beta_1$ ed α_0 gli angoli di v con u_0, di v_1 con u_1 e di V_0 con v,

Q i litri d'acqua che per ogni secondo attraversano la turbina,

H la caduta, in metri, dell'acqua,

Digitized by Google

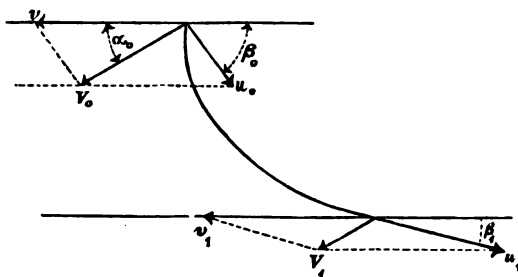
g l'accelerazione dovuta alla gravità,

L il lavoro in chilogrammetri raccolto per ogni secondo sulle palette della turbina,

avremo, trascurando gli attriti, manifestamente:

$$L = Q \left\{ \frac{V_0^2 - V_1^2 - u_p^2}{2g} + p - p_1 + h \right\},$$

ma $V_0^2 = u_0^2 + v^2 - 2 u_0 v \cos\beta_0$, $V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2 u_1 v_1 \cos\beta_1$,

$$p + h + \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = p_1 + \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2 + u_p^2),$$

quindi sostituendo e riducendo

$$L = \frac{Q}{g} \left\{ v^2 - v_1^2 + u_1 v_1 \cos\beta_1 - u_0 v \cos\beta_0 \right\}$$

e per essere

$$u_0 \cos\beta_0 = v - V_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{e} \qquad v_1 = v \frac{R_1}{R}$$

avremo ancora

$$L = \frac{Q}{g} \left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v_1 \frac{R_1}{R} \right\} v \qquad \ldots (1)$$

nella quale relazione il fattore di v rappresenta appunto la pressione totale esercitata dall'acqua sulle palette, riferita ai punti posti alla distanza R dall'asse di rotazione.

Rappresentando con P questa pressione potremo scrivere, in generale per qualunque turbina

$$P = \frac{Q}{g} \left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v_1 \frac{R_1}{R} \right\} \qquad \ldots (2)$$

$$L = P v.$$

Digitized by Google

II. **Velocità di massimo rendimento.** — Dall'equazione (1), la quale dà il lavoro L corrispondente ad una velocità qualunque di rotazione v, si ricava la velocità corrispondente al massimo rendimento, che chiameremo v_m, quando in essa facciamo $L = QH$ ed esprimiamo le condizioni che la velocità perduta u_p e la velocità V_1 siano zero.

Alla condizione $u_p = 0$ si soddisfa facendo il primo elemento della paletta tangente alla direzione di u_0, il che equivale a far dipendere v_m anche da α_0.

Per soddisfare alla condizione $V_1 = 0$ dovrebbesi fare u_1 eguale e direttamente opposta a v_1 e per conseguenza $\beta_1 = 0$. Siccome però β_1 non può mai essere zero qnantunque si possa e si debba fare piccolo assai, così alla condizione di $u_1 = v_1$ dovremo sostituire quella di

$$u_1 \cos\beta_1 = v_1 .$$

Con queste condizioni la (1) diventa

$$QH = \frac{Q}{g} v_m V_0 \cos\alpha_0 ,$$

donde

$$v_m = \frac{gH}{V_0 \cos\alpha_0} \qquad \ldots (3)$$

chè è la relazione fra la velocità del massimo rendimento, la caduta, la velocità e la direzione d'efflusso dell'acqua dal distributore, applicabile a qualsivoglia turbina, sia essa assiale o radiale, a libero efflusso oppure a reazione.

III. **Velocità a vuoto.** — Facendo camminare una turbina a vuoto, cioè senza che essa vinca alcuna resistenza utile, il lavoro raccolto sulle palette deve essere zero; ora non essendo zero la velocità di rotazione, dovrà necessariamente essere nulla la pressione P.

Quindi per questo caso, dicendo v_1 e v'_1 i valori che assumono le velocità v e v_1, in virtù della (2) si avrà

$$\frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v'_1 \frac{R_1}{R} = 0 ,$$

ma facendo alla turbina smaltire a vuoto sempre la portata Q, deve aversi la relazione $u_1 \cos\beta_1 = v_{1m}$, essendo v_{1m} la velocità

Digitized by Google

corrispondente al massimo rendimento dei punti situati alla distanza R_1 dall'asse di rotazione; quindi la relazione precedente diventa

$$\frac{R_1}{R} v_{1m} + V_0 \cos\alpha_0 - v'_1 \frac{R_1}{R} = 0 ,$$

donde

$$v_1 = v_{1m} + \frac{R}{R_1} V_0 \cos\alpha_0 \qquad \ldots (4)$$

che per le turbine assiali nelle quali $R = R_1$, $v_{1m} = v_m$ e $v' = v'_1$ si riduce a

$$v' = v_m + V_0 \cos\alpha_0 . \qquad \ldots (4')$$

La relazione (4) e la sua conseguente (4′), che ci dà la velocità a vuoto in funzione della velocità di massimo rendimento, è generale e vale per qualunque turbina e qualsivoglia valore di α_0, mentre la relazione $v'_1 = 2 v_{1m}$ dedotta da molti autori e seguita fin qui dai pratici, è solo vera nel caso particolare in cui la turbina fosse costrutta per modo che $\frac{R}{R_1} V_0 \cos\alpha_0 = v_{1m}$.

Infatti all'eguaglianza $v'_1 = 2 v_{1m}$ si arriva col differenziare la (1) rispetto a v e supponendo $V_0 \cos\alpha_0$ costante. Questa ipotesi di $V_0 \cos\alpha_0$ costante, unita alla condizione di non avere perdita di forza viva all'ingresso dell'acqua nei condotti, trae appunto con sè la conseguenza che sia $V_0 \cos\alpha_0 = v_m$ per le turbine assiali e $\frac{R}{R_1} V_0 \cos\alpha_0 = v_{1m}$ per le turbine cilindriche nelle quali havvi a tener calcolo della forza centrifuga.

IV. **Relazioni fra la velocità di massimo rendimento e la velocità a vuoto.** — Per le turbine assiali, cioè elicoidali, dalla (4′) si ricava che sempre quando:

$$\left.\begin{array}{llll} V_0 \cos\alpha_0 > v_m & \text{ossia} & 180^\circ - \beta_0 < 90^\circ & \text{sarà} \quad v_m < \frac{v'}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 = v_m & \text{»} & 180^\circ - \beta_0 = 90^\circ & \text{»} \quad v_m = \frac{v'}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 < v_m & \text{»} & 180^\circ - \beta_0 > 90^\circ & \text{»} \quad v_m > \frac{v'}{2} \end{array}\right\} \ldots (5)$$

Digitized by Google

dunque:

Nelle turbine elicoidali la velocità del massimo rendimento teorico: — è inferiore alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano dal piano delle luci di introduzione, facendo, colla velocità di rotazione, un angolo inferiore a 90°, — è uguale alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano in direzione normale al piano delle luci di introduzione, — è superiore alla metà della velocità a vuoto quando l'indicato angolo è superiore a 90°.

Per le turbine cilindriche dalla (4) si ritrae che se:

$$\left.\begin{array}{lllll} V_0 \cos\alpha_0 > \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{ossia} & V_0 \cos\alpha_0 > v_m\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{sarà} & v_{1m} < \frac{v'_1}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 = \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{»} & V_0 \cos\alpha_0 = v_m\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{»} & v_{1m} = \frac{v'_1}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 < \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{»} & V_0 \cos\alpha_0 < v_m\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{»} & v_{1m} > \frac{v'_1}{2} \end{array}\right\} \quad (5')$$

ossia osservando che sempre $\frac{R_1}{R}$ è maggiore di 1 e minore di 1,20, diremo che: quando $V_0 \cos\alpha_0 \gtreqless v_m$ ossia $180° - \beta_0 \gtreqless 90°$ sarà $v_{1m} > \frac{v'_1}{2}$, — quando $180° - \beta_0$ è inferiore ma di poco a 90° sarà $v_{1m} = \frac{v'_1}{2}$, — quando $180° - \beta_0$ è molto al disotto di 90° sarà $v_{1m} < \frac{v'_1}{2}$. Dunque:

Nelle turbine cilindriche la velocità del massimo rendimento teorico: — è superiore alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano dalla superficie cilindrica, sulla quale si trovano le luci d'introduzione, facendo colla velocità di rotazione un angolo uguale o superiore a 90°, — è uguale alla metà della velocità a vuoto quando quest'angolo è poco inferiore a 90°, — è inferiore alla metà della velocità a vuoto quando il detto angolo è molto inferiore a 90°.

Ma oltre alle precedenti relazioni, altre si possono ricavare tenendo conto del sistema della turbina, della caduta e della portata.

Digitized by Google

Cominciamo a considerare le turbine elicoidali.

Essendo in generale $V_0 = \delta \sqrt{2gH}$ in cui $\delta < 1$, e ricordando la (3), le (5) si possono porre sotto la forma

$$\left.\begin{array}{lll} v_m < \frac{v'}{2} & \text{quando} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 > 1 \\ v_m = \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1 \\ v_m > \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1 \end{array}\right\} \quad \ldots (6).$$

Ora per le turbine a libero efflusso $\delta \lesseqgtr 0,81$ perciò la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1$ per $\delta = 0,81$ ci darà $\alpha_0 = 29^\circ\,30'$, e per conseguenza qualsiasi valore di $\alpha_0 < 29^\circ\,30'$ renderà $2\delta^2\cos^2\alpha_0 > 1$ mentre i valori di $\alpha_0 > 30^\circ$ renderanno $2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1$.

Ma $\alpha_0 = 30^\circ$ corrisponde alle portate e cadute medie (cioè ad $H > 3^m$ e $< 5^m$, ed a $Q > 600$ e < 3000), $\alpha_0 < 30^\circ$ alle piccole portate con grandi e medie cadute, $\alpha_0 > 30^\circ$ alle grandi portate con piccole cadute, perciò si deduce:

Nelle turbine elicoidali ad azione la velocità di massimo rendimento: — è inferiore alla metà della velocità a vuoto per le grandi e medie cadute con piccole portate, — è uguale alla metà della velocità a vuoto per le medie portate e medie cadute, — è superiore alla metà della velocità a vuoto per le grandi portate e piccole cadute.

Per le turbine a reazione, δ può assumere a seconda del grado di reazione valori diversi ma sempre inferiori a 0,81.

Supponendo la turbina costruita colle regole di Jonval, cioè $V_0 = \sqrt{gH}$ e quindi $\delta^2 = \frac{1}{2}$, le (6) diventano:

$$\left.\begin{array}{lll} v_m < \frac{v'}{2} & \text{quando} & \cos\alpha_0 > 1 \\ v_m = \frac{v'}{2} & \text{»} & \cos\alpha_0 = 1 \\ v_m > \frac{v'}{2} & \text{»} & \cos\alpha_0 < 1 \end{array}\right\}$$

Digitized by Google

e siccome $\cos\alpha_0$ non può mai essere superiore ad 1 e per altra parte le scritte disuguaglianze si verificherebbero *a fortiori* per $\delta^2 < \frac{1}{2}$, così stabiliremo che:

Nelle turbine elicoidali a reazione costruite con un grado di reazione eguale o superiore a quello suggerito da Jonval, cioè facendo $V_0 \gtreqless 0{,}71\sqrt{2gH}$, *la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto.*

Per le turbine aventi un grado di reazione minore di quelle Jonval, cioè per δ compreso fra 0,71 e 0,81, si deduce dall'eguaglianza $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1$ che sempre quando $\alpha_0 \lesseqgtr 30^\circ$ deve essere $\delta \lesseqgtr 0{,}81$. Ma volendo la turbina a reazione occorre che sia $\delta < 0{,}81$, quindi diremo che per queste turbine e per $\alpha_0 \lesseqgtr 30^\circ$ sarà necessariamente $2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1$ e quindi $v_m > \frac{v'}{2}$, dunque:

Nelle turbine elicoidali a reazione costruite con un grado di reazione minore di quello proposto da Jonval, la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto per le piccole cadute con medie e grandi portate.

Veniamo alle turbine cilindriche.

Anche qui, per essere $V_0 = \delta\sqrt{2gH}$ e $v_m = \frac{gH}{V_0\cos\alpha_0}$, le (5') si trasformano nelle seguenti:

$$\left.\begin{array}{llll} v_{1m} < \frac{v'_1}{2} & \text{ossia}\quad v_m < \frac{v'}{2} & \text{quando} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 > \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \\ v_{1m} = \frac{v'_1}{2} & \text{»}\quad v_m = \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \\ v_{1m} > \frac{v'_1}{2} & \text{»}\quad v_m > \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 < \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \end{array}\right\} \dots (6').$$

Se la turbina cilindrica è a libero efflusso, $\delta \lesseqgtr 0{,}81$, $\frac{R_1}{R} \lesseqgtr 1{,}10$, quindi la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ per $\delta = 0{,}81$

Digitized by Google

ed $\frac{R_1}{R}=1{,}10$ ci somministra $\alpha_0=15°$. Ma in queste turbine α_0 è sempre maggiore di $15°$, $\frac{R_1}{R}$ è sempre maggiore di 1,10, quindi si avrà sempre:

$$2\delta^2 \cos^2\alpha_0 < \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \quad \text{ossia} \quad v_m > \frac{v'}{2} ;$$

in conseguenza:

Nelle turbine cilindriche ad azione la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto, qualunque siano la portata e la caduta.

Se la turbina è a reazione e se $V=\sqrt{gH}$ cioè $\delta^2=\frac{1}{2}$, le (6') danno

$$v_m < \frac{v'}{2} \quad \text{quando} \quad \cos\alpha_0 > \frac{R_1}{R}$$

$$v_m = \frac{v'}{2} \quad » \quad \cos\alpha_0 = \frac{R_1}{R}$$

$$v_m > \frac{v'}{2} \quad » \quad \cos\alpha_0 < \frac{R_1}{R}$$

dalle quali, per essere $\frac{R_1}{R}>1$ si deduce che sempre $v_m>\frac{v'}{2}$ quando $\delta^2 \gtreqless \frac{1}{2}$; dunque:

Nelle turbine cilindriche costruite con un grado di reazione eguale o superiore a quello suggerito da Jonval, la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto.

Se pur conservando la turbina a reazione si fa δ compreso fra 0,71 e 0,81, allora siccome la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0=\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ per $\delta=0{,}81$ ed $\frac{R_1}{R}=1{,}10$ ci dà $\alpha_0=15°$, così diremo che a

Digitized by Google

$\delta < 0,81$ deve corrispondere $\alpha_0 < 15°$: ma α_0 non scende mai al disotto di 15°, quindi ne risulta che in generale si avrà sempre $2\,\delta^2 \cos^2 \alpha_0 < \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ ossia $v_m > \frac{v'}{2}$, cioè:

Nelle turbine cilindriche a reazione la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto, qualunque sia il loro grado di reazione.

Stabilite le precedenti relazioni, occorre provvederci un'espressione la quale somministri la velocità del massimo rendimento in funzione della velocità a vuoto e della caduta.

Perciò ricorriamo alla (4) e sostituiamo in essa a $V_0 \cos \alpha_0$ il valore $\frac{gH}{v_m}$ che si ricava dalla (3), avremo:

$$v'_1 = v_{1m} + \frac{R}{R_1} \frac{gH}{v_m}$$

ossia

$$v'_1 = v_{1m} + \frac{gH}{v_{1m}}$$

donde

$$v_{1m} = \frac{v'_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v'_1}{2}\right)^2 - gH} \qquad \dots (7)$$

che è la relazione cercata. — Si assumerà in essa il radicale col segno + oppure col segno — secondochè dall'applicazione delle regole sovra stabilite risulta $v_{1m} > \frac{v'_1}{2}$ oppure $v_{1m} < \frac{v'_1}{2}$.

La (7) fa anche vedere che il minimo valore della velocità a vuoto di una turbina è quello corrispondente alla velocità dovuta al doppio della caduta ($v'^2_1 = 4gH$) a cui la turbina è applicata, *ed è solo quando la velocità a vuoto raggiunge questo minimo che essa è doppia della velocità di massimo rendimento.*

Le regole precedenti e la (7) sono particolarmente utili quando nelle operazioni di collaudo devesi determinare il rendimento massimo di una turbina. -- Invero esaminata la struttura delle palette, misurati i raggi della turbina e la caduta, determinati i giri a vuoto, si ricava colla (7) la velocità di massimo

Digitized by Google

rendimento ed allora l'operatore conosce tosto a quale velocità deve frenare la turbina per ottenere dalla medesima il massimo effetto utile.

Anzi, occorrendo, si può mercè la conoscenza delle velocità a vuoto e di massimo rendimento, dei raggi e della portata, determinare il lavoro massimo della turbina senza ricorrere alle prove col freno. - Diffatti chiamando L_m questo lavoro massimo e conservando le notazioni precedenti, la (1) ci dà

$$L_m = \frac{Q}{g}\left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - \frac{R_1}{R} v_{1m} \right\} v_m$$

ossia per essere $u_1 \cos\beta_1 = v_{1m}$

$$L_m = \frac{Q}{g} V_0 \cos\alpha_0 v$$

Tutto quanto venne sovra dedotto è vero quando si trascurino le resistenze passive degli attriti.

Inoltre per poter applicare le suesposte conclusioni si debbono condurre le esperienze in modo da mantenere costante non solo la portata ma eziandio la caduta.

Torino, marzo 1891.

Digitized by Google

Contributo alla fisiologia degli epitelii.

Della struttura dell'epitelio vaginale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza;

del Dott. IGNAZIO SALVIOLI

Nell'anno 1889 Morau (1) pubblicò una serie di ricerche intorno alle modificazioni che subisce l'epitelio della vagina di alcuni roditori durante il ciclo genitale. Egli a questo scopo esaminò un numero assai grande di femmine del *mus musculus*, e vide che l'epitelio della vagina di questo animale in tale periodo, da pavimentoso stratificato come è normalmente, si trasforma a poco a poco in cilindrico pure stratificato, e che le cellule cilindriche neoformate, ad un certo periodo, subiscono una degenerazione mucosa, la quale, secondo Morau, servirebbe ad adattare l'organo alla nuova funzione a cui è destinato. Per quello che riguarda gli altri roditori egli dedica poche righe, limitandosi solo a dire che anche in questi si verifica lo stesso fatto.

L'importanza di tale fenomeno, ed il fatto che io avevo a mia disposizione un materiale assai abbondante, mi hanno indotto a ripetere queste osservazioni sul coniglio; e ciò ho fatto tanto più volentieri, perchè desideravo anche darmi una ragione del perchè tutti gli osservatori, che hanno esaminati gli organi genitali esterni della coniglia, sieno caduti in così aperte contraddizioni. Anche recentemente due ricercatori, Luzi e Barbacci, hanno descritto l'epitelio della vagina del coniglio in modo affatto diverso. Infatti Luzi ritiene che tale epitelio appartenga al tipo dei cilindrici semplici, mentre Barbacci sostiene che esso è un epitelio pavimentoso stratificato.

(1) MORAU, *Transformations épithéliales de la muqueuse du vagin de quelques rongeurs*, Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, T. 25, A. 1889.

Digitized by Google

Vedremo, nel corso di queste mie osservazioni, come tali divergenze non dipendano altro che da un diverso modo di interpretazione, e come questa diversità di interpretazione dipenda dalla conformazione speciale che assume il condotto genitale esterno nelle coniglie.

Per queste considerazioni io dividerò il mio lavoro in due parti: una riguardante la struttura anatomica del condotto genitale esterno della coniglia, e l'altra riguardante le modificazioni che avvengono in una porzione di esso durante la gravidanza.

L'unico lavoro dove si trovino descritti un po' minutamente gli organi genitali esterni della coniglia è quello di Arloing (1). Questo Autore distingue in essi una cavità vulvare ed una cavità vaginale, separate solo da una valvola mucosa, che egli ritiene analoga all' imene. Questo suo studio è puramente anatomico, quindi non ci illumina menomamente sulla struttura, e sul rivestimento epiteliale di queste parti, cose tutte che invece sono indispensabili a conoscersi, onde farci un' idea chiara del loro significato anatomico. Anche il Cheaveau (2), nel suo trattato di anatomia degli animali domestici, condivide le idee dell'Arloing, descrivendo una vulva ed una vagina ben distinte fra di loro.

Le conclusioni a cui sono arrivato io, se nel complesso sono assai somiglianti a quelle ottenute dagli osservatori predetti, variano però da esse in alcuni particolari.

Se in una coniglia si esportano tutti gli organi genitali dopo averli bene separati dai tessuti circostanti, si vede, che tra il punto in cui si riuniscono i due corni uterini e l'orifizio vulvare esterno, esiste un canale, il quale, osservato anche solo dall'esterno si può dividere in due parti bene differenziabili l'una dall'altra. La prima che alcuni denominano vulva, ma che io mi limiterò a chiamare *distale*, o, per maggior chiarezza, *segmento vulvare*, è lunga 6 ad 8 cm. secondo la razza delle coniglie. Questo tratto

(1) Arloing, *Études comparatives sur les organes génitaux du lièvre, du lapin et du léporide.* Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, T. V, A. 1868.

(2) Cheaveau, *Anatomia comparata degli animali domestici,* 1888.

Digitized by Google

di condotto, a causa della retrazione forte delle pareti che lo costituiscono, appare sotto la forma di un cilindro rotondo assai sottile, e sta in rapporto inferiormente e per la sua porzione più avanzata colla sinfisi del pube, mentre pel rimanente fino all'orifizio esterno vulvare è solo ricoperta da strati muscolari e dalla pelle. Colla sua parete superiore invece esso è aderente col retto assai strettamente nei suoi $^2/_3$ *posteriori*, più lassamente nel $^1/_3$ rimanente. Se si incide longitudinalmente il segmento vulvare si scopre una mucosa di aspetto lucente, di colorito rosso cupo; e questo le viene impartito da numerosi vasi sanguigni, i più grossi dei quali sono visibili anche ad occhio nudo, e che si trovano nel connettivo subito al disotto dell'epitelio. Tale connettivo è assai lasso, e ciò sta in relazione colla grande dilatabilità del condotto stesso: tale struttura permette quindi di potere con grande facilità spostare in qualunque direzione la mucosa.

Il segmento *prossimale* che Arloing e Cheaveau chiamano vagina, ma che io per molte ragioni, fra le quali, in primo luogo, la sua forma e struttura, ritengo più conveniente denominare *segmento uterino*, ha una forma di fettuccia larga quasi 2 cm. e grossa 4 mm. Tale disposizione dipende dal fatto che le sue pareti sono costituite in modo che esse non possono raggrinzarsi come nel segmento vulvare, ma sono più rigide, e quindi devono combaciare fra di loro applicando una metà della loro superficie interna contro l'altra. Questo fatto dimostra già una differenza assai spiccata fra la struttura delle pareti dei due segmenti. Il segmento uterino si trova libero nella cavità del bacino ed ha una lunghezza di 8 cm. Inferiormente sta in rapporto colla vescica, superiormente è rivestito dal peritoneo, e contribuisce a limitare la cavità del Douglas. Le sue pareti sono assai grosse (mm. 1,6), e nel suo spessore si notano due canali di Gärtner. Incise le pareti, si vede che la mucosa che riveste internamente questo canale ha un aspetto lucente, un colorito madreperlaceo, ed è percorsa longitudinalmente da numerose pieghe assai fine. La mucosa è intimamente adesa agli strati sottostanti. Nella sua parte più alta questo condotto abbraccia i due musi di tinca dei corni uterini.

Come ho già accennato prima, fra i due segmenti esistono delle differenze di forma assai spiccate; dirò ancora che non esiste un graduale passaggio dall'uno all'altro, ma bensì assai bruscamente l'un segmento passa nell'altro. Aggiungerò ancora che

Digitized by Google

nel segmento uterino, appena esportato dal corpo, si notano delle contrazioni delle pareti, contrazioni che mancano completamente nel segmento vulvare.

Questo è quanto si ricava dall'esame fatto colla semplice dissecazione dell'organo allo stato fresco. Questo metodo non può però dare un'idea esatta della disposizione, e dei rapporti in cui stanno fra di loro i due segmenti. Ho perciò pensato di studiarli dopo averli fissati nella loro vera posizione. A questo scopo ho iniettato attraverso all'orificio vulvare esterno per mezzo di una siringa dell'alcool comune, poi, quando avevo bene disteso le pareti, passavo un laccio all'intorno del segmento vulvare in vicinanza del suo orificio esterno e stringevo: levavo quindi dal corpo dell'animale tutto l'apparato genitale, e lo immergevo in alcool: in tal modo dopo pochi giorni avevo queste parti indurite, e quindi pronte per lo studio. Se allora si incidono i due segmenti longitudinalmente sulla linea mediana, si vedono le seguenti particolarità.

Il segmento vulvare (Fig. 1ª *a*) ha la forma di un tubo cilindrico, del diametro di 14 mm, il quale termina da una parte coll'apertura vulvare, e dall'altra presenta una specie di fondo cieco un po' schiacciato dall'alto al basso, alla cui sommità si trova l'apertura del canale dell'uretra. Questa (Fig. 1° *d*), che è lunga appena 1 cm., sta quasi in linea retta coll'asse del segmento vulvare, in modo che appare che l'una non sia altro che la diretta continuazione dell'altro. Questa particolarità di struttura anatomica fu già rilevata da Otto e Carus, che la descrissero nelle tavole di anatomia comparata. La parete superiore del segmento vulvare non è continua in tutta la sua estensione, ma alla distanza di circa 12 mm. dallo sbocco dell'uretra presenta una apertura a forma elissoide (Fig. 1ª *c*), il cui diametro trasverso misura 10 mm., mentre l'altro ne misura soli 5 mm. Tale apertura serve a mettere in comunicazione il segmento vulvare col segmento uterino. Il breve tratto di parete che è compreso tra lo sbocco dell'uretra e tale apertura fu ritenuto da Arloing come una semplice valvola, prodotta da una ripiegatura della mucosa. Io però non credo esatta tale opinione, giacchè il supporre che questa sia una ripiegatura analoga all'imene, fa di necessità ammettere una diretta continuazione fra il segmento vulvare e l'uterino, fatto che io non ho potuto constatare. Infatti il segmento uterino (Fig. 1ª *b*) si unisce all'altro con un angolo ap-

Digitized by Google

prossimativo di 135° gradi. Esso non ha un andamento rettilineo, ma bensì descrive una leggera curva con concavità in basso: ha una forma di tubo cilindrico, con un diametro molto più ampio del precedente (19 mm.), non però in tutta la sua estensione, giacchè nel punto d'inserzione col segmento vulvare esso si restringe leggermente. Infine le sue pareti sono assai più grosse, e più resistenti di quelle del segmento vulvare.

In quanto alla struttura istologica di queste parti, e specialmente riguardo al loro rivestimento epiteliale, ecco quanto è risultato dalle mie osservazioni. Nelle coniglie adulte, in cui però gli organi genitali sieno in completo riposo funzionale, il segmento vulvare è tappezzato da un epitelio evidentemente pavimentoso (Fig. 4), dello spessore di circa 45 μ, composto di 4 o 5 strati di cellule, delle quali le più profonde hanno una forma ovale, e sono disposte col loro diametro lungo perpendicolarmente alla superficie d'impianto: tale disposizione è assai spiccata nei punti dove l'epitelio si infossa leggermente nel connettivo sottostante. Queste cellule profonde sono assai stipate fra di loro, posseggono un nucleo ovale molto ricco in cromatina, ed hanno scarso protoplasma. Gli strati mediani sono composti di cellule più grosse, di forma irregolarmente poligonale, hanno nuclei rotondi più grossi e più chiari, il protoplasma pure è più chiaro e presenta dei vacuoli. Le cellule superficiali sono più appiattite delle precedenti, non mai però lamelliformi; il loro protoplasma è chiaro e granuloso, e sono fornite di un nucleo ben conservato e bene colorabile.

Non tutte le cellule dello strato superficiale hanno i caratteri descritti or ora; bensì ve ne sono alcune, sparse irregolarmente in tutta la superficie della mucosa, le quali sono più grosse, ed altre le quali hanno acquistato una forma leggermente piramidale, colla punta in basso fra le cellule degli strati sottostanti. Queste cellule piramidali spiccano bene fra le altre, perchè il loro protoplasma è più scuro, ed il loro nucleo, che si trova spinto nella parte ristretta del corpo cellulare, è colorato più intensamente ed uniformemente.

Le cellule superficiali allungate o a forma di piramide aumentano molto verso il fondo cieco del segmento vulvare, in prossimità cioè dello sbocco dell'uretra. In questo punto l'epitelio è più basso (Fig. 5ª), e si compone di soli 3 strati di cellule. I due strati profondi sono formati da cellule rotondeggianti,

Digitized by Google

le superficiali invece sono assai allungate, di forma irregolarmente cilindrica o piramidale, ed in molte di esse il bordo esterno è assai ampio e svasato, in modo che possono ricoprire le cellule sottostanti o riunendosi fra di loro limitare delle piccole cavità. Tali cellule non sono un prodotto artificiale, perchè esse si notano tanto nei pezzi di mucosa che furono distesi, quanto in quelli in cui la mucosa è raggrinzata.

Come ultima particolarità dell'epitelio che tappezza il segmento vulvare aggiungerò che, fra le sue cellule si notano le ciglia o spine descritte per la prima volta da Bizzozero (1) nell'epidermide e negli epitelii pavimentosi stratificati, fatto che Morau dice di non avere riscontrato nelle cellule della mucosa vaginale del *mus musculus*. Al disotto dell'epitelio si nota un grosso strato di connettivo con numerosi spazi venosi che danno l'idea di un corpo cavernoso. In ultimo vi sono numerosi strati di fibre muscolari striate.

Appena si entra nel segmento uterino, l'epitelio si modifica rapidamente, giacchè esso diventa cilindrico semplice (Fig. 6ª) e così si mantiene in tutta l'estensione del segmento stesso. Le cellule che compongono questo epitelio sono, come facilmente si può comprendere, cilindriche, lunghe 36 μ, e larghe 4-5 μ, hanno un piccolo nucleo ovale posto verso la base d'impianto della cellula, e contengono un protoplasma granuloso opaco, il quale alla superficie libera non è limitato da una membrana, ma bensì termina con un contorno indeciso.

Il connettivo che sostiene tale epitelio è poco alto, ma più compatto di quello che si trova nel segmento vulvare, ed in esso non esistono delle formazioni glandolari. Il resto della parete è costituito da grossi strati di fibre muscolari liscie.

Dalla brevissima esposizione fatta risulta, che fra i due segmenti esistono delle differenze assai spiccate, sia per la loro disposizione e forma, sia pel loro rivestimento epiteliale. Questa diversità di caratteri potrebbe già da sè sola condurre ad una ipotesi abbastanza fondata sul significato anatomico di tali parti, giacchè il segmento uterino ha molti caratteri che lo differenziano dalla vagina tipica degli altri mammiferi; però, per dire una cosa sicura, è necessario conoscere il modo con cui esse si

---

(1) Bizzozero, *Sulla struttura degli epitelii pavimentosi stratificati.* Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, 1870.

sviluppano. Quindi aspettando di avere fatto delle indagini metodiche a questo riguardo, mi limiterò per ora ad accennare che le divergenze che si sono notate nei diversi Autori dipendono solo da una diversità di apprezzamento, e per non accennare che ai due più recenti osservatori, dirò che Luzi ha descritto come vagina, quella parte che io ho creduto più conveniente chiamare segmento uterino, e Barbacci invece quella che ho denominato segmento vulvare. Le loro osservazioni furono però precise ed esatte. Resta a vedere quale dei due abbia meglio colpito nel segno, e ciò spero di potere presto dimostrare colle osservazioni embriologiche

Nel capitolo precedente, accennando alla struttura anatomica dei due segmenti in cui si divide tutto il condotto genitale esterno, ho anche detto quale fosse il loro rivestimento epiteliale. Questo però negli individui giovani non ha gli stessi caratteri come nell'animale adulto; perciò prima di trattare delle modificazioni che subisce l'epitelio del segmento vulvare durante la gravidanza, dirò qualche cosa delle variazioni morfologiche che subisce questo epitelio durante l'accrescimento dell'animale.

Avanti tutto mi preme far notare, a scanso di equivoci, come Morau dica che le trasformazioni epiteliali si manifestino nella vagina. Ora, stando alla maggioranza degli Autori, la vagina del coniglio corrisponderebbe alla parte a cui io ho dato il nome di segmento uterino. Or bene, io ho potuto constatare che in tale porzione l'epitelio si mantiene sempre cilindrico, mentre invece è l'epitelio del segmento vulvare quello che si trasforma gradatamente in cilindrico. Come si vede quindi, qui pure esiste la stessa diversità di opinione che vi è tra Luzi e Barbacci.

Ho esaminato gli organi genitali di buon numero di coniglie in diversi periodi di gestazione e quindi ho potuto studiare tutte le diverse fasi delle trasformazioni subìte dall'epitelio. Qui però, volendo essere breve, descriverò solo quei casi in cui le modificazioni sono più spiccate.

Non descriverò i metodi d'indagine; mi basta il dire che ho usato tutte le precauzioni possibili onde mantenere l'epitelio nella sua posizione normale, indurendo la mucosa dopo averla moderatamente tesa.

Le mie prime osservazioni furono fatte su una coniglia di 4 giorni di vita extrauterina. In tale animale il segmento vulvare è tappezzato da un epitelio pavimentoso assai caratteristico,

Digitized by Google

composto di 3 strati di cellule (fig. 2) le quali formano uno spessore di 25 μ. Le cellule che compongono i due strati più profondi hanno una forma ovale, misurano $4,7 \times 5,9\ \mu$, sono fornite di un nucleo rotondo molto tingibile che occupa quasi tutto il corpo cellulare.

Lo strato superficiale invece è fatto di cellule di forma quadrata o rettangolare, del diametro di $11,5 \times 16,6\ \mu$; sono disposte in uno strato solo col loro diametro più lungo parallelo all'asse della cavità. Hanno una membrana evidente, il loro protoplasma è chiaro, finamente granuloso, non colorabile, molto analogo a quello delle cellule che tappezzano la vulva della cavia, e nel loro centro sta un nucleo assai piccolo in confronto alla cellula ($5 \times 7\ \mu$), e meno colorabile degli altri. Questo epitelio mantiene tale forma in quasi tutta la superficie della cavità vulvare; solo verso lo sbocco dell'uretra si vede che le cellule superficiali si fanno più allungate nel diametro perpendicolare alla superficie, e tendono ad assumere una forma leggermente cilindrica.

Nella coniglia di 4 mesi di età, e che non aveva mai subito il coito, l'epitelio del segmento vulvare è assai modificato. Esso (fig. 3) ha uno spessore di 21 μ, ed è formato da tre strati di cellule, le quali, tanto nello strato superficiale che nel mediano e profondo, hanno una forma irregolarmente poliedrica e sono assai schiacciate. La sola differenza che esiste fra le cellule dei diversi strati sta nella grandezza, giacchè le profonde sono più piccole e più schiacciate delle altre, misurano $7 \times 3,8\ \mu$, hanno un nucleo ovale del diametro di $4,5 \times 3\ \mu$. Le cellule dello strato mediano sono più grosse e contengono pure un nucleo più grosso. Infine le cellule superficiali misurano $10 \times 8\ \mu$, con un nucleo rotondo od ovale di circa 7 μ di diametro, e contengono protoplasma granuloso e chiaro.

Ho già descritto nel capitolo precedente la struttura dell'epitelio del segmento vulvare nella coniglia adulta, i cui organi genitali sieno in riposo. Mi limiterò solo a ricordare che esso è costituito (Fig. 4) da 4 o 5 strati di cellule, di cui le profonde sono ovali o rotonde e piccole, quelle di mezzo poliedriche, e le superficiali più schiacciate, e di queste alcune hanno una forma piramidale. Ricorderò ancora come in vicinanza dello sbocco dell'uretra, le cellule superficiali sieno quasi tutte cilindriche o piramidali. Or bene una struttura del tutto analoga si osserva anche nella coniglia appena gravida.

Digitized by Google

Invece se noi esaminiamo il segmento vulvare di una coniglia giunta al 18° giorno di gravidanza riscontriamo già delle modificazioni assai evidenti, specialmente nella sua parte anteriore. Infatti, in vicinanza all'orifizio vulvare esterno l'epitelio si mantiene ancora pavimentoso come nella coniglia normale; invece quanto più ci avviciniamo verso il fondo cieco vediamo che l'epitelio non variando di spessore, giacchè esso si mantiene di 48 μ, è però formato da soli 3 strati di cellule, di cui (figura 7) le superficiali sono evidentemente cilindriche. Queste sono lunghe 20 μ e larghe 6,5 μ; sono fornite di prolungamenti sottili che molte volte si approfondano fra gli strati di cellule sottostanti, in modo da arrivare sino al connettivo basale; sono fornite di protoplasma granuloso ed opaco, e contengono un nucleo ovale posto alla metà del loro corpo. Le cellule degli strati profondi invece sono assai più piccole e rotondeggianti, e contengono un nucleo grosso molto colorabile. Queste particolarità di struttura si vedono ancora meglio, quando si isolino gli elementi cellulari macerando la mucosa nel liquido di Müller allungato: allora si scorgono fra delle cellule poliedriche delle altre di forma piramidale lunghe 31 μ e larghe 12 μ, le quali sono fornite di un lungo prolungamento. Verso lo sbocco dell'uretra l'epitelio si fa più sottile (figura 8), poichè è composto di soli 2 strati, uno di cellule allungate e cilindriche, e l'inferiore di cellule piccole e rotonde.

Al 21° giorno di gravidanza tutta la mucosa del segmento vulvare è ricoperta da un epitelio cilindrico stratificato, analogo a quello descritto or ora e disegnato nella figura 7ª.

A questo punto quindi tutto l'epitelio ha subìto la trasformazione da pavimentoso in cilindrico. Tale forma però non è duratura, bensì si ha una graduale involuzione del processo, e l'epitelio torna di nuovo al tipo pavimentoso. Infatti nella coniglia gravida di feti quasi a termine, il segmento vulvare in prossimità del suo orifizio esterno è formato da 4 strati di cellule, le quali tutte insieme misurano uno spessore di 45 a 50 μ (fig. 9). Le cellule superficiali sono molto schiacciate, quasi lamellari, e molto oscure. Le cellule degli strati mediani sono poliedriche, più chiare con un nucleo vescicolare rotondeggiante od allungato: le cellule profonde sono rotonde, presentano nel loro protoplasma dei grossi vacuoli, i quali si trovano in vicinanza del nucleo, e questo è grosso, di forma irregolare, ed assai colorato.

Digitized by Google

Progredendo verso la metà del condotto, invece, si vede che l'epitelio mantiene ancora lo stesso spessore, ed è formato da un numero uguale di strati cellulari; solo le cellule superficiali che sono ancora oscure (fig. 10), hanno assunto una forma poliedrica o rettangolare: contengono un nucleo ben distinto, e fra queste alcune hanno ancora una forma allungata, ed allora sono più chiare. Verso la metà del segmento vulvare le cellule superficiali (fig. 11) hanno una forma sempre più cilindrica. Infine in vicinanza allo sbocco dell'uretra le cellule superficiali sono perfettamente cilindriche (fig. 12), mentre le cellule degli strati sottostanti sono ancora assai grosse e granulose, e fornite di piccole ciglia, e l'epitelio ha un aspetto del tutto simile a quello che si osserva nella coniglia al 18° e 21° giorno di gravidanza.

Se, per ultimo, noi esaminiamo il condotto di una coniglia che abbia appena partorito. allora vediamo che il suo epitelio si è fatto molto grosso, è costituito da 5 o 6 strati di cellule, di cui le più profonde sono ovali, col diametro lungo perpendicolare alla superficie d'impianto, mentre le altre sono poliedriche per reciproca pressione, e più chiare delle precedenti: tale epitelio insomma ha tutti i caratteri di un vero epitelio pavimentoso stratificato (fig. 13).

Ho già detto come le conclusioni a cui ero arrivato fossero in alcune parti assai diverse da quelle di Morau. Infatti, questo Autore non accenna menomamente alle modalità di struttura che l'epitelio del segmento vulvare presenta nelle diverse porzioni, e così pure, parlando della trasformazione epiteliale, non dice se essa avvenga prima in una parte che in un'altra. Io invece nel coniglio ho potuto riscontrare che anche nell'animale normale l'epitelio del segmento vulvare presenta in vicinanza dello sbocco dell'uretra una struttura diversa da tutto il resto della mucosa, ed ho pure potuto dimostrare che la trasformazione in epitelio cilindrico comincia appunto in vicinanza dello sbocco dell'uretra, e si propaga gradatamente in basso fino verso all'orificio vulvare esterno.

Inoltre il Morau ritiene che le prime a trasformarsi in cellule cilindriche sieno nel *mus musculus* le profonde, e che le cellule superficiali sieno cellule destinate a produrre del muco. Invece in nessun punto della mucosa, anche là dove la trasformazione era appena incominciata, non ho mai potuto vedere le cellule degli strati sottostanti assumere una forma ovale, come

Digitized by Google

pure non ho mai riscontrato le cellule cilindriche superficiali contenere del muco, ma sempre queste cellule sono fornite di un protoplasma granuloso ed opaco. Infine Morau sostiene che, quando il coito fu fecondatore, l'epitelio cilindrico neoformato persiste fino all'epoca del parto, mentre invece se l'animale non fu fecondato, allora verso il 13° giorno del ciclo genitale si arresta la trasformazione epiteliale, e per successive modificazioni ritorna alla primitiva forma di epitelio pavimentoso. Nel coniglio questo fatto non si verifica, perchè, come abbiamo visto, giunti al 21° giorno di gravidanza l'epitelio comincia a subire delle modificazioni regressive, ed all'epoca del parto esso è di nuovo pavimentoso.

Volendo trarre delle conclusioni potrò dire: Il condotto genitale esterno della coniglia si divide in due segmenti: segmento vulvare e segmento uterino, i quali non sono in diretta continuazione fra loro, ma bensì il segmento uterino sbocca nel vulvare, per mezzo di un'apertura che si trova nella parete superiore di questo ultimo.

Il segmento vulvare, nelle coniglie adulte non gravide, è rivestito da un epitelio pavimentoso stratificato, e questo, solo per una piccola porzione nella sua parte anteriore, presenta le cellule dello strato superficiale a forma cilindrica o piramidale. Il segmento uterino, invece, è tutto rivestito di cellule cilindriche ad uno strato unico.

L'epitelio del segmento vulvare presenta delle modificazioni assai rilevanti nella forma, se lo si esamina nei diversi periodi di accrescimento.

Nei primi periodi della gravidanza l'epitelio da pavimentoso stratificato diventa cilindrico, per una trasformazione delle sue cellule superficiali: tale trasformazione comincia nella parte anteriore, e si propaga gradatamente indietro fino ad arrivare all'apertura vulvare.

Al 21° giorno di gravidanza tutto l'epitelio è trasformato. A partire da questo momento il rivestimento epiteliare ritorna a farsi pavimentoso: e tale modificazione regressiva comincia in vicinanza dell'apertura vulvare, e a poco a poco si avanza sino all'altra estremità del condotto.

All'epoca del parto tutto l'epitelio del segmento vulvare è di nuovo pavimentoso.

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1ª Condotto genitale esterno sezionato per metà lungo la linea mediana (grandezza naturale) — *a* segmento vulvare — *b* segmento uterino — *c* apertura che mette in comunicazione i due segmenti — *d* uretra — *e* vescica.

» 2ª Epitelio del segmento vulvare in una coniglia di 4 giorni di vita extrauterina (Ingr. 640 diam.).

» 3ª Epitelio del segmento vulvare di coniglia di 4 mesi (Ingr. 640 diam.).

» 4ª Epitelio del segmento vulvare in coniglia adulta non gravida (Ingr. 640 diam.).

» 5ª Lo stesso epitelio in prossimità dello sbocco dell'uretra (Ingr. 640 diam.).

» 6ª Epitelio del segmento uterino di coniglia adulta (Ingr. 640 diam.).

» 7ª Epitelio della metà anteriore del segmento vulvare di coniglia giunta al 18° giorno di gravidanza (Ingr. 640 diam.).

» 8ª Lo stesso epitelio in vicinanza dello sbocco dell'uretra (Ingr. 640 diam.).

» 9ª Epitelio del segmento vulvare in prossimità dell'apertura vulvare esterna di coniglia gravida di feti a termine (Ingr. 680 diam.).

» 10ª Lo stesso epitelio un po' più lontano dall'apertura della vulva (Ingr. 680 diam.).

» 11ª Lo stesso a metà circa del segmento vulvare (Ingr. 680 diam.).

» 12ª Lo stesso in prossimità dello sbocco dell'uretra (Ingr. 680 diam.).

» 13ª Epitelio del segmento vulvare di coniglia che ha partorito da poco (Ingr. 640 diam.).

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice-Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore della Classe, CLARETTA, ROSSI, MANNO, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, GRAF e PEYRON, che funge da Segretario in assenza del Socio Senatore Gaspare GORRESIO.

Il Socio PEYRON legge l'atto verbale della seduta precedente, che viene approvato. La Classe stabilisce che in una prossima adunanza si tratterà della elezione di Soci Stranieri.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 22 Febbraio all'8 Marzo 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

Donatori	
Staz. enologica sperimentale d'Asti.	* Le Stazioni sperimentali agrarie italiane, ecc. — Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, ecc., vol. XX, fasc. 1. Asti, 1891; in-8° gr.
Università J. Hopkins (Baltimora).	* Johns Hopkins University Circulars, etc.; vol X, n 85. Baltimore, 1891; in-4°.
R. Accademia delle Scienze di Berlino.	* Sitzungsberichte der k. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; n. XLI–LIII, 23 October - 18 December 1890. Berlin, 1890; in-8° gr.
Id.	— Verzeichniss der im Vierten vierdeljahr eingegangenen Druckschriften, Titel, Inhalt, Namen-und Sachregister; Jahrgang 1890. Berlin, 1890; in-8°.
Società Med.-chirurg. di Bologna.	* Bullettino delle Scienze mediche pubblicato per cura della Società Medico-chirurgica e della Scuola medica di Bologna; serie 7ª, vol. II, fasc. 1. Bologna, 1891; in-8°.
Società di Storia naturale di Boston.	* Memoirs of the Boston Society of Natural History; vol. IV, n. 7-9. Boston, 1890; in-4°.

Digitized by Google

Proceedings of the Boston Society of Natural History; vol. XXIV, parts 3 and 4. Boston, 1890; in-8°. — Società di Storia naturale di Boston.

* Proceedings of the american Academy of Arts and Sciences; new series, vol. XVI, whole series, vol. XXIV. Boston, 1889; in-8°. — Accad. Americana di Arti e Scienze (Boston).

* Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVIII, n. 4. Bruxelles, 1891; in-8°. — Società belga di Microscopia (Brusselle).

* Anales de la Sociedad cientifica Argentina; t. XXXI, entrega 1. Buenos Aires, 1891; in-8°. — Soc. Scientifica Argentina (Buenos Aires).

The scientific Papers of James CLERK MAXWELL, edit. by W. D. NIVEN; vol. II. Cambridge, 1890; in-4°. — (Cambridge).

Den Norske Nordhavs-Expedition (1876-78): XX-Zoologi-Pycnogonidea; ved G. O. SARS. Christiania, 1891; in-fol. — La Sped. Norv. nei mari del nord (Cristiania).

* Proceedings of the american philosophical Society held at Philadelphia; vol. XXXVII, n. 131; vol. XXXVIII, n. 132, 133. Philadelphia, 1889-90; in-8°. — Società filosofica di Filadelfia.

* Atti della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze; 4ª serie, vol. XIII, disp. 3. Firenze, 1890; in-8°. — R. Accademia dei Georgofili di Firenze.

* Bulletin de la Société d'Études des Hautes-Alpes; X année, Janviers-Mars Ohio, 1891. Gap, 1891; in-8°. — Soc. di Studi delle Alte Alpi (Gap).

Bulletin of the Scientific Laboratoires of Denison University edit. by W. G. TIGHT (department of Geology and Natural History) vol. V. Granville, 1890; in-8°. — Università di Denison (Granville, Ohio)

* Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem, etc.; t. XXIV, 4ᵉ et 5ᵉ livrais. Harlem, 1891; in-8°. — Società Olandese delle Scienze (Harlem).

* Ienaische Zeitschrift für Naturwissenschaft herausg. von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; XXV Band, Heft 1 und 2. Jena, 1890; in-8°. — Società di Med. e St. nat. di Jena.

* Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig.; zugleich Organ der deutschen zoologischen Gesellschaft; XIII Jahrg., n. 356, 357. Leipzig, 1891; in-8°. — J. V. CARUS. (Lipsia).

* Monthly Notices of the R. Astronomical Society of London; vol. LI, n. 3. London, 1891; in-8°. — R. Società astron. di Londra.

Digitized by Google

Soc. Microscopica di Londra.

* Journal of the R. Microscopical Society of London; 1891, part I. London, 1891; in-8°.

Osserv. Washburn (Madison, Wisc.).

Publications of the Washburn Observatory; vol. VI, parts 1 and 2. Madison, Wis., 1890; in-4°.

Soc. scientifica ANTONIO ALZATE (Messico).

* Memorias y Revista de la Sociedad cientifica « ANTONIO ALZATE »: t. IV, cuadernos n. 3 y 4. México, 1890; in-8°.

Osserv. astronom. di Tacubaya (Messico).

Boletin del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya; t. I, n. 2; in-4°.

R. Istit. Lomb. (Milano).

* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIV, fasc. 2. Milano, 1891; in-8°.

Società dei Naturalisti di Modena.

* Atti della Società dei Naturalisti di Modena; serie 3ª, vol. IX, anno XXIV, fasc. 2. Modena, 1890; in-8°.

Società Reale di Napoli.

* Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli); serie 2ª, vol. V, fasc. 1. Napoli, 1891; in-4°.

R. Accademia Medico-chirurg. di Napoli.

Bollettino della R. Accademia Medico-chirurgica di Napoli, ecc.; anno II, n. 11-12. Napoli, 1890; in-8°.

Acc. d'Arti e Sc. di Connecticut (New Haven).

* Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences; vol. VIII, part 1. New Haven, 1890; in-8°.

La Direzione (New Haven).

* The American Journal of Science; Editors James D. and Edw. S. DANA, etc.; third series, vol. XL, n. 235-238. New Haven, 1890; in-8°.

La Direzione (Nuova-York).

* The Journal of comparative Medicine and Veterinary Archives, edit. by W. A. CONKLIN; vol. XII, n. 2. New York, 1891; in-8°.

La Direzione (Parigi).

Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc., publiées par A. GOUGUENHEIM; t. XVII, n. 2. Paris, 1891; in-8°.

Osservatorio di Rio Janeiro.

* Revista do Observatorio — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno VI, n. 1. Rio de Janeiro, 1891; in-8° gr.

Assoc. Americana per il progresso delle Scienze (Salem).

* Proceedings of the american Association for the advancement of Science, thirty-eigt Meeting held at Toronto, Ontario; August 1889. Salem, 1890; 1 vol. in-8°.

R. Acc. di Medic. di Torino.

* Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, ecc.; anno LIII, n. 11-12. Torino, 1890; in-8°.

Digitized by Google

* Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, ecc.; serie 2ª, vol. XI, n. 1. Torino, 1891; in-4°. — Soc. meteor. ital. (Torino).

* Observations made during the year 1884 at the United States naval Observatory, etc. Washington, 1889; 1 vol. in-4°. — Osserv. navale degli St.Un.d'Am. (Washington).

* United States Department of Agriculture, Division of Ornithology and Mammology — North American Fauna; n. 3, 4. Washington, 1890; in-8°. — Governo degli St.Un.d'Am. (Washington).

* Smithsonian Institution, Unit. States national Museum: Bulletin of the Unit. States national Museum; n. 38. Washington, 1890; in-8°. — Ist. Smithsoniano (Washington).

— Proceedings of the Unit. States national Museum; vol. XIII, 1889. Washington, 1890; in-8°. — Id.

Il Codice di Leonardo da Vinci nella Biblioteca del Principe Trivulzio in Milano, trascritto ed annotato da Luca Beltrami. Milano, 1891; 1 vol. in-4°. — L. Beltrami.

Sur l'ellipse de Brocard; par E. Catalan. Bruxelles, 1891; 1 fasc. in-4°. — L'Autore.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 1° al 15 Marzo 1891

Donatori

* Journal of the Asiatic Society of Bengal; vol. LVII, part. 1, n. 3. 1889. Calcutta, 1890; in-8°. — Società Asiatica del Bengala (Calcutta).

— Proceedings of the asiatic Society of Bengal, etc.; n. IV-X, April-December 1890. Calcutta, 1890; in-8°. — Id.

Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 124. Firenze, 1891; in-8° gr. — Bibl. nazionale di Firenze.

— Indice alfabetico delle opere, ecc., 1890, pag. 33-48, DIL-GOR; in-8° gr. — Id.

Dr. A. Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, herausg. von Prof. Dr. A. Supan; XXXVII Band, n. 2. Gotha, 1891; in-4°. — Gotha. * *

* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIV, fasc. 3. Milano, 1891; in-8°. — R. Istit. Lomb. (Milano).

— Frontespizio e Indice del vol. XXIII; 1 fasc. in-8°. — Id.

Digitized by Google

Società Reale di Napoli. — * Rendiconti delle tornate e dei lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti (Sezione della Società R. di Napoli); nuova serie, anno IV, Gennaio-Dicembre 1890. Napoli, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — — Annuario della Società R. di Napoli; 1891. Napoli, 1891; 1 fasc. in-8°.

Soc. di Geografia (Parigi). — * Compte rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1891, n. 3, 4 et 5, pag. 61-132; in-8°.

Id. — — Table alphabétique des matières contenues dans le *Compte rendu* des séances, etc., pendant l'année 1890; in-8°.

Ministero delle Finanze (Roma). — Statistica del commercio speciale d'importazione e di esportazione dal 1° al 31 gennaio 1891. Roma, 1890; 1 fasc. in-8° gr.

Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma). — Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno VIII, n. 12; — Appendice al n. 12; — Frontespizio e Indice dell'anno VIII. Roma, 1890-91; in-8° gr.

R. Accademia de. Lincei (Roma). — * Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 4ª, vol. VII, Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, parte 2ª. — Notizie degli Scavi, Settembre, Ottobre e Novembre 1890. Roma, 1890: in-4°.

La Direzione (Valle di Pompei) — Il Rosario e la Nuova Pompei — Periodico mensuale benedetto tre volte dal Papa Leone XIII; anno VIII, quaderno 2. Valle di Pompei, 1891; in-8°.

L'Autore. — Ferdinando Borsari. — Etnologia italica — Etruschi, Sardi e Siculi nel XIV secolo prima dell'era volgare. Napoli, 1891; 1 fasc. in-8°.

Id. — — Le zone colonizzabili dell'Eritrea e delle finitime regioni etiopiche. Napoli, 1891; 1 fasc. in-8°.

L'A — A. Gabelli — Il positivismo naturalistico in filosofia. Roma, 1891; 1 fasc. in-8°.

Il Socio F. Rossi — I papiri copti del Museo egizio di Torino trascritti e tradotti da Francesco Rossi; vol. II, fasc. 3. Torino, 1891; in-4°.

L'A. — Prelezione e Programma al Corso di Storia della scienza costituzionale e politica italiana, dato da Luigi Rossi nella R. Università di Bologna. Bologna, 1891; 1 fasc. in-4°.

L'A. — Ernesto Schiaparelli — Studi sull'antico Egitto; vol. I, — La catena orientale dell'Egitto. Roma, 1890; in-8°.

Id. — Il libro dei funerali degli antichi Egiziani, tradotto e commentato da Ernesto Schiaparelli (Lavoro premiato dalla R. Accademia dei Lincei col premio reale di Archeologia); volume secondo. Roma, 1890; in-fol.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
471 (50 C 8) 12 v-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. **10-11, 1890-91**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Salvadori, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Segretario dà comunicazione di una lettera ministeriale che accompagna il R. Decreto di approvazione della nomina a Socio nazionale residente del Dott. Giuseppe Peano, Professore di calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Il Socio Camerano offre, da parte dell'autore, in dono all'Accademia un volume corredato da una grande carta geologica, col titolo: « *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte* », del Dott. Federico Sacco, Prof. di Paleontologia nella R. Università di Torino.

Il Socio Peano offre pure in dono i fascicoli già usciti della *Rivista di Matematica*, periodico mensile del quale l'offerente ha la direzione.

Digitized by Google

La Classe accoglie per la pubblicazione negli *Atti:*

1° Un lavoro, presentato dal Socio SEGRE, col titolo: « *Della compensazione del problema di* HANSEN, del Dott. Vincenzo REINA, Assistente di Geodesia nella R. Scuola per gli Ingegneri in Roma;

2° Una Nota, presentata dal Socio BASSO, per incarico del Socio NACCARI: « *Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido* ». Di questa Nota che forma come un'appendice di un altro lavoro omonimo precedentemente inserito negli *Atti*, è autore il Dott. Prof. Carlo CATTANEO della R. Università di Siena.

Infine il Socio CAMERANO presenta e legge un suo nuovo Studio, il quale viene dalla Classe, con votazione unanime, approvato per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.* Esso costituisce la continuazione e la chiusa di altri suoi lavori già pubblicati nei volumi stessi, ed ha per titolo: « *Monografia degli Ofidi italiani* (parte II, *Colubridi*) e *Monografia dei Cheloni italiani* ».

Digitized by Google

LETTURE

Della compensazione nel problema di Hansen;

Nota di VINCENZO REINA

— 1 —

Nel problema di POTHENOT, dati tre punti, si può rispetto ad essi determinare la posizione di un quarto punto, misurando gli angoli sotto cui, da questo ultimo, sono visti i tre punti dati. Se i punti dati fossero due soli, si può ancora rispetto ad essi (supposti inaccessibili) determinarne un terzo, purchè si aggiunga un secondo punto d'osservazione.

La soluzione di questo problema venne pubblicata per la prima volta da HANSEN (*), ma le formole da lui date debbono modificarsi di volta in volta, col variare della disposizione relativa dei quattro punti. Una soluzione generale, indipendente dalla peculiare disposizione dei punti, venne data da W. JORDAN (**), immaginando numerati i punti e generati gli angoli in modo opportuno.

— 2 —

Denotando con P e P_1 i punti nei quali si compiono le misure angolari, con P_3 e P_4 i punti dati (inaccessibili), JORDAN indica con P_3 quel punto che, nella rotazione positiva del raggio PP_1 intorno al punto P, viene incontrato per primo. Qui per rota-

(*) *Eine Aufgabe der praktischen Geodäsie und deren Auflösung.* — Astronomische Nachrichten, Bd. 18, S. 165; 1841.

(**) Handbuch der Vermessungskunde. - Zweiter Band, S. 255.

Digitized by Google

zione positiva intendesi quella per la quale gli *azimut* vengono generati positivamente, ritenendo gli *azimut* contati da Nord a Sud, passando per l'Est.

In questo modo si intenderanno anche generati gli angoli misurati nei punti PP_1, e si porrà

$$P_1PP_3=\alpha \quad P_1PP_4=\alpha' \quad PP_1P_3=\beta \quad PP_1P_4=\beta'.$$

Si indicherà inoltre con a la distanza nota P_3P_4, con b_1 quella dei due centri di osservazione. La soluzione del problema si otterrà allora, molto semplicemente, colla introduzione dei due angoli ausiliari φ e ψ del triangolo PP_3P_4, giacchè si avrà:

$$(1)\ldots\ldots \qquad \varphi+\psi=\pi-(\alpha'-\alpha),$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{PP_4}{PP_3}=\frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta'-\alpha')}\,,$$

epperò ponendo

$$\operatorname{cotg}\theta=\frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta'-\alpha')}\,,$$

si otterrà

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{cotg}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

la quale equazione, congiunta colla (1), permetterà di determinare

Digitized by Google

separatamente φ e ψ. Le distanze dei centri di osservazione dai punti P_3, P_4 saranno allora date dalle formole

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{ll} PP_3 = a\,\dfrac{\text{sen}\,\psi}{\text{sen}\,(\alpha'-\alpha)}\,, & PP_4 = a\,\dfrac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(\alpha'-\alpha)}\,, \\ P_1P_3 = PP_3\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\beta\pm\pi)}\,, & P_1P_4 = PP_4\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,(\beta'\pm\pi)}\,. \end{array}\right.$$

— 3 —

Nel problema di Pothenot nasce la *compensazione*, quando i punti dati invece di tre sono quattro: il calcolo del vertice di piramide si può fare allora in doppio modo, ed uno dei lati, congiungenti esso vertice con uno dei punti dati, verrà determinato dalle due parti: l'equazione di condizione si ottiene eguagliando i due valori ottenuti per questo lato.

Nel problema di Hansen nasce la compensazione quando, invece di due centri d'osservazione, se ne assumono tre. Sia P_2 il terzo punto; immaginiamolo accoppiato al punto P, ed indichiamo con $\gamma\gamma'$ i due angoli in P_2 generati nel modo precedentemente definito, con δ l'angolo P_2PP_1. Applicando al quadrilatero $PP_2P_3P_4$ il procedimento di calcolo già dimostrato, si potrà così per una nuova via determinare la lunghezza del lato PP_4, la quale, confrontata con quella precedentemente ottenuta, darà luogo ad una equazione di condizione. Sarà facile convincersi che questa sarà la sola, ricordando la nota formola di Gauss

$$A + B - 2P + 3,$$

che dà il numero delle equazioni di condizione nascenti dalla compensazione di una rete di triangoli, formola nella quale A rappresenta il numero degli angoli misurati, B il numero delle basi, P il numero dei vertici. (Nel caso attuale $A = 7$, $B = 1$, $P = 5$).

Digitized by Google

— 4 —

Per stabilire l'equazione di condizione sotto la forma più conveniente, si osservi che dai triangoli PP_1P_3, PP_1P_4 si ha:

$$b_1 = PP_3 \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta} = PP_4 \frac{\operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}\beta'} ,$$

ossia per le (2)

$$b_1 = a \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\beta} = a \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\beta'} ,$$

quindi

$$(3) \ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\beta' - \alpha')} = 1 .$$

Analogamente dalla considerazione dei triangoli PP_2P_3, PP_2P_4 si ricava:

$$b_2 = PP_3 \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}\gamma} = PP_4 \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')}{\operatorname{sen}\gamma'} ,$$

ossia

$$b_2 = a \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\gamma} = a \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(2\pi - a' - \delta + \gamma')}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\gamma'} ;$$

epperò

$$(4) \ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')} = 1 .$$

La eliminazione dei due angoli ausiliari φ e ψ, fra la (3) e la (4), conduce alla equazione di condizione richiesta:

$$(5) \ldots \quad \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)\operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} = 1 ,$$

il cui primo membro non è altro che il rapporto dei due valori calcolati per il lato b_2.

Noi indicheremo con

$$\alpha + (1),\ \alpha' + (2),\ \beta + (3),\ \beta' + (4),\ \gamma + (5),\ \gamma' + (6),\ \delta + (7)$$

Digitized by Google

i valori compensati degli angoli. Allora la (3) (la quale insieme alla (1) serve alla definizione degli angoli $\varphi\,\psi$) e la (5), scritte nei valori compensati, daranno

$$\frac{\operatorname{sen}(\psi + d\psi)\operatorname{sen}\{\beta' + (4)\}\operatorname{sen}\{\beta - \alpha + (3) - (1)\}}{\operatorname{sen}(\varphi + d\varphi)\operatorname{sen}\{\beta + (3)\}\operatorname{sen}\{\beta' - \alpha' + (4) - (2)\}} = 1\,,$$

$$\frac{\text{n}\{\beta+(3)\}\operatorname{sen}\{\gamma'+(6)\}\operatorname{sen}\{2\pi-\alpha-\delta+\gamma-(1)-(7)+(5)\}\operatorname{sen}\{\beta'-\alpha'+(4)-(2)\}}{\text{1}\{\beta'+(4)\}\operatorname{sen}\{\gamma+(5)\}\operatorname{sen}\{2\pi-\alpha'-\delta+\gamma'-(2)-(7)+(6)\}\operatorname{sen}\{\beta-\alpha+(3)-(1)\}} = 1.$$

Per ridurre queste due equazioni alla forma lineare, basta applicare il solito metodo della differenziazione logaritmica. Si ponga

$$t_1 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\psi \qquad t_6 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}(\beta' - \alpha')$$

$$t_2 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}(\alpha' - \alpha) \qquad t_7 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\beta'$$

$$t_3 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}(\beta - \alpha) \qquad t_8 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)$$

$$t_4 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\beta \qquad t_9 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\gamma$$

$$t_5 = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\varphi \qquad t_{10} = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')$$

$$t_{11} = \mu \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg}\gamma'$$

$$\Delta = \log \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)\operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}\,,$$

nelle quali formole μ rappresenta il modulo dei logaritmi volgari. Le quantità t così definite rappresentano, come è noto, le differenze tavolari nei logaritmi dei seni, corrispondenti alla variazione di un secondo nell'argomento: esse vennero numerate in quell'ordine nel quale si presentano nell'esempio di calcolo seguente.

Le due equazioni assumono allora la forma:

$$(6)\ldots\quad t_1 d\psi - t_5 d\varphi - t_3(1) + t_6(2) + (t_3 - t_4)(3) + (t_7 - t_6)(4) = 0\,,$$

$$(7)\ldots \left\{ \begin{aligned} &(t_3 - t_8)(1) + (t_{10} - t_6)(2) + (t_4 - t_3)(3) + (t_6 - t_7)(4) \\ &+ (t_8 - t_9)(5) + (t_{11} - t_{10})(6) + (t_{10} - t_8)(7) + \Delta = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

La (6) congiunta coll'equazione

$$d\varphi + d\psi = (1) - (2),$$

che si ottiene differenziando la (1), serve alla determinazione delle due correzioni $d\varphi\ d\psi$. Se ne deduce

$$(8) \ldots\ d\psi = \frac{(t_3+t_5)(1) - (t_5+t_6)(2) + (t_4-t_3)(3) + (t_6-t_7)(4)}{t_1+t_5},$$

$$(9) \ldots\ d\varphi = \frac{(t_1-t_3)(1) + (t_6-t_1)(2) + (t_3-t_4)(3) + (t_7-t_6)(4)}{t_1+t_5},$$

Ponendo la equazione di condizione (7) sotto la forma

$$A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + A_4(4) + A_5(5) + A_6(6) + A_7(7) + \Delta = 0,$$

$$A_1 = t_3 - t_8 \quad A_2 = t_{10} - t_6 \quad A_3 = t_4 - t_3 \quad A_4 = t_6 - t_7$$

$$A_5 = t_8 - t_9 \quad A_6 = t_{11} - t_{10} \quad A_7 = t_{10} - t_8 \,,$$

l'equazione correlante sarà

$$[AA] I + \Delta = 0\,,$$

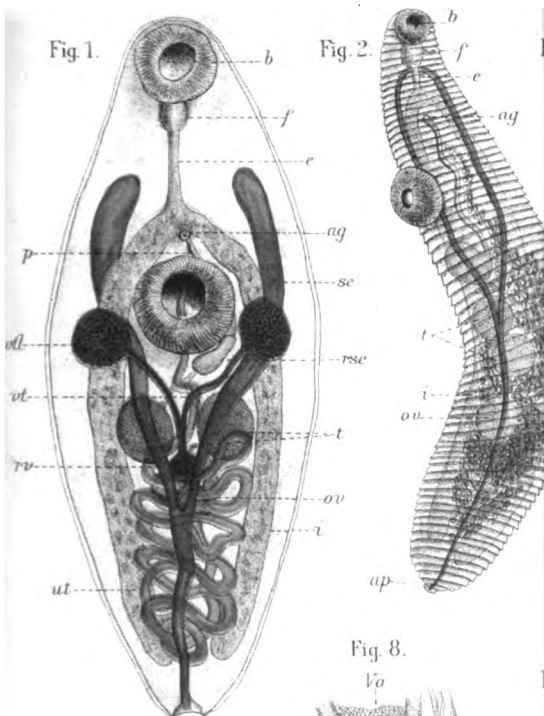
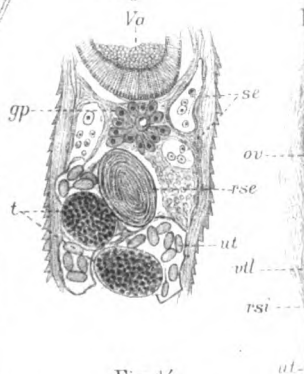
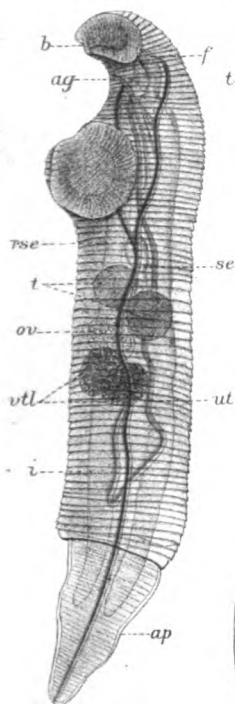
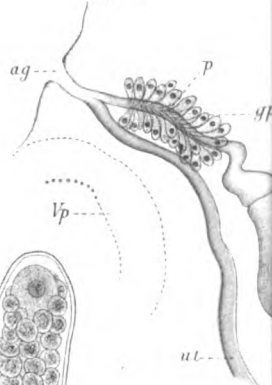
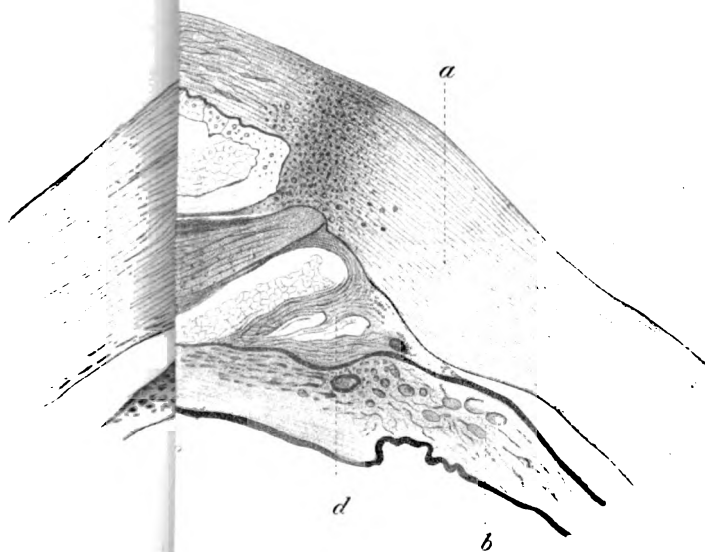
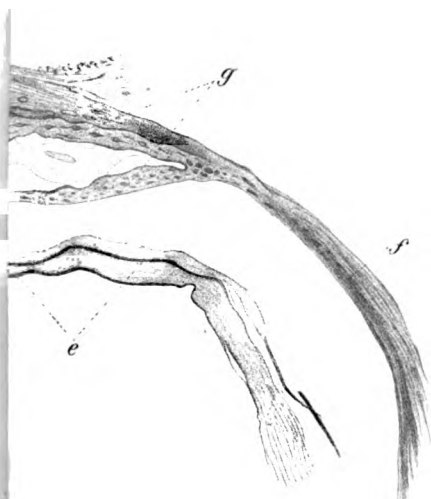
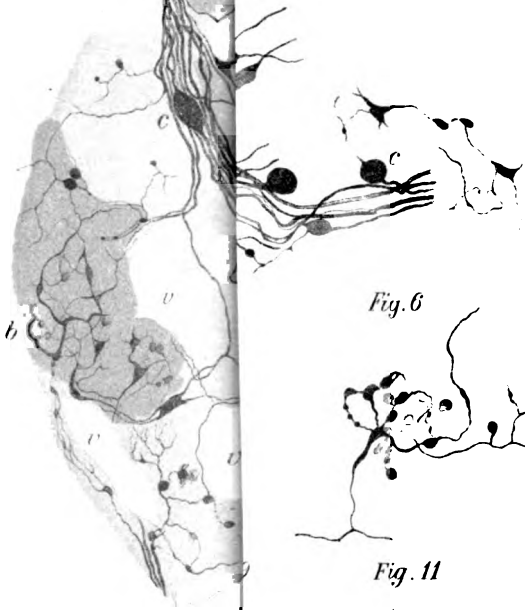
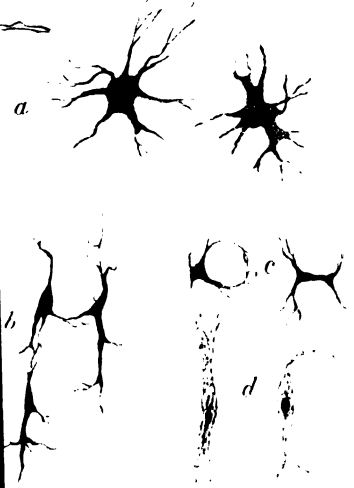
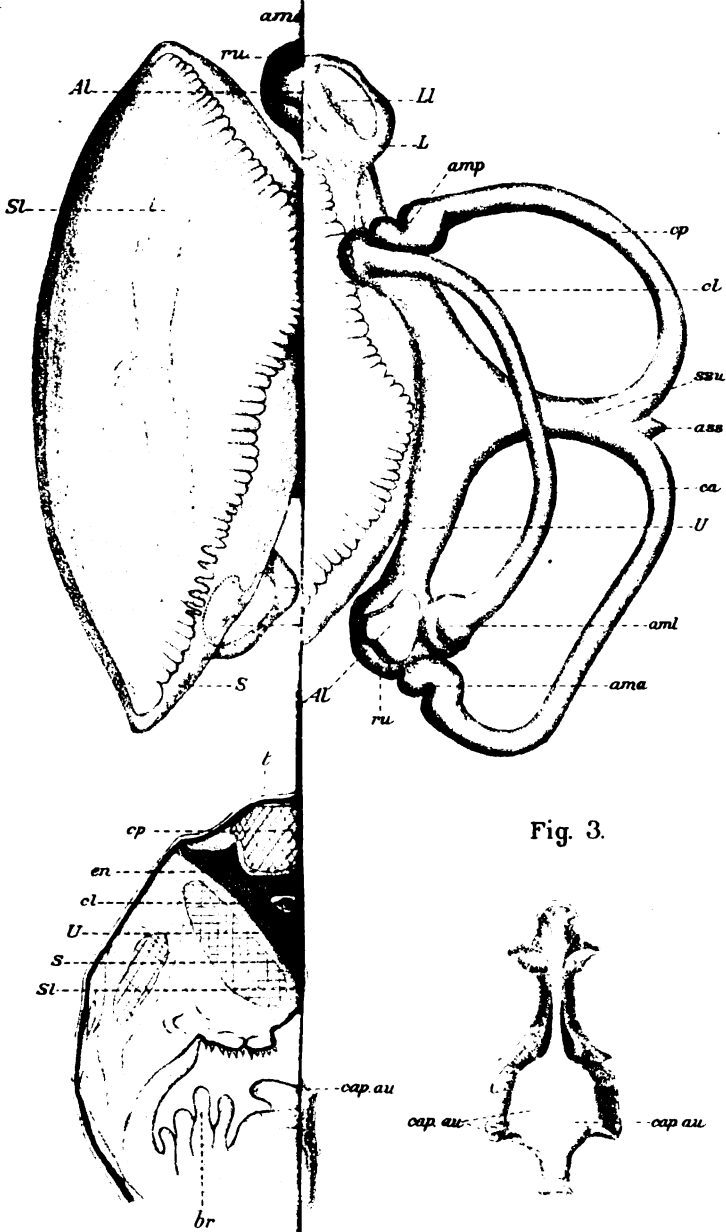
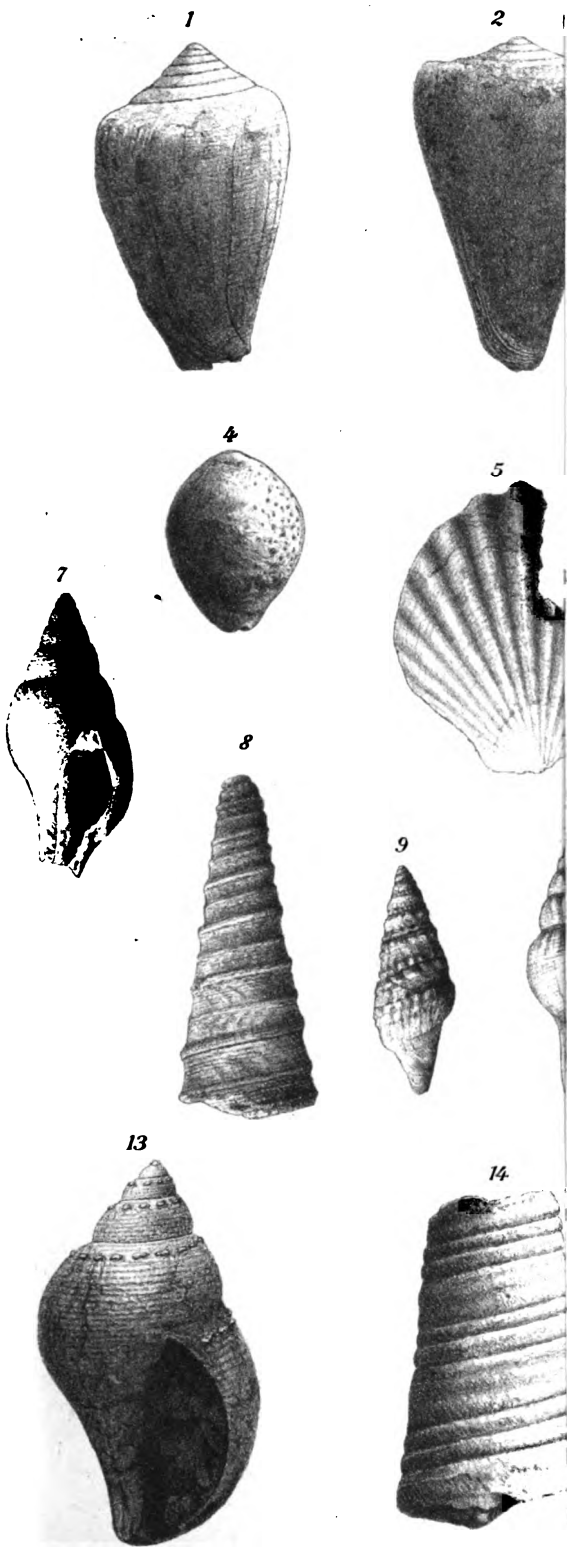
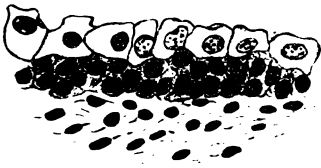
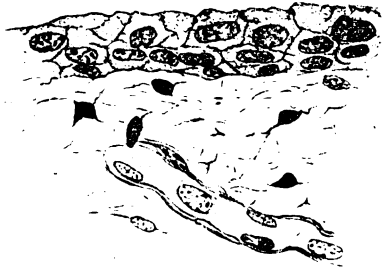
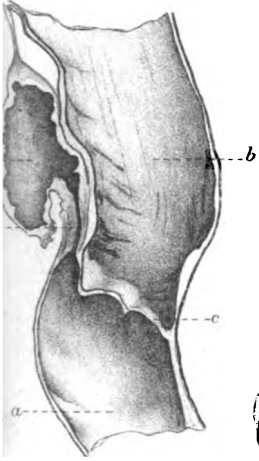
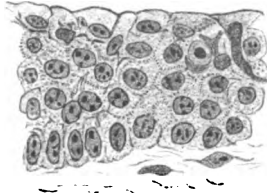
e le correzioni saranno date, in funzione del correlativo I, per mezzo delle formole:

$$(1) = A_1 I \quad (2) = A_2 I \quad (3) = A_3 I \quad (4) = A_4 I$$

$$(5) = A_5 I \quad (6) = A_6 I \quad (7) = A_7 I.$$

— 5 —

Applicheremo ora il metodo precedentemente esposto ad un esempio numerico, adottando una disposizione di calcolo analoga a quella indicata nella recente pubblicazione della Giunta Superiore del Catasto (*), per il caso della compensazione di un vertice di piramide.

(*) *Istruzione per i lavori trigonometrici.* Supplemento alla Istruzione (1).

Digitized by Google

Fr. Sav. Monticelli disegnò.

Digitized by Google

Dott. Fumagalli

Lit. Salussolia, Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

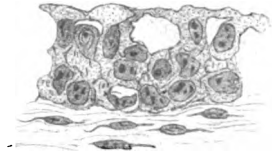
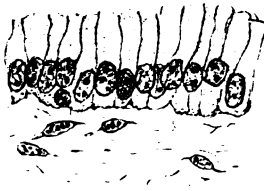
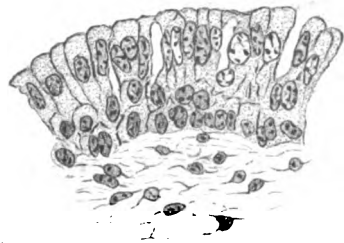
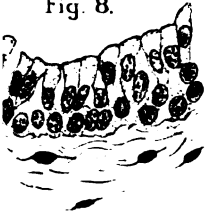
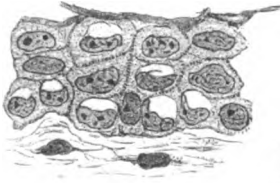
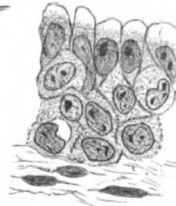
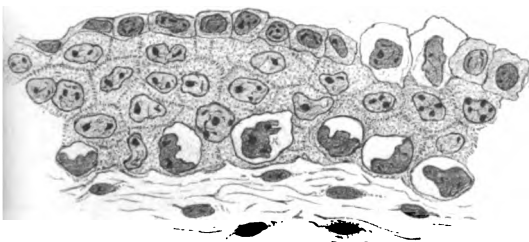
Dott. P. De Vescovi dis.

Lit. Salussolia - Torino

Digitized by Google

C. Righini lit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Angoli osservati.

$\alpha = 30^\circ.57'.43''$ $\beta = 252^\circ.41'.06''$ $\gamma = 49^\circ.00'.16''$

$\alpha' = 84^\circ.11'.33''$ $\beta' = 299^\circ.32'.40''$ $\gamma' = 92^\circ.19'.15''$

$\delta = 229^\circ.49'.38''.$

Logaritmo del lato noto.

$\log a = 3.231\ 616.$

Angoli occorrenti nel calcolo.

$\alpha' - \alpha = 53^\circ.13'.50''$ $\beta - \alpha = 221^\circ.43'\ 23''$

$\beta' - \alpha' = 215^\circ.21'.07''$ $2\pi - \alpha - \delta + \gamma = 148^\circ.12'.55''$

$2\pi - \alpha' - \delta + \gamma' = 138^\circ.18'.04''.$

Osservazione. — Nello schema di calcolo seguente è ommesso per semplicità il calcolo delle due correzioni $d\varphi$ $d\psi$, il quale si fa in base alle due formole (8) (9).

Digitized by Google

CALCOLO degli angoli ausiliari $\varphi\ \psi$	
$\alpha' - \alpha$	53° 13'. 50"
$\varphi + \psi$	126 46 . 10
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	63 . 23 . 05
log sen $(\beta - \alpha)$	9.823168 *n*
colog sen β	0.020141 *n*
log sen β'	9.939506
colog sen $(\beta' - \alpha')$	0.237623
log cotg θ	0 020438
θ	43° 39' 08". 3
$\theta + 45°$	88 . 39 . 08 . 3
log cotg $(\theta + \frac{\pi}{4})$	8.371549
log tg $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	0.300079
log tg $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	8.671628
$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	2°. 41'. 17"
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	63 . 23 . 05
φ	66°. 04'. 22"
ψ	60 . 41 . 48

Angoli compensati

α	30°. 57'. 44". 1
α'	84 . 11 . 31 . 8
β	252 . 41 . 05 . 6
β'	299 . 32 . 41 . 0
γ	49 . 00 . 15 . 6
γ'	92 . 19 . 15 . 6
δ	229 . 49 . 38 . 2

CALCOLO con gli elementi osservati	
log a	3.2[illegible]
log sen ψ	9.9[illegible]
colog sen $(\alpha' - \alpha)$	[illegible]
log PP_3	3.5[illegible]
log sen $(\beta - \alpha)$	9.8[illegible]
colog sen β	0.0[illegible]
log b_1	3.11[illegible]
log a	3.2[illegible]
log sen φ	9.9[illegible]
colog sen $(\alpha' - \alpha)$	0.0[illegible]
log PP_4	3.5[illegible]
log sen $(\beta' - \alpha')$	9.7[illegible]
colog sen β'	0.0[illegible]
log b_1	3.11[illegible]
log PP_3	3.5[illegible]
log sen $(2\pi - \alpha - \delta + \gamma$	9.721[illegible]
colog sen γ	0.12[illegible]
log b_2	3.112[illegible]
log PP_4	3.5[illegible]
log sen $(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')$	9.82[illegible]
colog sen γ'	0.00[illegible]
log b_2	3.112[illegible]

Digitized by Google

ENZE per 1'' valori	CORREZIONI angolari	CORREZIONI risultanti nei logaritmi dei seni	CALCOLO con gli elementi compensati
			0.231616
−1.2	$d\psi$	−5.6	9.940531
+1.6	(1)−(2)	+4.0	0.096344
			3.268491
−2.4	(1)−(3)	+4.1	9.823172 n
−0.7	−(3)	−0.3	0.020141 n
			3.111804
			3.231616
+0.9	$d\varphi$	+6.5	9.960981
+1.6	(1) (2)	+4.0	0.096344
			3.288941
−3.0	(4)−(2)	−6.6	9.762370 n
+1.2	−(4)	−1.2	0.060493 n
			3.111804
			0.268491
+3.4	(5)−(1)−(7)	−6.4	9.721581
+1.8	−(5)	+0.7	0.122192
			3.112264
			3.288941
+2.4	(6) (2)−(7)	+3.8	9.822966
0.0	−(6)	0.0	0.000356
			3.112263

COMPENSAZIONE

A_1	t_3-t_8	−5.8
A_2	$t_{10}-t_6$	+5.4
A_3	t_4-t_3	+1.7
A_4	t_6-t_7	−4.2
A_5	t_8-t_9	+1.6
A_6	$t_{11}-t_{10}$	−2.4
A_7	$t_{10}-t_8$	−1.0

$[AA]=92{,}65$

$$I=-\frac{\Delta}{[AA]}=-0.23$$

(1)	$A_1 I$	+1''.3
(2)	$A_2 I$	−1 .2
(3)	$A_3 I$	−0 .4
(4)	$A_4 I$	+1 .0
(5)	$A_5 I$	−0 .4
(6)	$A_6 I$	+0 .6
(7)	$A_7 I$	+0 .2

$d\psi$	−4''.7
$d\varphi$	+7 .3

$$_2(2)+A_3(3)+A_4(4)+A_5(5)+A_6(6)+A_7(7)+\Delta=0$$

$$\Delta=22$$

Digitized by Google

Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido. — Appendice alla Nota omonima (Vedi *Atti R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1890, vol. **XXV**);

del Dott. Prof. CARLO CATTANEO

In questa Nota, come complemento di un'altra sullo stesso argomento pubblicata lo scorso anno, presento i risultati relativi alla dilatazione termica di due amalgame di stagno molto ricche di mercurio. Il Prof. VICENTINI, per la discussione dei risultati di alcune sue ricerche sperimentali sulla resistenza elettrica delle amalgame, ha avuto occasione di prendere in considerazione i valori da me registrati nella Tavola 4ª del mio lavoro sopracitato dello scorso anno. Occorrendogli poi anche valori relativi ad amalgame meno ricche di stagno di quelle da me già studiate (Sn_4Hg, Sn_2Hg, $SnHg$, $SnHg_2$), ho studiato ora le due $SnHg_8$, $SnHg_{20}$.

Per quanto riguarda la preparazione delle amalgame, la loro temperatura di fusione, la preparazione e calibrazione dei dilatometri, il riempimento e le pesate di questi, le determinazioni delle densità alle varie temperature ed i calcoli relativi rimando il lettore alla mia Nota precedente di cui questa è appendice. Ricordo qui soltanto il significato di alcuni simboli ed alcune formule adoperate:

D_t densità dell'amalgama a t.

γ coefficiente medio di dilatazione di essa allo stato di perfetta liquidità, fra due temperature t e t'.

γ' lo stesso coefficiente, calcolata colla formula (3) ove si ammette che i metalli componenti la amalgama conservino la dilatazione che isolatamente posseggono allo stato liquido.

D_f densità della amalgama alla temperatura f di fusione dello stagno.

D_f' la stessa densità calcolata colla formula (2) ove si ammette che i metalli componenti conservino nella amalgama il loro volume.

Digitized by Google

d_f densità dello stagno alla temperatura f calcolata colla formula (4).

φ temperatura di fusione della amalgama.

P e P' rispettivamente le quantità ponderali su cento di mercurio e stagno.

c il coefficiente di contrazione determinato colla formula (5).

ε coefficiente medio di dilatazione dello stagno allo stato liquido.

d_m densità del mercurio alla temperatura f.

m coefficiente medio di dilatazione del mercurio.

$$\gamma = \frac{D - D'}{D'(t' - t)} \tag{1}$$

$$D_f' = \frac{100\, d_m}{P + P' \dfrac{d_m}{d_f}} \tag{2}$$

$$\gamma' = \frac{100\, d_m\, \varepsilon + D_f'(m P - \varepsilon P)}{100\, d_m} \tag{3}$$

$$d_f = \frac{D_f P'}{100 - \dfrac{D_f}{d_m} P} \tag{4}$$

$$c = \frac{D_f - D_f'}{D_f} \tag{5}$$

$f = 226°,5 \qquad d_m = 13,05 \qquad m = 0,000186$

$\varepsilon = 0,000114 \qquad d_f = 6,99$

Ecco ora i risultati ottenuti in base alle esperienze :

1° Per *Amalgama $Sn\,Hg_8$*

$P = 93,151 \qquad P' = 6,849 \qquad \varphi = 81°.$

Volume del dilatometro a 0° fino alla divisione 97,4 del cannello :

$V = 17^{cc},2436$

Volume medio a 0° di una piccola divisione del cannello

$$v = 0^{cc},001506$$

Peso della amalgama contenuta nel dilatometro

$$p = 214^{gr},7228$$

$t = 226°,5$	$D_t = 12,4681$
$t = 241,8$	$D_t = 12,4392$
$t = 259,4$	$D_t = 12,4073$
$t = 276,4$	$D_t = 12,3785$
$D_f = 12.4681$	$\gamma = 0,000145$
$D'_f = 12,3190$	$\gamma' = 0,000177$
$c = 0,0119$	$d_f = 7,75$

2° Per *l'Amalgama* $SnHg_{20}$.

$P = 97,143$ $P' = 2,857$ $\varphi = 59$.

Dati relativi al dilatometro *idem* come sopra
Peso dell'amalgama

$$P = 220^{gr},788$$

$t = 233°,4$	D_t 12,8100
$t = 246,4$	D_t 12,7815
$t = 272,5$	D_t 12,7297
$D_f = 12,8235$	$\gamma = 0,000161$
$D'_f = 12,7340$	$\gamma' = 0,000182$
$c = 0,0069$	$d_f = 8,06$.

3° Entro i limiti di temperatura fra cui le due amalgame sono state studiate la dilatazione si può ritenere regolare confondendosi quasi la curva delle densità con una linea retta.

Dalla considerazione dei valori di γ e D_f si scorge per queste due amalgame lo stesso andamento già verificatosi per le quattro amalgame di stagno precedentemente studiate (vedi Tavola 4ª lavoro citato); infatti detti valori sono maggiori per l'amalgama

Digitized by Google

SnH_{20} che per la $SnHg_8$ e questi maggiori di quelli della (N. 1) $SnHg_2$. Anche i valori delle d_f ora trovati mostrano un aumento col diminuire della concentrazione della amalgama; trovo opportuno riportarli qui con ordine:

Amalgama	$Sn\ Hg_{20}$	$d_f = 8{,}06$
»	$Sn\ Hg_8$	$= 7{,}75$
»	$Sn\ Hg_2$	$= 7{,}35$
»	$Sn\ Hg$	$= 7{,}14$
»	$Sn_2\ Hg$	$= 7{,}06$
»	$Sn_4\ Hg$	$= 6{,}97$.

Anche la curva di queste densità (tracciata rappresentando colle ascisse le quantità percentuali dello stagno e colle ordinate le densità stesse) mostra, d'accordo coi risultati ottenuti precedentemente, che per piccole percentuali del metallo al mercurio allegato la variazione delle d_f è rapida; lo stesso fatto notisi anche per la curva dei valori di γ.

Le differenze poi fra i valori γ sperimentali ed i γ' calcolati comprovano pure che la dilatazione dell'amalgama non può ritenersi uguale alla somma delle dilatazioni dei metalli componenti quando la percentuale di metallo allegata è piccola; anche in questo caso si hanno sempre coefficienti più piccoli di quelli che alle dette amalgame spetterebbero se le dilatazioni dei componenti si sommassero.

Infine qui sotto sono registrate le differenze fra le D_f e le D_f' sperimentali e calcolate, unitamente ai rispettivi coefficienti di contrazione:

Amalgame	Differenze	Coeff. contraz.
$Sn\ Hg_{20}$	0,089	0,0069
$Sn\ Hg_8$	0,149	0,0119
$Sn\ Hg_2$	0,195	0,0176
$Sn\ Hg$	0,111	0,0111
$Sn_2\ Hg$	0,047	0,0052
$Sn_4\ Hg$	—0,022	—0,0027.

Digitized by Google

L'andamento della curva dei coefficienti di contrazione (tracciata rappresentando colle ascisse le percentuali di stagno e colle ordinate i valori dei coefficienti stessi) accenna al fatto che tale contrazione dall'essere piccola per amalgame pochissimo concentrate tende a crescere gradatamente colla concentrazione fino ad un massimo per poi diventare insensibile per forti concentrazioni. Parrebbe quasi che in prossimità di una percentuale di stagno di circa 20 l'amalgama assumesse i caratteri di una lega chimica, modificando sensibilmente le proprietà fisiche dei componenti.

NB. Nella Nota precedente (Atti R. Accad. Scienze Torino, 1890, vol. XXV) è incorso un errore di stampa. Nella tavola 4ª in corrispondenza alla colonna orizzontale N. 3 ed alla verticale D_f leggasi 8,937 in luogo di 9,937.

Dal Laboratorio di Fisica sperimentale della R. Università.
Siena, 19 Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO

Digitized by Google

Adunanza del 12 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Salvadori, Bruno, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio Basso presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore, Prof. Ing. Giovanni Luvini, un opuscolo intitolato: *Nuova forma di dinamo alla quale l'Autore ha dato il nome di Metergo*.

Il socio Cossa presenta, per incarico dell'autore, Prof. Francesco Brioschi, Socio nazionale non residente, una Nota intitolata: « *Sopra alcune formole ellittiche* ». Questo lavoro del Senatore Brioschi sarà inserito negli *Atti*.

Il Socio Segre anche a nome del condeputato Socio D'Ovidio, legge una sua Relazione sopra un lavoro del Dott. Guido Castelnuovo, col titolo: « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* ». Conformemente alle conclusioni favorevoli della Relazione, la Classe ammette alla lettura tale lavoro, e poscia ne delibera con voti unanimi la pubblicazione nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

La Relazione del Socio Segre sarà inserita negli *Atti*.

Digitized by Google

LETTURE

Sopra alcune formole ellittiche;

Nota del Socio FRANCESCO BRIOSCHI

1. Sia $f(x)$ un polinomio del quarto grado:

$$f(x) = A_0 x^4 + 4 A_1 x^3 + 6 A_2 x^2 + 4 A_3 x + A_4$$

e sieno a_0, a_1, a_2, a_3 le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Posto:

$$f_1(x) = \frac{1}{4} f'(x) \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{3.4} f''(x) \quad , \quad f_3(x) = \frac{1}{2.3.4} f'''(x)$$

ed:

$$l = f_1(a_0) \quad , \quad m = \frac{1}{2} f_2(a_0) \quad , \quad n = f_3(a_0)$$

è noto (*) che dalla formola di trasformazione:

$$(1) \ldots\ldots \qquad x = a_0 + \frac{l}{s - m}$$

si deduce la:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{ds}{\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}} = \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}$$

e che le radici e_1, e_2, e_3 della equazione $\varphi(s) = 4 s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ hanno i seguenti valori:

$$e_1 = \frac{A_0}{12}(\beta - \gamma) \quad , \quad e_2 = \frac{A_0}{12}(\gamma - \alpha) \quad , \quad e_3 = \frac{A_0}{12}(\alpha - \beta)$$

(*) CASPARY, *Extrait d'une lettre à M. Hermite.* Journal de Mathématique de JORDAN, t. V, 1889.

Digitized by Google

essendo:

$$\alpha=(a_0-a_1)(a_2-a_3)\ ,\quad \beta=(a_0-a_2)(a_3-a_1)\ ,\quad \gamma=(a_0-a_3)(a_1-a_2)$$

e quindi $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Indicando con a , b , c le tre espressioni:

$$a=(a_0-a_2)(a_0-a_3)\ ,\quad b=(a_0-a_3)(a_0-a_1)\ ,\quad c=(a_0-a_1)(a_0-a_2)$$

i valori di α , β , γ prendono la forma:

$$\alpha=b-c\ ,\quad \beta=c-a\ ,\quad \gamma=a-b$$

ed in conseguenza:

$$e_1=\frac{A_0}{12}(b+c-2a)\ ,\quad e_2=\frac{A_0}{12}(c+a-2b)\ ,\quad e_3=\frac{A_0}{12}(a+b-2c)$$

e siccome:

$$m=\frac{A_0}{12}(a+b+c)$$

si avranno le:

$$(2)\ldots\quad m-e_1=\frac{A_0}{4}a\ ,\quad m-e_2=\frac{A_0}{4}b\ ,\quad m-e_3=\frac{A_0}{4}c$$

Da queste relazioni, osservando, che:

$$4(m-e_1)(m-e_2)(m-e_3)=\varphi(m)\ ,\quad l^2=\frac{A_0^3}{16}abc$$

deducesi essere:

$$l=\frac{1}{\sqrt{A_0}}\sqrt{\varphi(m)}\ .$$

Posto ora:

$$s=p(u)\ ,\qquad m=p(v)\qquad \text{e quindi}\qquad \sqrt{\varphi(m)}=p'(v)$$

la formola di trasformazione (1) può scriversi:

$$x=a_0+\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{p'(v)}{p(u)-p(v)}\ .$$

Digitized by Google

2. È noto che posto:

$$D = A_1^2 - A_0 A_2 , \qquad G = A_0^2 A_3 - 3 A_0 A_1 A_2 + 2 A_1^3$$

essendo:

$$g_2 = A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2$$
$$g_3 = A_0 A_2 A_4 + 2 A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3$$

si ha identicamente:

$$\frac{G^2}{A_0^3} = 4\left(\frac{D}{A_0}\right)^3 - g_2 \frac{D}{A_0} - g_3$$

per la quale posto:

$$\frac{D}{A_0} = p(w) \qquad \text{si ha:} \qquad \frac{G}{A_0\sqrt{A_0}} = -p'(w)$$

Per determinare la relazione che deve esistere fra gli argomenti v, w, si osservi sussistere identicamente le due relazioni:

$$\frac{D}{A_0} = \frac{1}{A_0} n^2 - 2m , \qquad \frac{G}{A_0\sqrt{A_0}} = \sqrt{A_0}\,.\,l - \frac{6}{\sqrt{A_0}} m n + 2 \frac{n^3}{A_0\sqrt{A_0}}$$

per le quali:

$$\frac{n^2}{A_0} = p(w) + 2p(v)$$

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2} \frac{p'(v) + p'(w)}{p(v) - p(w)}$$

ma:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{p'(v) + p'(w)}{p(v) - p(w)}\right]^2 = p(v) + p(w) + p(v-w) \quad .$$

(Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, pag. 29), si avrà quindi:

$$p(v-w) = p(v)$$

e $v = \frac{1}{2} w$.

Digitized by Google

Dalla prima delle relazioni superiori deducesi così essere:

$$\frac{n^2}{A_0} = p(2v) + 2p(v)$$

o per la formola di duplicazione (HALPHEN, pag. 96)

$$\frac{n^2}{A_0} = \frac{1}{4}\left(\frac{p''(v)}{p'(v)}\right)^2$$

da cui:

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2}\frac{p''(v)}{p'(v)}$$

la quale può dedursi anche dalla seconda delle formole superiori, essendo:

$$\frac{p'(v) + p'(2v)}{p(v) - p(2v)} = \frac{p''(v)}{p'(v)}$$

(HALPHEN, pag. 107).

Ora $n = A_0 a_0 + A_1$, si avrà quindi per la radice a_0 il valore:

$$a_0 = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{2\sqrt{A_0}}\frac{p''(v)}{p'(v)}$$

e per esso la formola di trasformazione diventa:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{\sqrt{A_0}}\left[\frac{1}{2}\frac{p''(v)}{p'(v)} + \frac{p'(v)}{p(u) - p(v)}\right].$$

La formola di trasformazione (1) dà:

$$s = m + \frac{l}{x - a_0},$$

ma $l = \frac{A_0}{4} a(a_0 - a_1)$, $m - e_1 = \frac{A_0}{4} a$, quindi

$$s - e_1 = \frac{A_0}{4} a \frac{x - a_1}{x - a_0}$$

Digitized by Google

ed analogamente per $s-e_2$, $s-e_3$; si ottiene così

$$\sqrt{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{\sqrt{\varphi(s)\varphi(m)}}{(s-m)^2} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{p'(u)p'(v)}{\left[p(u)-p(v)\right]^2}$$

ossia:

$$\sqrt{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \left[p(u+v)-p(u-v\right] = \frac{dx}{du} .$$

Da quest'ultima si deducono le

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{A_0}} \left[p'(u+v)-p'(u-v)\right], \quad f_2(x) = p(u+v)+p(u-v)$$

e per le medesime i valori dei due covarianti di $f(x)$:

$$h(x) = ff_2 - f_1^2 , \qquad t(x) = 2\,(fh_1 - hf_1) , \qquad \left(h_1 = \frac{1}{4}\frac{dh}{dx}\right)$$

trovansi essere:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = -p(2u) , \qquad \frac{t(x)}{f(x)\sqrt{f(x)}} = p'(2u) ,$$

le quali conducono alla nota trasformazione del sig. HERMITE.

3. Dalla relazione superiore:

$$\frac{D}{A_0} = \frac{n^2}{A_0} - 2m$$

si ha:

$$\frac{D}{A_0^2} = \frac{1}{16}\left[(a_0-a_1)^2+(a_0-a_2)^2+(a_0-a_3)^2\right] - \frac{1}{24}(a+b+c) ,$$

quindi:

$$\frac{1}{A_0}\left[\frac{D}{A_0} - e_1\right] = \frac{1}{16}\left|a_0-a_1)^2+(a_0-a_2)^2+(a_0-a_3)^2+2a-2b-2c\right|$$

ossia

$$\frac{1}{A_0}\left[\frac{D}{A_0} - e_1\right] = \frac{1}{16}(a_0+a_1-a_2-a_3)^2 ,$$

Digitized by Google

ma:

$$\frac{D}{A_0} - e_1 = p(w) - e_1 = \frac{\sigma_1^2(w)}{\sigma^2(w)} .$$

Si ottengono così le tre relazioni:

$$a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)},$$

$$a_0 + a_2 - a_3 - a_1 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)},$$

$$a_0 + a_3 - a_1 - a_2 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

ed i valori delle radici a_0, a_1, a_2, a_3, nella forma data ad essi dalla signora KOWALEVSKI nell'importante suo lavoro premiato dall'Accademia delle Scienze di Parigi (*). Moltiplicando le tre equazioni superiori per α, β, γ, ed indicando con μ la espressione:

$$\mu = (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)$$

si ha:

$$\mu = \frac{8}{A_0\sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)\right].$$

In secondo luogo moltiplicando quelle stesse equazioni per $\alpha(\beta - \gamma)$, $\beta(\gamma - \alpha)$, $\gamma(\alpha - \beta)$ e sommandole si ottiene:

$$\mu m = -\frac{8}{A_0\sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)\right].$$

Da ultimo moltiplicando fra loro le α, β, γ, trovasi:

$$\mu l = -\frac{16}{A_0^2}(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = -\frac{16}{A_0^2} E ;$$

(*) *Acta Mathematica*, t. 12, pag. 194, 196.

Digitized by Google

ponendo quindi:

$$h_0 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)\right] ,$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2 - e_3)\,\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\,\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\,\sigma_3(w)\right] ,$$

$$h_2 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e^2_2 - e^2_3)\,\sigma_1(w) + (e^2_3 - e^2_1)\,\sigma_2(w) + (e^2_1 - e^2_2)\,\sigma_3(w)\right] ,$$

la formula di trasformazione (1) dà:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} - \frac{h_0}{\sqrt{A_0}} - \frac{2}{\sqrt{A_0}} \frac{E}{h_1 p(u) + h_2} .$$

4° Consideriamo due trasformazioni analoghe alla (1):

$$x_1 = a_0 + \frac{l}{p(u_1) - m} , \qquad x_2 = a_0 + \frac{l}{p(u_2) - m} ;$$

si avranno le:

$$p(u_1) + p(u_2) = \frac{1}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} \begin{bmatrix} 2mx_1x_2 + (l - 2a_0m)(x_1 + x_2) \\ + 2a_0(a_0m - l) \end{bmatrix} ,$$

$$p(u_1) - p(u_2) = -l \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} ,$$

$$p(u_1)\,p(u_2) = \frac{1}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} \begin{bmatrix} m^2x_1x_2 + m(l - a_0m)(x_1 + x_2) \\ + (l - a_0m)^2 \end{bmatrix} .$$

Dalle note relazioni (*):

$$p(u_1 + u_2) = \frac{f(x_1, x_2) - \sqrt{f(x_1) f(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} ,$$

$$p(u_1 - u_2) = \frac{f(x_1, x_2) + \sqrt{f(x_1) f(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} ,$$

nelle quali:

$$f(x_1, x_2) = x^2_2 (A_0 x^2_1 + 2A_1 x_1 + A_2) + 2x_2(A_1 x^2_1 + 2A_2 x_1 + A_3) + \\ + A_2 x^2_1 + 2A_3 x_1 + A_4 ,$$

osservando essere:

$$f(x_1, x_2) - 2e_1(x_1 - x_2)^2 = \frac{A_0}{2} \left[\varphi_1(x_1)\psi_1(x_2) + \varphi_1(x_2)\psi_1(x_1)\right]$$

(*) KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen*. Math. Annalen, Bd. 27.

Digitized by Google

posto:

$$\varphi_1(x_1) = (x_1 - a_0)\, x_1 - a_1) \ , \qquad \psi_1(x_1) = (x_1 - a_2)(x_1 - a_3) \ ,$$

deducesi pel valore della espressione:

$$P_1 = \sqrt{p(u_1+u_2)-e_1}\,\sqrt{p(u_1-u_2)-e_1}$$

il seguente:

$$P_1 = A_0 \frac{\varphi_1(x_1)\psi_1(x_2) - \varphi_1(x_2)\psi_1(x_1)}{4\,(x_1 - x_2)^2} \ ,$$

ossia:

$$P_1 = \frac{A_0}{4\,(x_1 - x_2)^2}\left[\begin{array}{l} (a_0 + a_1 - a_2 - a_3)\, x_1 x_2 + (a_2 a_3 - a_0 a_1)(x_1 + x_2) \\ + a_0 a_1 (a_2 + a_3) - a_2 a_3 (a_0 + a_1) \end{array}\right]$$

ed analogamente pei valori di P_2, P_3.

Moltiplicando questi valori per α, β, γ e sommando si ottiene dapprima:

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \frac{1}{2}\mu A_0 \frac{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)}{x_1 - x_2}$$

ma $\alpha = -\dfrac{4}{A_0} e_2 - e_3) \ldots.$; $\mu . l = -\dfrac{16}{A^2_0} E$ come si è trovato sopra,

si avrà quindi:

$$p(u_1) - p(u_2) = \frac{-2E}{(e_2 - e_3) P_1 + (e_3 - e_1) P_2 + (e_1 - e_2) P_3} \ .$$

Così moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\beta-\gamma)$, $\beta(\gamma-\alpha)$, $\gamma(\alpha-\beta)$ e sommando si giunge alla:

$$p(u_1) + p(u_2) = -2\,\frac{(e^2_2 - e^2_3) P_1 + (e^2_3 - e^2_1) P_2 + (e^2_1 - e^2_2) P_3}{(e_2 - e_3) P_1 + (e_3 - e_1) P_2 + (e_1 - e_2) P_3}$$

Infine moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\alpha^2 + 5\beta\gamma)$, $\beta(\beta^2 + 5\gamma\alpha)$, $\gamma(\gamma^2 + 5\alpha\beta)$ si ottiene:

$$p(u_1)\,p(u_2) = -\frac{(e_2-e_3)(e^2_1+e_2e_3)P_1+(e_3-e_1)(e^2_2+e_3e_1)P_2+(e_1-e_2)(e^2_3+e_1e_2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3} ,$$

formole esse pure dovute alla Sig[a] KOWALEVSKI (pag. 211).

Digitized by Google

Per le formole stesse il coefficiente di P_1 nel numeratore della espressione:

$$\left(p(u_1)-m\right)\left(p(u_2)-m\right)$$

è il seguente:

$$(e_2-e_3)\left[m^2-2me_1-e_1^2-e_2e_3\right]=$$
$$=(e_2-e_3)\left[(m-e_1)(2m+e_1)-(m-e_2)(m-e_3)\right]$$

ossia per le relazioni (2)

$$=\frac{A_0^2}{16}(e_2-e_3)(ab+ca-bc)=-\sqrt{A_0}\,.\,l(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)};$$

così essendo:

$$a_0\left(p(u_1)-m\right)\left(p(u_2)-m\right)+\frac{1}{2}l\left(p(u_1)+p(u_2)\right)-lm=$$
$$=\frac{A_0}{4}l(e_2-e_3)(a_0a_1-a_2a_3)=l(e_2-e_3)\left[\frac{A_1}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)}-\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)}\right],$$

posto:

$$L=(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)},\qquad L_1=(e_2-e_3)\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$M=(e_3-e_1)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)},\qquad M_1=(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(w)\sigma_1(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$N=(e_1-e_2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\qquad N_1=(e_1-e_2)\frac{\sigma_1(w)\sigma_2(w)}{\sigma^2(w)}.$$

si hanno le:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{A_1}{A_0}+\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{L_1P_1+M_1P_2+N_1P_3}{LP_1+MP_2+NP_3},$$

$$\frac{x_1-x_2}{2}=-\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{E}{LP_1+MP_2+NP_3},$$

Digitized by Google

alle quali corrispondono le equazioni differenziali:

$$\frac{d s_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} = \frac{d x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{d x_2}{\sqrt{f(x_2)}}$$

$$\frac{d s_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}} = -\frac{d x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{d x_2}{\sqrt{f(x_2)}}$$

essendo

$$s_1 = p(u+v) \ , \quad s_2 = p(u-v) \ .$$

RELAZIONE intorno alla Memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane.*

I sistemi lineari di curve piane costituiscono uno fra gli argomenti di ricerche geometriche cui ripetutamente si è rivolta in questi ultimi anni l'attenzione dei geometri d'Italia: del paese cioè al quale la scienza era già debitrice della teoria generale delle corrispondenze piane birazionali, vale a dire delle reti omaloidiche di curve piane. In breve tempo son comparsi vari lavori di BERTINI, CAPORALI, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI, ecc., nei quali sono ottenuti parecchi nuovi risultati, generali o speciali, su quei sistemi (*). E veramente lo studio dei sistemi lineari di curve piane è degno che ad esso si rivolgano i geometri, poichè la sua importanza è notevole, sia che lo si consideri in se stesso, sia che si badi alle sue applicazioni. Si pensi in fatti: che lo studio delle superficie, semplici o multiple, rappresentabili univocamente sul piano, ed in particolare lo studio dei piani multipli rappresentabili su un piano semplice, si riducono a ricerche intorno al sistema lineare rappresentativo. Che dall'esame delle rappresentazioni piane di una superficie razionale si trae la costruzione delle corrispon-

(*) Pel confronto di questi ed altri risultati fra loro e con quelli contenuti nella Memoria che esaminiamo, rimandiamo a questa e particolarmente al cenno storico sui sistemi lineari che si trova nell'Introduzione.

Digitized by Google

denze birazionali fra due spazi. Che lo studio delle *involuzioni piane* nel senso più generale, cioè dei raggruppamenti dei punti del piano in gruppi di μ, tali che ogni punto del piano stia in un sol gruppo, si può far dipendere in infiniti modi (ad esempio ricorrendo ad una superficie sui cui punti si rappresentino univocamente i gruppi dell'involuzione) da quello di particolari sistemi lineari di curve piane, tali che tutte le curve passanti per un punto qualunque del piano passino in conseguenza per i $\mu - 1$ associati. Ecc., ecc.

Quando di una varietà algebrica si studiano quelle proprietà che non mutano trasformando birazionalmente la varietà stessa, si fa quella che ora si suol chiamare la *geometria sulla varietà*. La *geometria sulla retta (punteggiata)* coincide con la geometria projettiva della retta stessa: non così la *geometria su una curva qualunque* di genere p, nè la *geometria sul piano*. Quelle proprietà dei sistemi lineari di curve piane che sono invariabili per trasformazioni Cremoniane appartengono appunto alla geometria sul piano. Esse serviranno d'introduzione allo studio delle *serie lineari di curve sopra una superficie qualunque* fatto nel senso della geometria su una superficie: studio che non è ancora avviato.

Ora allorquando i sistemi lineari di curve piane vengono studiati secondo quest'indirizzo, si ha nelle trasformazioni birazionali del piano uno strumento per semplificarli; e considerando come equivalenti quei sistemi che così si posson trasformare gli uni negli altri, nasce la questione di ridurre tutti i sistemi a dati tipi. Appunto di essa, per i sistemi di un dato genere p, si sono occupati alcuni fra gli scienziati italiani ricordati. Ma il CASTELNUOVO in questa Memoria si pone problemi di un'altra natura; e si basa sopra un concetto che, per quanto spontaneo possa sembrare, non era ancora stato applicato in queste ricerche con quell'ampiezza che era necessaria per rivelarne tutta la fecondità. Vogliam dire l'uso della geometria sulla curva, ed in particolare delle serie lineari di gruppi di punti sopra la curva, delle curve aggiunte di questa, ecc.: di quelle nozioni insomma che, introdotte nella scienza da RIEMANN, CLEBSCH ed altri, hanno poi trovato in un notissimo lavoro di BRILL e NÖTHER il loro assetto definitivo. Era ben naturale che queste cose dovessero aiutare grandemente le ricerche sui sistemi lineari di curve piane. Il CASTELNUOVO, che già aveva dimostrato, in alcuni scritti accolti dalla nostra Accademia nei suoi *Atti*, di possedere a fondo quelle pro-

Digitized by Google

prietà di geometria sulla curva; e che in altre due Note se n'era già valso utilmente pei sistemi lineari, sia determinando tutti quelli che si compongono di curve iperellittiche, sia mostrando quali sono quei sistemi di genere p che hanno la massima dimensione (*); giunge nella Memoria su cui riferiamo, a tutta una serie di risultati della massima generalità ed importanza, basandosi appunto su quei concetti.

La Memoria è divisa in due capitoli. Il 1° studia i sistemi lineari di curve C d'ordine n che vengono determinati assegnando le multiplicità *(virtuali)* ν_1, ν_2,.. con cui queste curve passano per i punti a_1, a_2, . . . (comunque collocati, distinti od infinitamente vicini) di un dato gruppo A. In conseguenza di queste condizioni la curva generica C del sistema può venir ad avere in qualche punto di A una multiplicità superiore alla data, sicchè i numeri ν possono differire dalle multiplicità *effettive* che C avrà nei punti di A. Può accadere che uno stesso sistema lineare d'ordine n si possa determinare secondo quel concetto in più modi, con diverse scelte per A e per le ν. Bisogna dunque riferire sempre le proprietà dei sistemi lineari contenute in questo Cap.° ad un gruppo A e ν ben fissato: esse sono proprietà *relative* a questo gruppo. Quando poi nel 2° Cap.° si studieranno le proprietà *assolute* dei sistemi lineari determinati dai punti base, basterà prendere per A il gruppo di tutti i punti comuni alle curve del sistema e per multiplicità ν quelle effettive della curva generica. Ma le ipotesi più generali che su A e le ν si fanno nel Cap° 1° non hanno un mero scopo di generalizzazione: esse sono addirittura necessarie per ottenere risultati che si possano anche applicare alle curve *fondamentali*, od alle *aggiunte pure*, od a curve *particolari* del sistema, poichè quella scelta speciale di A fatta in relazione col sistema (o meglio con le sue curve generiche) non avrebbe più rapporti analoghi con quelle curve.

Al sistema dato spettano i seguenti *caratteri rispetto ad* A. La *dimensione virtuale* $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(n.\ n+3 - \Sigma\, \nu.\nu + 1)$, che

(*) Il risultato notevole che in questa seconda Nota aveva ottenuto, egli generalizza alla fine della presente Memoria seguendo un metodo affatto diverso; quantunque com'egli osserva nella prefazione, anche il metodo che là aveva adoperato si potesse ancora applicare.

Digitized by Google

può essere minore della *dimensione effettiva* k del sistema (in tal caso il sistema si dirà *sovrabbondante*): la differenza $k - \mathbf{k}$ è la *sovrabbondanza* del sistema; essa è nulla solo quando il sistema è *regolare*, cioè tale che le condizioni imposte da A sono tutte indipendenti. Il *grado* (secondo JUNG) del sistema, cioè $D = n^2 - \Sigma \nu^2$ (nozione che poi si generalizza coll'espressione $n' n'' - \Sigma \nu' \nu''$ pel *numero delle intersezioni rispetto ad* A di due curve qualunque). Il *genere effettivo* ed il *genere virtuale* (sempre rispetto ad A), definiti da $p = k' + 1$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}' + 1$, ove k' e $\mathbf{k}'$ indicano le dimensioni, effettiva e virtuale, del sistema lineare $[C']$ costituito dalle *curve aggiunte* (sottint. d'ordine $n - 3$) *rispetto ad* A delle C. Fra questi caratteri (che si possono riferire anche ad una sola curva C in rapporto con un dato gruppo A) passano alcune relazioni, fra cui la $D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1$. Si dimostra poi che essi non mutano quando si eseguisce una trasformazione birazionale qualunque del piano, purchè allora si definisca convenientemente il gruppo, trasformato di A, al quale si riferisce il sistema lineare trasformato di $[C]$. Ciò permette di supporre nel seguito che A si componga di punti tutti distinti.

Data una curva irriduttibile C, assumendo per multiplicità virtuali quelle effettive dei punti di A, si ottiene uno stesso valore pei generi effettivo e virtuale; e la considerazione delle curve aggiunte rispetto ad A (di ogni ordine) conduce a definire su C delle *serie lineari di gruppi di punti rispetto ad* A per le quali hanno luogo certe proprietà (alcune delle quali, sotto ipotesi più generali, furono già considerate dal NÖTHER) perfettamente analoghe a proprietà note delle serie segate dalle ordinarie curve aggiunte (in luogo del genere ordinario si ha solo da mettere l'attuale genere rispetto ad A). Ad esempio si ha che se la curva generica del sistema lineare $[C]$ è irriduttibile, la serie g_D^{k-1} (rispetto ad A) che su essa vien segata dalle altre curve del sistema è *completa*.

Segue lo studio dei caratteri nel caso che la curva C sia composta. Qui per ottenere risultati generali occorre la nozione di curva *connessa* (rispetto ad A). cioè di curva composta tale che ciascuna delle sue componenti (irriduttibile o no) abbia colla componente complementare infiniti punti comuni. od almeno un punto d'intersezione rispetto ad A. Si dimostra ad esempio che la curva è certo connessa se il genere effettivo uguaglia il genere virtuale, e che viceversa questo fatto accade sempre quando la curva è connessa (e priva di componenti multiple). Il genere

Digitized by Google

effettivo di una curva composta di due o più altre, il quale in generale non è minore della somma dei generi effettivi di queste, è appunto uguale a tal somma quando quelle parti non hanno a due a due intersezioni rispetto ad A.

Il 2° Cap.° tratta dei sistemi lineari determinati dai punti base e nei quali la curva generica è irriduttibile. Scegliendo allora A e le ν nel modo particolare già accennato, si ottengono dalle cose generali che precedono, dei caratteri *assoluti* $\mathbf{k}$, k, p ($=\mathbf{p}$), D, e delle proprietà *assolute* di un sistema [C]. Qui la serie lineare completa g_{D}^{k-1} che sulla curva generica è segata dalle altre curve di [C] (*serie caratteristica* del sistema) assume una grande importanza. Essa è speciale o non speciale secondo che il sistema è sovrabbondante o regolare; e da ciò seguono subito alcuni utili corollari (così, la sovrabbondanza del sistema non può superare $p-k+1$; in un sistema lineare sovrabbondante di curve iperellittiche il passaggio di una curva per un punto arbitrario porta di conseguenza il passaggio per un altro punto determinato da quello; ecc.). L'applicazione poi di note proprietà delle serie lineari, e specialmente del teorema RIEMANN-ROCH, conduce al teorema seguente: « Se esiste un sistema ∞^{k+r} d'ordine n le cui curve passano soltanto $r-1$ volte per un punto base r-plo a del sistema [C], ma si comportano come le C negli altri punti base, ogni curva aggiunta (d'ordine $n-3$) a [C] che passi per le intersezioni variabili di due curve di [C] avrà un punto r-plo in a; e reciprocamente ecc. ».

Indi si passa allo studio dei caratteri di due *sistemi residui* rispetto a [C], cioè tali che ogni curva dell'uno insieme con una curva dell'altro costituisce una curva di [C]; e delle *curve fondamentali*, cioè delle curve (semplici o composte) che non son segate fuori dei punti base dalla curva C generica. Si ottiene la seguente proposizione: « il genere effettivo di una curva fondamentale (che ammetta un sistema residuo) non può superare la sovrabbondanza del sistema, e se la uguaglia (e se inoltre la serie residua della serie caratteristica del sistema non ha punti fissi), la curva fondamentale contiene ogni punto base del sistema »; e varie altre relative ai caratteri virtuali ed al grado di una curva fondamentale, e non meno notevoli, ma che, per non dilungarci troppo, ci asteniamo dal riferire. Riportiamo invece i singolari risultati a cui si giunge nelle applicazioni ai si-

Digitized by Google

stemi sovrabbondanti col minimo numero di punti base: « Un sistema lineare sovrabbondante ha almeno nove punti base; e se ne ha precisamente nove esso dev'essere necessariamente un fascio di curve (ellittiche) d'ordine $3r$ colla multiplicità r in ogni punto base ». « Ogni sistema lineare di genere p, il quale sia determinato da nove dei suoi punti base e possegga tuttavia altri punti base, può sempre ridursi al tipo $[a_1^p \dots a_8^p a_9^{p-1} b]$ d'ordine $3p$ e dimensione effettiva p; i 10 punti base giacciono sopra una cubica fondamentale ».

Finalmente l'A. si rivolge alla considerazione del sistema aggiunto a $[C]$ e più specialmente del *sistema aggiunto puro* ∞^{p-1} costituito dalle sole parti variabili delle curve aggiunte di $[C]$. L'idea di valersi di questo elemento (invariabile per trasformazioni birazionali) per lo studio del sistema lineare non era stata ancora adoperata da altri; le applicazioni di grande importanza che qui ne son fatte ne mostrano tutta la fecondità e costituiscono un merito speciale di questa Memoria. Il sistema aggiunto puro $[C']$ di $[C]$ non può esser riduttibile se non quando la C generica è iperellittica; ove sia riduttibile e $k > p+1$, la curva generica di $[C']$ si spezzerà in $p-1$ curve razionali. Si ottengono notevoli proposizioni (che servono poi per dimostrare l'ultimo teorema del lavoro) collegando il sistema aggiunto puro con la serie lineare che sulla curva generica di $[C]$ è segata da tutte le rette del piano, ovvero dalle sole rette di un fascio. Indi si dimostrano i teoremi seguenti: « Se la curva generica del sistema aggiunto puro $[C']$ di genere virtuale (rispetto al gruppo base di $[C]$) $\mathbf{p}'$ non forma parte di alcuna curva di $[C]$, si ha $\mathbf{k} < 2p - \mathbf{p}' - 1$; mentre se il sistema $[C']$ ammette un sistema residuo $[C'']$ di dimensione virtuale $\mathbf{k}''$, si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1$ ». « Se $\mathbf{k} > p+1$, il sistema aggiunto puro $[C']$ è regolare ed il suo genere $\mathbf{p}'$ è inferiore a $p-1$ ». L'importanza del primo appare meglio dopo che si è provato che $\mathbf{k}'' \leq 9$: si giunge con ciò alla relazione generale

$$\mathbf{k} \leq 2p - \mathbf{p}' + 7,$$

alla quale fanno solo eccezione quei sistemi che si possono trasformare nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine (per essi si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + 8$). Questo risultato ha un grande valore e merita una speciale attenzione. Da esso si dedu-

Digitized by Google

cono subito una serie di proposizioni importanti, la prima delle quali era già stata ottenuta dall'A. in un lavoro che abbiamo ricordato. « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $3p+5$ si compone di curve razionali; fatta eccezione pel sistema di tutte le cubiche piane e pei suoi trasformati ». « Ogni sistema lineare di dimensione $> 2p+7$, o è contenuto in uno dei sistemi anzidetti, oppure si compone di curve iperellittiche; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in quelli di tutte le quartiche o di tutte le quintiche ». « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $\frac{5}{3}p+9$, o è contenuto in uno dei precedenti, oppure si compone di curve contenenti una serie g^1_3; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in uno di sestiche con un punto base semplice al più, ovvero nel sistema di tutte le curve del 7° ordine ». Il teorema generale di questa serie (nel quale si trova anche un fatto che, per brevità, abbiamo omesso nel riferire i casi particolari precedenti) viene enunciato così: « *Un sistema lineare di genere* p *la cui dimensione* k *soddisfi alla relazione*

$$k \geq (\mu+2)\left(\frac{p}{\mu}+2\right)$$

(μ *intero positivo*) *si può trasformare o in un sistema di curve d'ordine* $\leq 2\mu+1$, *ovvero in un sistema di curve di un certo ordine* M *avente un punto base di molteplicità* $\geq$ M $-\mu$ »; e dimostrato per induzione completa, provando che esso vale pel sistema primitivo se ha luogo pel sistema aggiunto puro. Esso costituisce, come ognun vede, uno dei più generali ed importanti acquisti che si potessero fare in questo campo.

Al sistema aggiunto puro si potrebbero collegare vari altri problemi, alcuni dei quali si trovano accennati nella prefazione. Così esso può dare delle proprietà caratteristiche dei sistemi sovrabbondanti, le quali servano per costruirli. Ad esempio « se in un sistema ∞^p di genere p (non iperellittico) una tra le condizioni imposte dai punti base è conseguenza delle rimanenti, esiste una curva fondamentale di genere (virtuale = effettivo) uno, la quale contiene tutti i punti base del sistema. » Così ancora il sistema aggiunto puro potrà servire per lo studio dei sistemi la cui curva generica contiene una serie speciale di caratteri dati. Esso dà pure una classificazione dei sistemi lineari,

Digitized by Google

se si assumono come criteri di distinzione i generi dei successivi sistemi aggiunti puri. Ecc.

Dal riassunto che ne abbiamo fatto emerge evidente senz'altre considerazioni il valore di questa Memoria. Essa ha una grande importanza sia pei risultati che essa contiene, sia per le vie che apre e pei nuovi originali concetti, per gl'innumerevoli problemi che essa addita, e di cui prepara la soluzione. Essa merita di avere dall'Accademia una piena approvazione.

E. D'Ovidio
C. Segre, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 5 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice Presidente, ROSSI, BOLLATI di SAINT-PIERRE, SCHIAPARELLI, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE MARTIIS, BOSELLI e PEYRON che funge da Segretario.

Vien letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Sono presentati due lavori per la loro inserzione nei volumi delle *Memorie*. Il Presidente nomina due Commissioni, incaricandole di prenderli ad esame e riferirne alla Classe in una delle prossime adunanze.

L' Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

Adunanza del 19 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Claretta, Bollati di Saint-Pierre, Schiaparelli, Ferrero, Carle, Nani, Graf, Boselli, Cipolla e Peyron che funge da Segretario.

Il Presidente annuncia, che da Reale Decreto venne approvata la nomina del Prof. Conte Cipolla a Socio nazionale residente; il quale Decreto fu trasmesso alla Presidenza dal Ministro della Pubblica Istruzione con lettera, di cui si dà lettura.

Il Socio Luigi Schiaparelli legge una sua Monografia che ha per titolo: *Sulla unificazione dell'Italia nei varii periodi della sua storia antica in confronto di quella dell'età presente.*

Il Socio Arturo Graf, condeputato col Socio Ermanno Ferrero ad esaminare il lavoro, che il Prof. Rodolfo Renier presentò per la inserzione nei volumi delle *Memorie* Accademiche. col titolo: « *Ricerche sulla leggenda di Uggeri il Danese in Francia* », riferisce intorno ad esso e conchiude per la lettura del lavoro alla Classe. Questa, uditane la lettura, ne approva ad unanimità di suffragi la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla unificazione e sui confini politici dell'Italia antica nei primi tempi storici in confronto di quelli dell'età moderna;

Lettura del Socio LUIGI SCHIAPARELLI.

§ I. Sono omai trascorsi degli anni da che ebbi l'onore di sottoporre al giudizio della Classe di scienze storiche, morali e filosofiche una lettura sulla geografia preistorica dell'Italia, fattavi astrazione assoluta a quella dell'età storica ed a qualunque politica considerazione (1), che in quell'epoca mi pareva al tutto inopportuna; ciò che più non sembrami nell'attuale periodo, nel quale non solamente nella stampa di diversa indole ed estensione, ma nel Parlamento istesso non di rado si fanno e si rinnovano interpellanze e discussioni sulla unificazione politica della penisola; bellissime in teoria, ma che nella pratica già presentavano nei tempi antichi difficoltà gravissime, che vennero una volta sola radicalmente superate. Comprendesi agevolmente, che i maravigliosi avvenimenti, che in meno di dodici anni (1859-1870) riunirono in un unico Stato, il Regno d'Italia, ben trentuno dei trentatrè milioni dei suoi abitanti abbiano destato in molti un vivo desiderio di vederli tutti congiunti nella medesima politica famiglia (2).

(1) Adunanza del 4 maggio 1884. Volume XIX degli Atti dell'Accademia delle scienze, Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

(2) La popolazione della Penisola nel 1891 non è inferiore a 33 milioni

Digitized by Google

Non havvi dubbio, che l'unificazione politica delle nazioni, congiunte per lingua, etnografia, religione e situazione geografica, sia in se medesimo un grande fatto, avveratosi però molto raramente; un desiderio ed un'aspirazione più o meno viva dei popoli, che si trovano in tali condizioni, e quindi anche degli Italiani; come pure l'impazienza di una frazione più ardente della nostra gioventù di vederla sollecitamente compiuta. Ma, fatta anche astrazione ai trattati, che assicurano a potenze straniere il possedimento di alcune regioni della penisola, questo gran fatto della unificazione politica dei popoli e delle nazioni, considerato in se medesimo e nel successivo suo svolgimento, è forse facile a compirsi in modo stabile e durevole in breve spazio di tempo e ad epoca determinata? Esaminiamo sommariamente alcuni fatti, che la storia antica registra sopra analoghi avvenimenti, e troveremo che avvennero molto raramente, e non ebbero lunga durata, o non si avverarono mai per intiero.

Ne abbiamo un esempio in Egitto nell'età più gloriosa di sua storia sotto le dinastie XII, XVII e XIX e forse XXXIII; ma anche sotto quelle per brevi periodi e non mai per l'intiera loro durata. Esso dovette quella fortuna alla condizione geografica del paese ed alla prevalenza della classe sacerdotale, che aveva grande interesse a conservarla. Negli imperi del bacino dell'Eufrate, del Tigri e nella Persia non mancano esempi di unificazione politica, se diamo questo significato all'aggregazione violenta di popoli, senza riguardi a nazionalità, soggetta a continui disgregamenti, e perpetue ribellioni. L'impero medesimo di Alessandro non ebbe carattere diverso, con una esistenza incomparabilmente più breve.

La Fenicia, a cui non si può negare uno spirito generale di nazionalità, tanto nella Siria quanto nelle colonie dell'Africa e dell'Europa, non ebbe mai unità politica, neppure nella prevalenza quasi assoluta di Sidone e di Tiro; nelle cui grandi solennità religiose dalle più lontane colonie si mandavano rappresentanze con doni ed offerte. La Grecia medesima, che si distinse sopra le altre nazioni antiche per amore della propria nazionalità, sicchè nelle

---

di abitanti, di cui due divisi fra l'Austria-Ungheria, la Svizzera, l'Inghilterra e la Francia, compreso il Nizzardo più italiano che francese per etnografia, ma non geograficamente. Quella del Regno d'Italia passa i 31 milioni.

più rimote sedi, lontani dall'Europa, i Greci si consideravano uniti alla grande nazione ellenica, ancorchè vi adottassero costumi e abitudini della nuova patria, come in Oriente, dove si potevano dire veri Orientali travestiti da Elleni, non ebbe mai politica unità.

Venendo all'Italia, oggetto speciale della presente lettura, noi vi troviamo uno splendido rarissimo esempio di politica unità, la quale però costò quasi otto secoli di lotte sanguinose alla romana repubblica, la potenza conservatrice per eccellenza delle fatte conquiste sopra ogni altro popolo antico; e che tuttavia non riuscì a conseguirla per intiero, che sotto l'impero. Essa però collo imporre e mantenere con braccio di ferro la sua lingua e le sue leggi, giunse a dare all'intiera penisola un'impronta nazionale uniforme così profonda, che nè l'influenza ellenica, nè il soggiorno di tanti stranieri, nè le invasioni e fermate di tanti barbari diversi di lingua, di religione e di costumi, poterono intieramente distruggere; sicchè lo spirito nazionale italico, invano pensatamente depresso, e in alcune regioni quasi soffocato e sepolto pel corso di molti secoli, risorse più vigoroso nell'universale e rifulse più splendido nel secolo XIX.

§ II. Io notava in quello scritto, che primi a far menzione della nostra penisola erano stati gli scrittori greci, niuno dei quali anteriore al X secolo prima dell'êra volgare, se parliamo dei poeti, che in ogni tempo e paese precedettero i logografi e gli storici, questi posteriori tutti al VI e al VII; e aggiungeva, che essi scrissero dell'Italia per incidenza e per udita anzichè di loro proposito e per cognizioni proprie. E quantunque alcuni di età posteriore si proponessero, e taluno si lusingasse di aver rivelato la storia delle età anteriori, nel fatto però, più che chiarire, ne oscurarono maggiormente le vicende e le condizioni con favolose invenzioni e infondate congetture.

Omero del secolo X, con ragione chiamato primo pittor delle memorie antiche ed anche primo geografo, non ha verun concetto positivo dell'Italia, quantunque già una colonia greca fosse penetrata nel Mar Tirreno, quella di Cuma. E tutto ciò, che *quel sommo d'occhi cieco e divin raggio di mente* poetò sulla Sicilia, e sulle isole del Mar Tirreno e del Gionio, è un complesso di favolosi racconti, di notizie vaghe, le più del tutto erronee, sparse ad arte dai navigatori fenici e forse anche etruschi, per tenere lontani dal bacino occidentale del Mediterraneo i merca-

Digitized by Google

tanti greci dell'Europa e dell'Asia Minore per gelosia di commercio, del quale avevano da secoli il monopolio esclusivo, e su cui dominavano colle loro navi senza concorrenti (1).

Esiodo del IX secolo già possiede qualche parziale informazione di luoghi e di popoli della penisola nella sua regione occidentale, come della Sicilia, dei Liguri e dei Latini, ma ignora perfino il nome d'*Italia;* della quale solamente colla fondazione delle colonie greche nella parte meridionale del continente, nelle grandi isole nel secolo VIII e nei seguenti, si cominciarono ad avere e propagare alcune notizie positive, che nel secolo VI si estendevano anche sulle coste del mar ligustico e del Golfo del Lione (*Leonis sinus*). Ma erano indicazioni generali e incomplete (2), senza mai assegnare alla penisola confini geografici determinati, e la denominazione unica d'*Italia*, che designavano con parecchi nomi affatto diversi (3); che lungamente adoperarono scrittori e poeti, ora come indicazione di una regione speciale ed ora dell'intiera penisola, e sulla cui origine etimologica discordavano già gli antichi e non convengono neppure i moderni in tanto progresso della filologia.

---

(1) Luigi SCHIAPARELLI, *Origine e progressi della geografia antica* fino a Tolomeo, capo IV; IDEM, Storia orientale antica, VI edizione, p. 67-70; OMERO, *Iliade*, canto XVIII; *Odissea*, specialmente nei canti IX-XII; UKERT, *Geographie der Griechen und Römer,* erster Theil, *Homerische Welt Tafel;* SIKLER, *Handbuch der alten Geographie;* STRABONE, libro I della geografia, tavola del mondo d'Omero.

(2) UKERT, ibidem, pag. 36; STRABONE, *tavola del mondo d'Esiodo;* SCHIAPARELLI, ibid., pag. 70-71.

(3) Da prima i Greci chiamarono *Ænotria* e *Peucetia* la regione meridionale, che prima conobbero. *Ænotria dicta vel a vino optimo*, *quod in Italia nascitur, vel ab Ænotro rege,* opinione seguita da parecchi scrittori. V. CLUERII, *Italia antiqua*, pag. 5. Come regione, risponderebbe in generale alla Calabria moderna con una frazione di quel di Salerno, e la *Peucezia* all'antica. *Saturnia,* nome antichissimo del Lazio usato nei libri sibillini. *Ausonia,* da cui il mare di questo nome (*Ausonium*): *Hesperia* da principio significava semplicemente paese d'occidente; e quando venne applicato anche alla *Spagna,* all'Italia fu dato l'aggiuntivo di *Magna;* e così dicasi di parecchie altre denominazioni, adoperate variamente, ora come designazione di una regione particolare ed ora dell' intiera penisola ancora sotto l'impero. DIONISIO D'ALICARNASSO, *Antichità italiche*, lib. 1. Gli antichi davano anche l'origine etimologica dei vari nomi, che spiegavano diversamente. V. *Nuova Antologia,* dispensa 15 ottobre 1882, *Il santo nome d'Italia,* di Enrico COCCHIA; e specialmente CLUERIO nell'*Italia antiqua.*

Digitized by Google

§ III. Passiamo oltre sulla singolare congettura di origine ellenica, ripetuta da Marco Varrone e da Columella, seguiti anche da altri scrittori, che il nome d'*Italia e Vitalia* dicevano derivato dalla bellezza e copia dei buoi, e che Sesto Pompeo ricorda con queste parole « *Italia quod magnos habet italos, hoc est boves, nuncupatur* » (1). A questa dichiarazione si accosta la tradizione, che quel nome derivasse da una primavera sacra, guidata nella sua emigrazione da un vitello (*ἰταλος*); ma non riguarderebbe che l'*Enotria*, dove prima sbarcarono i Greci condotti da Enotro, e non abbraccierebbe geograficamente che poco più delle Calabrie attuali. Ma una somigliante etimologia di una parola, che doveva dare e diede il nome alla sede del più formidabile impero del mondo antico, venuta dai Greci, ripetuta in termini dubitativi dagli scrittori latini, e già contestata da Tito Livio medesimo e da Dionisio, va collocata fra le invenzioni e tradizioni favolose, di cui è ingemmata la storia primitiva della penisola e specialmente di Roma. Nè sembrami degno di maggior fede che derivasse da un *Italo*, re dei Liguri negli uni, degli Enotri e dei Siculi in altri, benchè questa opinione sia accettata da Virgilio, da Ovidio e da altri poeti latini (2). E veramente è forse ragionevole e credibile, che la parola Italia (e *Vitalia*), la quale si estese successivamente all'intiera penisola, come definizione geografica assoluta; da cui gli Italiani propriamente detti (*Umbro-Sabelli*) tolsero l'appellativo di *italica*, dato alla grande loro confederazione, che pose in estremo pericolo la romana repubblica, già arrivata alla massima sua potenza, e ne chiamarono *Italica* la capitale detta prima *Corfinium*, avesse così umile e strana origine? E non piuttosto che fosse veramente il nome di una potente frazione delle stirpi italiche, che *ab antico* e ripetutamente anche nel IV e V secolo di Roma, nelle loro invasioni ad ostro, occuparono a vari intervalli anche la regione chiamata Enotria dai Greci, i quali prima conobbero quella parte della penisola?

---

(1) M. VARRONE, *De re rustica*, libro 1, capo IV; COLUMELLA, *De re rustica*, lib. I e IV. Veramente le parole *Italos* e *Italo* significano *Vitello e vitelli*, *vitulus e vituli:* ma la indicazione anche in questi scrittori ed in Festo è data in termini dubitativi.

(2) LIVIO, libro V; DIONISIO, libro I; VIRGILIO, *Eneide*, libro VIII; OVIDIO, libro I dei Fasti; ARISTOTILE nella *Poetica*, libro VII, capo X; ISIDORO nelle *Origini*, ecc.

Digitized by Google

Ma la parola Italia nel suo significato geografico appartiene ad un'età, posteriore di parecchi secoli alle tradizioni primitive pelasgiche, che si suppone possano salire a forse quindici o sedici a C.

Già *Cluerio* e *G. Niebuhr*, singolarmente benemeriti dell'Archeologia e Storia antica della penisola, erano d'avviso, che il nome Italia fosse entrato nell'uso fra i primi popoli storici che la occuparono, Siculi, Liguri, e successivamente Umbro-Sabelli e Latini; che sappiamo essersi più volte avanzati fino all'estrema punta d'Italia, dove i Pelasgi medesimi di Enotro trovarono abitatori di stirpe italica, che respinsero nell'interno od a cui si sovraimposero, dando alla regione il nome di *Enotria*. Il quale, come sinonimo d'*Italia*, fu una tradizione al tutto greca, ancorchè la ripetessero con quel significato anche scrittori latini (1).

§ IV. Ma l'estensione all'intiera penisola della parola Italia, nel suo vero termine geografico, fu senza dubbio un grande avvenimento: il quale però non si potè compiere che gradatamente e in lungo intervallo di tempo, a misura che le sue diverse regioni furono aggregate in un solo corpo politico per opera dei Romani. Noi troviamo di fatto, che ancora nel principio del VI secolo di Roma, già dominatrice di oltre la metà della penisola, la parola Italia geograficamente comprendevane appena la parte continentale ad ostro del Tevere sul Mar Tirreno, e della Marca d'Ancona sull'Adriatico in termini generali: ma, a tramontana di codesti limiti, l'Etruria e tutta la Celtica cisalpina sulle due rive del Po, il paese dei Veneti, degli Euganei, dei Reti e di altri popoli alpini non erano considerati come parte integrante d'Italia. E quando i Romani aggregarono alla repubblica anche l'Etruria, i limiti geografici dell'Italia finivano sul Tirreno alla Magra,

(1 CLUERIO nell'*Italia antica* e Giorgio NIEBUHR nella *Storia romana* prendono in esame critico l'origine dei varii nomi della penisola. E. COCCHIA nella *Nuova Antologia* pubblicò un articolo ben meditato col titolo: *Il santo nome d'Italia, in quale regione propriamente nascesse e come si estendesse al resto della penisola.* Egli lo attribuisce all'Enotria: ma non mi convince, che quelli dell'Enotria fossero veramente i confini settentrionali dell'Italia in quel periodo.

DIONISIO, nel primo libro della sua *Storia italica*, raccolse con grandissima diligenza le numerose tradizioni più o meno favolose su codesta quistione, dalle quali però sembrami che niuna conclusione veramente storica si possa dedurre sulla origine della parola Italia sulla sua etimologia e sul vero suo primitivo significato geografico.

Digitized by Google

e al Rubicone sull'Adriatico; finchè nel secolo VII di Roma vennero estesi all'intiera penisola, tranne alcune regioni alpine, il cui territorio venne aggregato alla repubblica solamente sotto Augusto imperatore.

Non erano bastati ben sette secoli di guerre devastatrici e di successive conquiste a compire l'unificazione politica di popoli, diversi di etnografia e di patria, di coltura, di religione e di costumi, prima che alla penisola venissero assegnati i suoi naturali confini, le Alpi ed il Mare; confini però, che non furono mai rispettati neppure nei tempi antichi, ma ripetutamente violati dalle esigenze usurpatrici della politica, che assai poco si cura dei diritti della geografia, e dagli scrittori medesimi, che su quelli non sapevano accordarsi.

Polibio, ad esempio, storico e geografo insigne ad un tempo del VII secolo di Roma, ne allargava i termini ad occidente fino al bacino orientale del Rodano nei dintorni di Marsiglia sul Golfo del Lione (*Leonis sinus*); luoghi abitati ab antico da stirpi liguri quasi esclusivamente fino al VI secolo. Nel quale vi posero piede colonie elleniche; e dopo il IV vi si stabilirono e prevalsero successivamente i Celti, confusi colle genti ligustiche, mentre ad oriente li restringeva a Pola nell'Istria. Quei confini però furono nuovamente cambiati e ritirati dal Rodano verso le Alpi marittime in tempi non bene accertati, ed a levante si avanzarono; finchè Augusto li fissò al Varo ad occidente, confermandoli a Pola ad oriente « *Finis et Hesperiae, promoto limite Varus* »; e sono i limiti indicati da Strabone e da Plinio.

Ma, ancora nel primo secolo dell'èra volgare, il confine occidentale era ristretto ad oriente di Nizza, che *Pomponio Mela* nella sua geografia colloca nella Gallia; e parrebbe, che la linea di divisione coll'Italia fosse il gruppo delle Alpi marittime, di cui è il contrafforte più occidentale la *Turbia*, che si avanza nel mare fra Nizza e Mentone, dove sorgeva il monumento d'Augusto.

Durante l'impero romano non sembra che cambiasse notabilmente, giudicando dagli *itinerari* di *Antonino* e *Teodosio*, e da Ammiano Marcellino. Poichè nell'itinerario del primo si legge « *Lumone, Alpe summa hucusque Italia, ab hinc Gallia* »; e subito dopo trovasi *Cemenelium* (*Cemellum e Cemnellum*) sul pendìo o versante occidentale delle estreme Alpi marittime ad oriente del Varo nel paese dei Vedanzi. Se nell'Alpes summa debba intendersi il *Colle di Tenda*, come parrebbe, non è ben chiaro,

Digitized by Google

ma ad ogni modo Nizza vi è collocata nella Gallia. Nè questo fu l'ultimo limite dell'Italia ad occidente: perchè, nella geografia dell'anonimo di Ravenna del VI secolo, lo troviamo respinto a Ventimiglia sulla Roja, che è quello imposto da Napoleone terzo, il quale pretendeva avanzarlo fino a Savona (1), mentre già si innoltra in alcuni luoghi anche sulla sinistra di quel fiume.

§ V. Nelle Alpi Cozie, fino ad Augusto, i confini d'Italia nella valle della Dora Riparia non arrivavano ai piedi della catena: e solamente con quell'imperatore si estesero all'interno e alla parte occidentale per l'annessione alla regione XI del regno di Cozio; conservatosi indipendente nell'interno delle Alpi ancora ai tempi di Giulio Cesare con residenza a Susa, che ne era la città principale; e comprendeva terre e paesi posti sul doppio pendio delle medesime, fra cui i *Centroni* nella Savoia, i *Caturigi* sull'alta Durenza, tutti considerati come parte integrante d'Italia secondo l'esplicita testimonianza di Plinio, il quale ne termina la descrizione con queste parole: « *Questa è l'Italia consacrata dagli dei, questi i popoli e le città* », della quale però non facevano parte le isole, aggregatevi poi da Costantino nel IV secolo (2).

Ma anche quei confini della regione XI d'Augusto nelle Alpi Cozie furono più volte cambiati, restringendoli ad oriente prima a *Scincomagus* presso Cesana sull'alta Dora Riparia, e poscia a Susa, ed anche più ad oriente di questa città. Lo stesso avveniva nella valle della Dora Baltea nel paese dei Salassi, vinti dai generali d'Augusto, che vi fondava Augusta pretoria; nè accadeva dirersamente nelle Alpi retiche, state annesse alla repubblica sotto quell'imperatore. Nelle quali non solo il Trentino, ma la

---

(1) LUCANO nella *Farsaglia*, libro I, verso 404; STRABONE, libro IV e V; M. VARRONE, ibid. II, 5; DIONISIO, ibid. I, § IV; PLINIUS S., *Historiae mundi*, capo III, § 6; *Geographia Ptolemaei*, lib. III, cap. 1; POMPONIO MELA, II, § 5; AMMIANO MARCELLINO, XV, § IV e II; KIEPERT, *Atlas der alten Welt* ediz. XIV; MENKE e FORBIGERO, *Orbis antiquus*: DURANDI, *il Piemonte antico*, pag. 77; SALUZZO, *Le Alpi che cingono l'Italia*; UKERT, ibid., vol. II, p. 81 e 431, ecc.

(2) Questo Cozio, figlio del re Donno, fece omaggio del suo regno ad Augusto, al quale innalzò un arco trionfale, tuttavia esistente vicino a Susa coll'antica iscrizione che ricorda i popoli vinti dai generali di quell'imperatore, ma spogliato degli ornamenti di metallo, di cui era fregiato. Continuò poi ad essere prefetto per Augusto del suo antico Stato. PLINIO, libro III, § 24; UKERT, DURANDI, ecc.

Digitized by Google

valle intiera dell'Adige fin oltre il Brennero, e tutto il corso del fiume erano compresi nella regione X dell'Italia, alla quale i Romani avevano aggregate parecchie terre del versante settentrionale delle Alpi Carniche e delle Giulie, fra cui Emona o *Julia Augusta* (Laybach), *Carnium* (Krainburg), *Nauportus* (Ober Laybach) nella Carniola Austro-ungarica. Codesti mutamenti continui dei termini artificiali di una contrada, che fin dalla sua costituzione geologica ebbe sempre confini naturali immutabili ed immutati nelle Alpi e nel Mare, dipendevano da ragioni esclusivamente politiche, che, come abbiamo già osservato, poco o nulla rispettarono e rispettano i diritti della geografia e dell'etnografia (1).

§ VI. Codesti tramutamenti continui dei termini artificiali d'Italia, che si continuarono anche nell'età moderna, non riuscirono finora a compiere l'unificazione intiera della penisola; di cui una frazione dipende tuttavia da quattro governi stranieri, non tenuto conto della microscopica repubblica di San Marino, che ha un reggimento nazionale. Il desiderio di unire quelle terre al Regno italico è certamente comune alla grandissima maggioranza degli Italiani, almeno in teoria, benchè in pratica il numero si riduca a ben pochi con molte e radicali riserve; e si restringano ai possedimenti austro-ungheresi, anzi i più al solo *Trentino*, oggetto dell'ultima parte della presente lettura, riservando ad una seconda parlare della Gorizia e dell'Istria con Trieste. Ed a chiarire possibilmente questo argomento, gioverà riassumere un poco di storia antica e moderna.

Quali popoli, di quale stirpe e civiltà relativa, abitassero il Trentino avanti che vi si rifugiassero alla prima invasione celtica gli Etruschi col nome di Reti, secondo l'affermazione di scrittori latini, ignorasi quasi compiutamente, non essendo pervenute a noi che incertissime tradizioni (2). Occupato dai Romani sotto

(1) Plinio, ib., lib. III, §§ 22 e 23; Sikler, ib., p. 293, vol. I; Cluerio, pag. 19, riporta questo periodo di Erodiano: « ad primam Italiae urbem per« ventum, quae Hemone ab incolis vocatur. Ea sita est in extrema planitie ad « Alpium (*pannonicarum*) radices. Statim oriente sole (*milites*) ad Alpes ac« cesserunt ». Anche Tolomeo colloca *Emona* nella Pannonia.

(2) L'origine etrusca dei Reti è ricordata da Livio, da Giustino e da Plinio, in termini espliciti; Livio, V, §§ 33; Giustino, 20, 5; Plinio, 3, 23). È seguita da numerosi scrittori moderni, mentre è combattuta da altri. Il popolo abitatore antichissimo del Trentino è da alcuni chiamato *Sopra Borea* (*al*

Digitized by Google

Augusto, fu una colonia dell'impero; e Trento, capo della medesima, era una città d'importanza, considerata la sua situazione, come fortezza di frontiera, e sulla grande strada militare e commerciale, che dall'Italia guidava nella Germania in largo significato. Nelle varie divisioni dell'impero rimase lungamente riunito all'Italia anche politicamente; e nella sua dissoluzione fece parte del regno dei Goti sotto gli auspizi di Costantinopoli, con *Teodorico:* dopo il quale fu invasa da numerose genti barbariche, e occupata poi dai Longobardi, di cui fu un ducato potente, sicchè uno dei suoi duchi ardì aspirare alla corona d'Italia.

Nella invasione dei Franchi, sul principio del secolo IX, Carlo Magno incorporava il Trentino al Regno d'Italia (806), assegnato prima al figlio Pipino e poi al nipote Bernardo. Ebbe anche titolo di Marca, e Trento, capo della medesima, continuò ad essere città ragguardevole; come si mantenne nelle successive politiche vicende del nuovo impero d'Occidente a motivo della sua posizione geografica; finchè nel secolo XI il Trentino veniva convertito dall'imperatore Corrado II (1027) in principato autonomo, assegnato ai vescovi di Trento, che governarono per oltre sette secoli in numero di 51 fino al 1796 nella invasione francese.

Morto poi l'ultimo di essi (1800), vi si introdusse l'Austria: che, uscitane per breve tempo dopo Marengo e pel ritorno dei Francesi, vi rientrava per la pace di Lunéville (1802). È vero, che quattro anni dopo Napoleone glielo ritoglieva (1806), aggregandolo alla Baviera; e tre anni appresso (1809) lo univa al nuovo suo Regno d'Italia, come compartimento dell'Alto Adige. Ma l'opera gigantesca e violenta del gran Côrso non poteva durare dopo la folle spedizione di Russia: e, prima ancora della sua caduta, già nel 1813 lo occupavano colle armi gli Austriaci, il cui imperatore Francesco primo, impadronitosi del Trentino, riuscì ad assicurarsene il possedimento, facendo comprendere nella Confe-

---

nord del mare di Borea cioè dell'Adriatico). Ma la *Rhaetia* nell'Impero romano aveva confini più estesi del Tirolo e del Trentino; il quale ultimo però con quel nome era chiaramente indicato come frontiera dell'Italia a settentrione: « *A septemtrionibus Italia terminatur Alpium jugis quae Rhaetiae imminent* », *Geographia Ptolemaei*, *Venetiis*, 1564, pag. 58, *Italiae situs*. Era divisa in *prima* e *seconda* presso i Romani, e la Rezia prima comprendeva anche tutto al Trentino. SIKLER, vol. 1, p. 231.

Digitized by Google

derazione germanica non solo il Trentino, ma anche la Gorizia e l'Istria con Trieste, assicurandosene per tale patto l'assoluto dominio colla guarentigia della Confederazione (1); la quale da parte sua si apriva libero accesso all'Adriatico e al Mare Mediterraneo, che anche attualmente l'Impero Germanico, succeduto alla Confederazione, ha forse qualche interesse a conservare.

§ **VII**. Dopo quegli avvenimenti il Trentino diventò di massima importanza militare e politica all'Austria, come anello di congiunzione cogli altri suoi possedimenti italiani; e prese quindi tutte le precauzioni per assicurarsene il dominio in avvenire, adoperandosi con somma diligenza ad assimilarlo possibilmente al territorio austriaco. Cambiata la denominazione di Trentino in quella di *Tirolo italiano*, ne confuse l'amministrazione con quella dell'austriaco; la cui capitale *Insprruch* diventò sede unica centrale politica e amministrativa anche pei Trentini; e adottò le più minute cautele per germanizzarli, senza troppa speranza di riuscire nell'intento per più motivi. Oltre la generale inclinazione ad unirsi agli altri popoli italiani, ne sono fra gli altri gravissimo argomento la parte presa nelle guerre dell'indipendenza da numerosi Trentini nell'esercito italiano e nelle schiere di Garibaldi, e la loro insistenza, dal 1815 all'età presente, per ottenere almeno una amministrazione autonoma e separata, che non poterono mai conseguire.

Un somigliante sistema di governo dell'Austria e dell'Austria-Ungheria potevasi giustificare colla necessità della difesa della Lombardia e della Venezia, e della conservazione della sua preponderanza politica nella penisola. Ma, dopo l'unione di quelle due contrade al Regno d'Italia, tale argomento non ha più valore, non essendo il Trentino necessario militarmente alla difesa dell'impero Austro-ungarico, il quale ha parecchie altre vie per mantenere la comunicazione immediata colle terre, che possiede nella regione orientale della penisola, a cui sovrasta dalle Alpi Carniche e dalle Giulie ad un tempo.

Non si può tuttavia contestare seriamente, che se il Trentino

---

(1) L'Austria-Ungheria nella statistica e nell'amministrazione dell'impero comprende sempre e confonde il Trentino nel Tirolo. L'estensione nel 1891 appare di 27,000 chilom. q. con 800 mila abitanti, di cui più della metà sono Trentini. *Gotha*, 1861.

Digitized by Google

è di poca o niuna utilità all'Austria-Ungheria per la difesa dell'impero, non le sia però di somma utilità militare per l'offesa nell'avvenire. Poichè esso è una lancia, piantata nel fianco del Regno d'Italia; una strada, anzi un insieme di eccellenti vie militari, aperte agli eserciti austro-ungheresi ed alemanni a scendere nella penisola, non ostante il famoso quadrilatero, ora trilatero di Mantova, Peschiera e Verona (1), da molti anni in mano agli Italiani; sapendosi per lunga esperienza, che nelle grandi guerre una buona vittoria campale basta spesso a rendere inutili e far cadere le più robuste fortezze.

§ **VIII.** Conclusione. — Considerata quindi da un lato la pochissima e niuna utilità del Trentino per la difesa dell'impero Austro-ungarico coll'avversione generale dei suoi abitanti alla dominazione straniera; tenuto conto dall'altro del desiderio ragionevole del Regno d'Italia di torsi dal corpo quel cuneo pericoloso, e del comune interesse dei due Stati di mantenere lungamente le reciproche amichevoli politiche relazioni, che omai da tre lustri congiungono le due monarchie, desiderabili ed utili ad entrambe; tutte queste ed altre analoghe considerazioni di fatto, e avvenimenti politici che possono sorgere improvvisamente, rendono sommamente probabile l'annessione pacifica del Trentino al Regno d'Italia.

E non a caso io dissi annessione pacifica: poichè ogni tentativo violento di accelerare un tale avvenimento, sia per irruzioni esterne di volontari e di corpi franchi, sia per moti interni dei Trentini, nel presente stato politico dell'Europa e dei rapporti amichevoli del Regno d'Italia coll'Impero Austro-ungarico, non farebbe che allontanarne maggiormente il momento opportuno, aggravando le non desiderabili condizioni dei Trentini medesimi; i quali si restringono a domandare ai fratelli italiani di non dimenticarli e di tenere presente l'attuale loro stato, per metterlo in evidenza e giovarsene in tempo opportuno per concorrere alla loro unione ai fratelli italiani, avvenimento non improbabile in avvenire.

La potenza militare del Regno d'Italia e la sua stabilità politica sono incontestabili e fuori di ogni diplomatica discussione:

---

(1) Legnago cessò di farne parte come difesa militare.

Digitized by Google

e possono facilmente nascere circostanze, in cui il concorso dell'esercito e dell'armata italiana sia per essere di tale utilità all'Austria-Ungheria, da dover preferirne l'amicizia e l'aiuto alla occupazione di una provincia, che l'esperienza di tre quarti del presente secolo ha provato, e prova che difficilmente riuscirà a conciliare ed affezionare all'impero (1).

RELAZIONE sopra uno scritto presentato dal Prof. R. RENIER *alla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche per la inserzione nelle Memorie dell'Accademia.*

Il prof. R. RENIER, della R. Università di Torino, presentò alla Classe di scienze morali, storiche e filologiche, per la inserzione nelle Memorie dell'Accademia, una monografia intitolata *Ricerche sulla leggenda di Uggeri il Danese in Francia*, e nella tornata del 5 corrente aprile i sottoscritti furono invitati a prendere il manoscritto in esame, a riferire intorno ad esso, e a fare, quanto alla stampa, le opportune proposte.

La monografia del prof. Renier è composta di otto capitoli, il primo dei quali contiene una introduzione, e l'ultimo le conclusioni. Suo proposito fu di raccogliere, per la prima volta, in

(1) AGOSTINO PERINI, *Il Trentino colla regione subalpina dell'Adige*, Milano, 1854; GAZZOLETTI, *La questione del Trentino*, Milano, 1860; CHARLES DE MAZADE, *Venise et l'Italie*, *Revue des deux mondes*, 1866, vol. 65, ecc. ecc.

Un tale politico avvenimento sarebbesi per avventura compiuto largamente nel 1866, se la fortuna avesse arriso alle armi italiane. Ma, respinte a Custoza (2 *Giugno*), e vinte a Lissa (20 *Luglio*), per le condizioni dell'armistizio di Cormons (12 *Agosto*), le truppe italiane dovettero sgombrare dal Trentino, che in parte già occupavano; e che quindi rimase all'Austria-Ungheria, a cui lo confermò il trattato di Vienna (3 *Ottobre*), che regola le nostre relazioni internazionali con quell'impero. V. la *Corrispondenza epistolare di Michelangelo Castelli*, pubblicata da CHIALA, Torino, Roux, lett. 704, 706, 708, 709, 714 e seg.

Digitized by Google

uno scritto speciale, tutte le notizie e i cenni già dati sparsamente da altri intorno alla leggenda francese di Ogier, ch'è una delle maggiori e più importanti del vastissimo ciclo carolingio; indicare i caratteri proprii delle singole redazioni; notare tutte quelle colleganze e istituir quei raffronti che valgono a farne intendere meglio la genesi, lo svolgimento, le variazioni.

Notato come sieno assai scarse le notizie storiche concernenti l'eroe, e come questi, secondo che la leggenda cel mostra, non sia, molto probabilmente, una persona unica, ma una persona, per così dire, molteplice, prodotta cioè dall'agglomeramento di più persone per lo innanzi distinte, il quale processo, familiare alla leggenda in genere, è più particolarmente familiare alla leggenda epica; notato inoltre che Uggeri, in origine, non fu, quasi certamente, danese, ma francese; l'Autore passa in rassegna i varii e numerosi racconti in cui ebbe a raccogliersi la leggenda dell'eroe, e partitamente discorre delle attinenze e vicende loro. Prende le mosse dal poema più antico pervenuto sino a noi, il quale si crede composto da Raimbert de Paris nell'ultimo terzo del XII secolo e ne analizza il contenuto. Giudica che non si abbia in esso la leggenda di Ogier nella forma più genuina ed antica, ma che questa si possa meglio scorgere nei racconti italiani, cioè nel testo franco-veneto del ms. XIII della Marciana, nel *Danese* in rima e nel *Danese* in prosa; e confronta la storia che in essi è narrata di Ogier con quanto di costui dicono la *Karlamagnu-sagas* islandese, il libro popolare danese, i *Reali di Francia*, la romanza spagnuola del Marchese di Mantova.

L'Autore entra nello studio di molti altri argomenti speciali di cui sarebbe malagevole dare una relazione succinta. Parla di quella generazione di leggende a ritroso ch'è, si può dire, costante nei cicli epici, e dei poemi del padre e dell'avo di Ogier, e del poema di Adenet le Roi, concernente la fanciullezza di costui, e di redazioni tarde e rifacimenti varii, notando l'introduzione di elementi nuovi nella leggenda, e la trasformazione lenta e graduale degli antichi temi.

I sottoscritti non dubitano di affermare che la monografia presentata dal prof. R. Renier mostra una conoscenza amplissima e sicura di tutto quanto s'appartiene all'argomento da lui preso a trattare, e di tutto quanto ancora può collegarsi ad esso;

Digitized by Google

ch'è condotta con ottimo metodo, del che porgeva arra certissima il nome stesso dell'Autore; e che sarà bene accolta da quanti attendono al difficile studio delle letterature medievali.

Per queste ragioni essi propongono che la monografia del prof. Renier sia letta alla Classe.

Torino, 19 Aprile 1891.

E. Ferrero.
A. Graf *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Gaspare Gorresio.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dall'8 al 22 Marzo 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono

Donatori	
Soc. scientifica Argentina (Buenos Aires).	* Anales de la Sociedad científica Argentina, etc.; t. XXXI, entrega 2. Buenos Aires, 1891, in-8°.
Id.	— Revista Argentina de Historia natural; Publicacion bimestral dirijida por Florentino AMEGHINO; t. I, entr. 1. Buenos Aires, 1891; in-8°.
Società asiatica del Bengala (Calcutta).	* Journal of the asiatic Society of Bengal; vol. LVIII, part. 2, n. 7, 1889; vol. LIX, n. 2, 3, 1890. Calcutta, 1890; in-8°.
Acc. delle Scienze di Cracovia.	* Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie; Comptes rendus des séances de l'année 1891, Fevrier. Cracovie; in-8°.
R. Soc. geologica di Edimborgo.	* Transactions of the Edinburgh geological Society; vol. VI, part. 2. Edinburgh, 1890; in-8°.
Accad. di Sc. nat. di Filadelfia.	* Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia; part. III, October-December 1890. Philadelphia, 1891; in-8°.
Società di Medicina e St. nat. di Heidelberg.	* Verhandlungen des Naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg; neue Folge; IV Band, 4 Heft. Heidelberg, 1891; in-8°.

Digitized by Google

* Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XVI, n. 3; Band XVII. n. 1. Leipzig, 1891; in-8° gr. — R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).

* Zoologischer Anzeiger herausgegeben von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig, etc.; XIV Jahrg. n. 358. Leipzig, 1891; in-8°. — I. V. CARUS (Lipsia).

* Proceedings of the R. Society of London; vol. XLIX, n. 297. London, 1891; in-8°. — Società Reale di Londra.

* Transactions of the Manchester geological Society, etc.; vol. XXI, parts 2, 3, 4 and 5. Manchester, 1890; in-8° — Soc. geologica di Manchester.

* Giornale di Scienze naturali ed economiche, pubblicato per cura della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo; vol. XX (anno 1890). Palermo, 1890; in-4°. — Soc. di Sc. nat. ed economiche di Palermo.

— Bullettino della Società di Scienze nat. ed economiche di Palermo; n. 1; in-4°. — Id.

Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti di Palermo; annata XIII, 1890, Maggio-Agosto. Palermo, 1890; in-8° gr. — Collegio degli Ing. ed Arch. di Palermo.

Bulletin de la Société philomatique de Paris, etc.; 8e série, t. II, n. 4. Paris, 1890; in-8°. — Soc. filomatica di Parigi.

* Annalen des Physikalischen central-Observatoriums herausgegeben von H. WILD, etc.; Jahrg. 1889: Theil II. St.-Petersburg, 1890; in-4°. — Osserv. fis. centr. di Pietroborgo.

Geschichte des Donau-Mauth-und Urfahr-Rechtes der k. Freistadt Pressburg von Dr. Johan von KIRALY, k. Ung. Honvéd Oberlieutenant-Auditor: Als Festschrift zur feierlichen Eröffnung der Stehenden « Konig Franz Joseph-Brücke » herausgegeben Durch die Stadt Pressburg (deutsche Aufgabe). Pressburg, 1890; pag. 252 in-8°. — Dott. Giovanni von KIRALY Presborgo.

Bollettino della Società generale dei Viticoltori italiani; anno VI, n. 4, 5. Roma, 1891; in-8° gr. — Società generale dei Viticol. ital. (Roma).

* Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia, 3a serie, vol. I, n. 11 e 12. Roma, 1890; in-8°. — R. Com. geolog. d'Italia (Roma).

* Rivista di Artiglieria e Genio; vol. I, febbraio 1891. Roma; in-8°. — La Direzione (Roma).

Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XX, disp. 1. Roma, 1891; in-4°. — Soc. generale degli Spettr. ital. (Roma).

Digitized by Google

Club alpino ital. (Torino). * Rivista mensile del Club alpino italiano, ecc.; vol. X, n. 2. Torino, 1891; in-8°.

Soc. meteor. ital. Torino. * Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, ecc.; serie 2ª, vol. XI, n. 1, 2. Torino, 1891; in-4°.

Id. — Frontespizio e Indice del vol. XI, serie 2ª, anno 1890; 1 fasc. in-4°.

Governo degli St. Un. d'Am. (Washington). Report of the Superintendent of the U. S. Coast and geodetic Survey showing the progress of the work, during the fiscal year ending with June 1888; part I, Text, and part II, Sketches. Washington, 1889; in-4°.

L'Autore. Le travail musculaire et l'energie qu'il représente, par A. Chauveau, Membre de l'Institut. Paris, 1891; 1 vol. in-8°.

L'A. Sopra un teschio del primo periodo dell'età della pietra, rinvenuto in quel d'Arpino: dalla Memoria inedita « L'uomo preistorico in Italia, considerato dal punto di vista craniologico »; per Abele De Blasio. Napoli 1891; 1 fasc. in-8°.

L'A. Electrical industries in St. Louis: — Adress by Francis E. Nipher, retiring President of the Engineers' (Club of St. Louis; December 17, 1890; 1 fasc. in-8°.

Id. — The State Weather service; by Francis E. Nipher· 1 fasc. in-8°.

L'A. Litotrissia e Litolapassia: con 308 atti operativi e 3 tavole litografate per il Dr. Gustavo Usiglio; 2ª edizione. Trieste, 1888; 1 fasc. in-8°.

Dal 22 Marzo al 12 Aprile 1891

Donatori

Stazione enolog. d'Asti. * Le Stazioni sperimentali agrarie italiane — Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, ecc., e diretto dal Prof. Ing. Mario Zecchini; vol. XX, fasc. 2. Asti, 1891; in-8°.

Acc. di Scienze Lettere ed Arti di Batavia. * Tijdschrift voor Indische Taal-, Land-en Volkenkunde; uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, etc.; Deel XXXIV, Aflevering 2. Batavia, 1890; in-8°.

Id. — Notulen van de Algemeene en Bestuurg-Vergaderingen, etc.; Deel XXVIII, Aflev. 2. Batavia, 1890; in-8°.

La Direzione (Berlino). * Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begründet von C. Ohrtmann, etc., herausg. von Emil Lampe: Band XX, Heft 2. Berlin, 1891; in-8°,

Digitized by Google

Di Fortschritte der Physik in Jahre 1885; Dargestelt von der physik. Gesellschaft zu Berlin; XLI Jahrgang, I Abth. Berlin, 1891; in-8°. — Berlino * *

* Mittheilungen aus dem Jahrbuche der k. Ungarischen geologischen Anstalt; VIII Band, 9 Heft; IX Band, 2 Heft. Budapest, 1890; in-8° gr. — R. Soc. geologica Ungherese (Budapest).

— Földtani könzlöny, etc.; XX Kötet, 5-12 Füzet. Budapest, 1890; in-8° gr. — R. Istit. geologico Ungarese (Budapest).

— Erläuterungen zur geol. Specialkarte der Länder Ung. Krone, etc. — Umgebungen von Torda Blatt $\frac{\text{Zone 19}}{\text{Col. XXIX}}$ (1:75,000), etc., von Dr. A. Koch. Budapest, 1890; in-8° gr. — Id.

* Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol. XX, n. 8. — The partial eye in Some Lizards from the Western United. States; by W. E. Ritter. Cambridge, U. S. A., 1891; n-8°. — Museo di Zool. compar. (Cambridge, Mass.).

* Transactions of the Cambridge philosophical Society; vol. XV, part. 1. Cambridge, 1891; in-4°. — Società filosofica di Cambridge.

— Proceedings of the Cambridge philosophical Society; vol. VII, part. 3. Cambridge, 1891; in-8°. — Id.

* Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania; serie 4ª, vol. II. Catania, 1890; in-4°. — Accad. Gioenia di Catania.

— Bullettino mensile dell'Accademia Gioenia di Sc. nat. in Catania, ecc.; nuova serie, fasc. XVI, XVII. Catania, 1891; in-8°. — Id.

* Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo D. F. Gomes Teixeira, vol. X, n. 1. Coimbra, 1891; in-8°. — F. Gomes-Teixeira.

* Katalog der Vogelsammlung im Museum der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft in Frankfurt am Main, von Ernst Hartert. Frankfurt a. M., 1891; 259 pag. in-8°. — Società Senkenbergiana di Sc. naturali (Francoforte.

* Oeuvres complètes de Christian Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences; vol. III. — Correspondance (1660-1661). La Haye, 1890; in-4°. — Società Olandese delle Scienze (Harlem).

* Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XVII, n. 2. Leipzig. 1891; in-8° gr. — R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia).

— Berichte über die ,Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft zu Leipzig, 1890, III, IV. Leipzig. 1891; in-8°. — Id.

* Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. J. V. Carus in Leipzig, etc.; XIV Jahrg., n. 359. Leipzig, 1891; in 8°. — Prof. J. V. Carus (Lipsia).

Digitized by Google

Lipsia. * * | Geschichte der Chemie von der Aeltesten Zeiten bis zur Gegenwart; zugleich Einführung in das Studium der Chemie, von Dr. Ernst von Meyer. Leipzig, 1889; 1 vol. in-8°.

R. Soc. astron. di Londra. | * Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 4. London, 1891; in-8°.

Osservatorio meteor.-magnet. del Messico. | * Boletin mensual de l'Observatorio meteorológico-magnetico central de México: Resumen del año de 1889; 1 fasc. in-4°.

Id. | — Tablas psycrométricas calculadas para la altura de México: Tablas abreviadas generalas compiladas por José Zendejas. México, 1889; 1 fasc. in-8°.

Staz. Zoologica di Napoli. | — Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel, etc.; IX Band, 4 Heft. Berlin, 1891; in-8°.

La Direzione. (Nuova York). | * The Journal of Comparative Medicine and veterinary Archives, edit. by W. A. Conklin; vol. XII, n. 3. New York, 1891; in-8°.

Circolo Matem. di Palermo. | * Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; t. V, fasc. 1, 2. Palermo, 1891; in-8° gr.

La Redazione (Parigi). | Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc., publiées par A. Gouguenheim; t. XVII, n. 3. Paris, 1891; in-8°.

Società fisico-chimica di Pietroborgo. | Journal de la Société physico-chimique russe à l'Université de St.-Pétersbourg; t. XXIII, n. 1. St.-Pétersbourg, 1891; in-8°.

Soc. generale dei Viticol. ital. (Roma). | Bollettino della Società generale dei Viticoltori Italiani; anno V, n. 9. Roma, 1891; in-8° gr.

La Direzione (Roma). | * Rivista di Artiglieria e Genio; vol. I, marzo 1891. Roma; in-8°.

R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. | * Atti della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena; serie 4ª, vol. II, fasc. 9-10; vol. III, fasc. 1, 2. Siena, 1891; in-8°.

Il Municipio di Torino. | Bolletttno medico-statistico dell'Ufficio d'Igiene della città di Torino; anno X, n. 1-6. Torino, 1891; in-4°.

Id. | — Consiglio Comunale di Torino, 1890-91, IX — Sessione straordinaria, seduta unica, 25 febbraio 1891; in-4°.

Società degl'Ingegneri e degli Architetti di Torino. | * Atti della Società degli Ingegneri e degli Architetti di Torino; anno XXIV, 1890, n. 30 della serie completa degli Atti. Torino, 1890; in-4°.

Club alpino ital. (Torino). | * Rivista mensile del Club alpino italiano, ecc.; vol. X, n. 3. Torino, 1891; in-8°.

Digitized by Google

* Transactions of the Canadian Institute; vol. I, part 1, n. 1. Toronto, 1890; in-8°. — Istit. Canadiano (Toronto).

Neptunia — Rivista mensile per gli studi di Scienza pura ed applicata sul mare e suoi organismi, ecc.; Direttore Dott. D. Levi-Morenos; anno I, n. 1, 2, 3. Venezia, 1891; in-8°. — La Direzione (Venezia).

* Notarisia — Commentarium phycologicum: Rivista bimestrale consacrata allo studio delle alghe, ecc.; anno V, n 22. Venezia, 1890; in-8°. — La Direzione (Venezia).

* Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwiss. Classe, LVI Band. Wien, 1889; in-4°. — Imp. Accademia delle Scienze di Vienna.

— Sitzungsberichte der k. Akademie, etc.; mathem.-naturw. Classe; 1 Abth., XCVIII Band, 4 bis 10 Heft; XCIX Band, 1 bis 3 Heft. — 2 Abth., XCVIII Band, 4 bis 10 Heft, XCIX Band. 1 bis 3 Heft. — Enthält die Abhandlungen aus dem Gebfete der Chemie, XCVIII Band, 4 bis 10 Heft; XCIX Band, 1 bis 3 Heft. — 3 Abth., XCVIII Band, 5 bis 8 Heft; XCIX Band, 1 bis 3 Heft. Wien, 1889-90; in-8°. — Id.

Astronomische Arbeiten des k k. Gradmessungs-Bureau, etc., II Band, Längenbestimmungen. Wien, 1890; in-4°. — Uffizio internaz. per la misura del grado (Vienna).

* Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt; 1891, n. 2-4. Wien; in-8° gr. — I. R. Soc. geol. di Vienna.

* Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; neue Folge, XXIV Band, n. 6. Würzburg, 1890; in-8°. — Società fisico-medica di Würzburg.

— Sitzungs-Berichte der physik.-medic. Gesellschaf. zu Würzburg; Jahrg. 1890. n. 8-10. Würzburg, 1890; in-8°. — Id.

United States Coast and geodetic Survey, T. C. Mendenhall Suprintendent: Bulletin n. 19-21. Washington, 1891; in-4°. — Governo degli Stati Uniti d'Am. (Washington)

Di alcune correlazioni di sviluppo per la statura umana e l'altezza del corpo seduto; Studio di antropometria del Dott. Prof. Paolo Riccardi. Modena, 1891; 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

G. Romiti — Sull'anatomia dell'utero gravido; 2ª Nota (Estr. dal *Monitore zoologico italiano*. anno II, n. 2, Firenze, 1891); 1 fasc. in-8°. — L'A.

Il bacino terziario e quaternario del Piemonte: – Bibliografia - Geologia pura - Paleontologia – Geologia applicata -; con tre carte geologiche, ecc.; Studio di Federico Sacco, 1889-1890. Milano, 1889; 1 vol. in-4°. — L'A

Generale account of the collection of calculations in Trigonometry and Astronomy, by Edward Sang. Edinburgh, 1890; 5 pag. in-4°. — L'A.

Digitized by Google

L'Autore. Ueber das Stundenzonen-System der amerikanischen Eisenbahnen; von Dr. K. SCHRAM (Auszug aus einem Vortrage, gehalten in Wissenschaftlichen Club am 16 Dec. 1889); 4 pag. a due col. in-4°.

Id. — Adria-Zeit; von Dr. R. SCHRAM. Wien, 1889; 1 fasc. in-8° picc.

Id. — Ausländische Stimmen über die Adria-Zeit; von Dr. R. SCHRAM (Separatabdruck aus der « Wienner Zeitung »); 1 fasc. in-8° picc.

Id. — The actual state of the Standar Time question; by Dr. R. SCHRAM (From *The Observatory*, n. 161, April 1890); 1 fasc. in-8° picc.

Id. — Der Meridian von Jerusalem; von Dr. R. SCHRAM. Wien, 1891; 1 fasc. in-16°.

Id. — La zona oraria dell'Adriatico; del Dr. Roberto SCHRAM: versione dal tedesco a cura della *Redazione dell'Osservatorio Triestino:* riprodotto dalle appendici del giornale. Trieste, 1890; 1 fasc. in-16°.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 15 Marzo al 5 Aprile 1891

Donatori

Società storica di Berlino. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft im Aufrage der historischen Gesellschaft zu Berlin, herausg. von J. JASTROW; XI Jahrgang, 1888. Berlin, 1891; in-8°.

Bibl. nazionale di Firenze. Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 125, 126. Firenze, 1891; in-8° gr.

Id. —— Indice alfabetico delle opere, ecc., 1890; pag. 49-80; in 8° gr.

Gotha. Dr. A. Petermanns Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. herausg. von Prof. Dr. A. SUPAN: XXXVII Band, n. 3. Gotha, 1891; in-4°.

Università di Innsbruck. Akademische Behörden, Personalstand und Vorlese-Ordnung an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck, im Sommer-Semester 1891, Innsbruck, 1891, 1 fasc. in-4°.

Digitized by Google

* Berichte über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; philologisch-historische Classe, 1890: II, III. Leipzig, 1891; in-8°. — R. Accademia delle Scienze di Lipsia.

Allgemeine deutsche Biographie; 156 Lieferung (Band XXXII, Lfg. 1), etc. Leipzig, 1891; in-8°. — Lipsia.

* Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVIII, cuaderno 3. Madrid, 1891; in-8°. — R. Accademia di Storia di Madrid.

* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIV, fasc. 4, 5. Milano, 1891; in-8°. — R. Istituto Lomb. (Milano).

Comptes-rendus de l'Athénée Louisianais. etc.; 4e série, t. II, livrais. 2e. Nouvelle-Orléans, 1891; in-8°. — La Direzione (Nuova Orléans).

* Compte rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie: 1891, n. 6, pag. 163-168; in-8°. — Soc. di Geografia (Parigi).

Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale, anno VIII, gennaio-febbraio 1891. Roma, 1891; in-8° gr. — Ministero delle Finanze (Roma).

Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, dal 1° gennaio al 28 febbraio 1891. Roma, 1891; in-8° gr. — Id.

Statistica dell'istruzione secondaria e superiore per l'anno scolastico 1887-88, e Notizie sommarie per l'anno 1888-89. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr. — Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma).

—— Statistica dell'istruzione elementare per l'anno scolastico 1886-87, e Notizie sommarie per l'anno 1887-88. Roma, 1890; 1 vol. in-8° gr. — Id.

—— Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno IX, n. 1. Roma, 1891; in-8° gr. — Id.

Catalogo metodico degli scritti contenuti nelle pubblicazioni periodiche italiane e straniere; parte prima, — Scritti biografici e critici; 2° Supplemento. Roma, 1890; in-8° gr. — Camera dei Deputati (Roma).

* Memorie della R. Accademia dei Lincei, ecc., serie 4ª, Classe di Scienze morali, ecc., vol. VII, parte 2ª; Notizie degli Scavi: dicembre. Roma, 1890; in 4°. — R. Accademia dei Lincei (Roma).

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma; Bollettino delle opere moderne acquistate dalle Biblioteche governative del Regno d'Italia; vol. VI, n. 2. Roma, 1891; in-8° gr. — Bibliot. nazionale Vitt. Emanuele (Roma).

* L'Ateneo Veneto — Rivista mensile di Scienze, Lettere ed Arti, ecc., serie 15ª, vol. I, fasc. 1-3. Venezia, 1891; in-8°. — Ateneo Veneto (Venezia).

Digitized by Google

(Venezia).	I diarii di Marino Sanuto ecc.; t. XXXI, fasc. 136. Venezia, 1891; in-4°.
Imp. Accademia delle Scienze di Vienna.	* Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften; philosophisch-historische Classe, XXXVII Band. Wien, 1839; in-4°.
Id.	* Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften; philosophisch-historische Classe; Jahrgang 1889, Band CXIX, CXX; Jahrg. 1890, Band CXXI. Wien, 1889-90; in-8°.
Id.	— — Archiv Für österreichische Geschichte, etc.; LXXV Band, 1 und 2 Hälfte. Wien, 1889; in-8°.
Id.	— — Fontes rerum austriacarum — Oesterreichische Geschichts-Quellen, etc., 2 Abth., XLV Band, 1 Hälfte — Diplomataria et Acta. Wien, 1890; in-8°.
Soc. geografica di Vienna.	* Mittheilungen der k. k. geographischer Gesellschaft in Wien; 1890: XXXIII; Band (der neuen Folge XXIII). Wien, 1890; in-8°.
L'Autore.	Vittoria dal 1607 al 1890 — Dialoghi dell'Arciprete Parroco Federico LA CHINA. Vittoria, (Sicilia), 1890; 1 vol. in-8°.
L'A.	Pregiudizi e superstizioni del popolo modenese; Contribuzione del Dott. Paolo RICCARDI alla inchiesta intorno alle superstizioni e ai pregiudizi esistenti in Italia, ecc. Firenze, 1891, 75 pag. in-8°.

Dal 5 al 19 Aprile 1891

Donatori	
La Direzione (Agram).	* Viestnik hrvatskoga arkeologickoga Drutztva; Godina XIII, Br. 2. U Zagrebu, 1891; in-8°.
Scuola di Lettere d'Algeri.	* Publications de l'École des Lettres d'Alger — Bulletin de Correspondance africaine: Tribus du Sud-Ouest Marocain — Bassins cotiers entre Sous et Drâa; par G. LE CHATELIER. Paris, 1891; 1 fasc. in-8° gr.
Università J. HOPKINS (Baltimora).	* Johns Hopkins University Circulars etc.; vol. X, n. 86. Baltimore, 1891; in-4°.
R. Accademia della Crusca (Firenze).	* Atti della R. Accademia della Crusca; Adunanza pubblica del 21 di dicembre 1890. Firenze, 1891; 1 vol. in-8°.
Bibl. nazionale di Firenze.	Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 127. Firenze, 1891; in-8° gr.

Digitized by Google

Dr. A. Petermanns Mittheilungen Justus Perthes' geographischer Anstalt; herausg. von Dr. Prof. A. SUPAN: XXXVII Band, n. 4. Gotha, 1891; in-4°. — Gotha. * *

* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIV, fasc. 6, 7. Milano, 1891; in-8° — R. Istit. Lomb. (Milano).

* Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova; anno CCXCI (anno 1889-90); nuova serie, vol. VI. Padova, 1890; in-8°. — R. Accademia di Sc., Lett. ed Arti di Padova.

* Compte-rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie etc.; 1891, n. 7 ed 8, pag. 169. Paris; in-8°. — Soc. di Geografia (Parigi).

Lavori preparatorii del Codice civile del Regno d'Italia (vol. V° della raccolta). Osservazioni della Magistratura sul progetto di revisione del Codice civile Albertino presentato al Parlamento dal Ministro di Grazia e Giustizia (G. B. CASSINIS); 3ª ediz. riveduta ed ampliata. Roma, 1890; in-4°. — Ministero di Grazia e Giust. (Roma).

* Memorie della R. Accademia dei Lincei; anno CLXXXV, 1888, serie 4ª, Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, vol. IV. Roma, 1888; in-4°. — R. Accademia dei Lincei (Roma).

* Bullettino di Archeologia cristiana del Comm. Giovanni Battista DE ROSSI; serie 5ª, anno I, n. 2-3. Roma, 1890; in-8°. — Il Comm. G. B. DE ROSSI (Roma).

Consiglio Comunale di Torino 1890-91, XI, XI. — Sessione straordinaria, 1ª e 2ª seduta, 25 e 27 marzo 1891. Torino; in-4°. — Municipio di Torino.

Il Rosario e la Nuova Pompei; Periodico mensuale benedetto tre volte dal Papa Leone XIII; anno VIII, quaderno 3°. — La Direzione (Valle di Pompei).

* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; serie 7ª, T. II, disp. 3, 4. Venezia, 1891; in-8°. — R. Istit. Veneto (Venezia).

Sulle cose della Sezione di Varallo (Club alpino italiano) e del suo Circondario; Note critiche di Carlo Alberto GIANOLI. Varallo, 1890; 1 volumetto in-16°. — L'Autore.

Torino, Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
612 (850) 12 VI-91

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

NB. *A questo fascicolo vanno unite le Tavole IV, V, VI, VII, VIII e IX relative alle Memorie dei sigg. Dott.* Fr. Sav. Monticelli, R. Fusari, P. De-Vescovi, E. Faravelli, C. Mylius e I. Salvioli, *pubblicate nelle Dispense* 4ª, 5ª, 7ª, 8ª e 9ª.

Torino — Tip. Reale-Paravia

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. **12ª, 1890-91**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Socio Basso offre in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi autori:

1° Il n. 93 del vol. V, ed i n. 94 a 100 del vol. VI, che fanno parte del *Bollettino dei Musei di Zoologia e di Anatomia comparata della R. Università di Torino*, e che contengono lavori dei Dottori D. Rosa, E. Giglio-Tos, L. Camerano e C. Pollonera;

2° Cinque opuscoli del Prof. A. Sayno, estratti dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo e versanti su argomenti di fisica molecolare.

Vengono poi letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i tre lavori seguenti:

a) « *Variazioni prodotte dal calore di alcuni spettri di assorbimento* »; lavoro del Dott. G. B. Rizzo, presentato dal Socio Naccari;

b) « *Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi* », del Dott. G. Cano, presentato dal Socio Camerano;

c) « *Un prisma universale a riflessione* », del Prof. Jadanza, presentato dal Socio Basso.

Digitized by Google

LETTURE

Variazioni prodotte dal calore in alcuni spettri d'assorbimento:

Nota del Dott. G. B. RIZZO

I.

Sir John Conroy ha comunicato recentemente alla Società fisica di Londra alcune sue esperienze sul cambiamento prodotto dal calore nello spettro del vetro di cobalto; ed ha mostrato che le bande crescono di intensità nella parte meno rifrangibile dello spettro ed appaiono spostate verso questa parte (1).

Siccome da alcun tempo anch'io studio l'assorbimento luminoso dei corpi e specialmente le variazioni col variare della temperatura, per portare il mio piccolo contributo a determinare la vera natura di questi fenomeni e dedurne i fondamenti per quella nuova scienza che è la meccanica molecolare, espongo qui alcuni risultati delle osservazioni fatte sullo spettro d'assorbimento dei corpi solidi.

Il Conroy ricorda che Brewster nel suo trattato sull'Ottica dice di essere maravigliato che il calore aumenti la trasparenza di alcuni corpi e la diminuisca per alcuni altri, e poi cita un lavoro di Feussner, il quale aveva osservato le variazioni dell'assorbimento prodotte dal calore nelle soluzioni colorate; e soggiunge che non vennero pubblicati altri esperimenti, dopo quelli di Brewster, sulla trasparenza delle sostanze solide riscaldate. Questo è inesatto: imperciocchè, per non parlare delle esperienze di Stokes (2) sul vetro di uranio, di quelle numerosissime, sebbene molto superficiali, di Houston (3), il quale volle anche spiegare

(1) Conroy (J., *Nature*, vol. 43 (1891), pag 406. – Phil. Mag (5), XXXI, (1891), pag. 317.

(2) Stokes (G. G.), *On the change of Refrangibility of Light*. Phil. Trans. 1852, 463.

(3) Houston (Ed. J.), *On the change of colour produced in certain chemical compounds by heat*. Chem. News, XXIV (1871), 177.

Digitized by Google

teoricamente i risultati osservati, o delle diligenti ricerche di Morton e Bolton (1), le modificazioni dello spettro d'assorbimento dei corpi solidi per causa del calore furono ancora studiate con molta cura da Glan (2) e da' Ackroyd (3), che ne diedero inoltre una spiegazione teorica.

In un lavoro più esteso sull'assorbimento luminoso dei corpi farò una completa esposizione storica delle esperienze e delle discussioni fatte sinora, dal giorno in cui Brewster incominciò a studiare questi fenomeni, e perciò non mi fermo di più sopra questo punto, al quale ho solo voluto accennare, perchè le autorevoli parole del Conroy potevano far credere che un fenomeno così importante, quale è il cambiamento del colore e dello spettro d'assorbimento dei corpi col variare della temperatura, fosse rimasto tanto tempo senza essere studiato.

Fra i corpi solidi, che hanno uno spettro d'assorbimento molto ricco, sono notevoli sopra tutto i cristalli dei vari composti del didimio; ma non ho potuto ancora studiarne le variazioni col crescere della temperatura, perchè le variazioni di questi spettri sono molto complesse, e, come ha mostrato il Becquerel (4), l'intensità delle diverse bande d'assorbimento varia col variare della direzione in cui si propaga la luce; ed inoltre vi sono certe particolari direzioni, nelle quali cambia anche la posizione delle bande. Perciò considero qui soltanto le variazioni nello spettro del vetro roseo di didimio, del vetro azzurro di cobalto e del vetro violetto di manganese, i quali hanno una struttura molecolare molto stabile e presentano uno spettro d'assorbimento che è ben definito e non dipende dalla direzione in cui si propagano i raggi luminosi.

---

(1) MORTON (H.) *and* BOLTON (H. C.), *Investigation on the fluorescent and absorption spectra of the Uranium salts* Chem. News, XXVIII, 1873, 47.

(2) GLAN (P.), *Ueber die Absorption des Lichtes.* Pogg. Ann., CXLI (1870), 227.

(3) ACKROYD (W.), *Metachromatism or colour change.* Chem. News, XXXIV, 1876, 75.

Selective absorption. Phil. Mag. (5), II (1876), 423.

(4) BECQUEREL (H.), *Recherches sur les variations des spectres d'absorption dans les cristaux.* Ann. de Chim. et de Phys. (6), XIV (1888), 170.

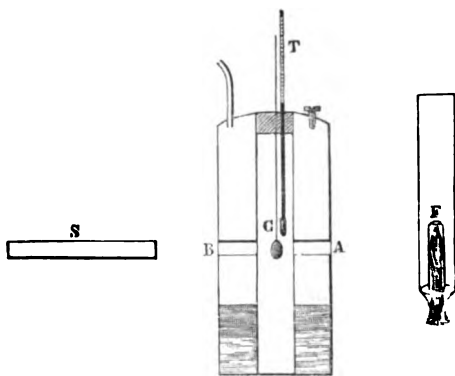
— *Sur les variations des spectres d'absorption des composés du didyme.* Ib 257.

Digitized by Google

Le osservazioni furono fatte con uno *spettroscopio universale* di Krüss, adoperando quasi sempre il prisma semplice di flint pesante, perchè, con la media dispersione che esso produce, si vedono più nette le bande d'assorbimento; ed ho osservato lo spettro fra limiti molto estesi di temperatura: cioè alla temperatura ordinaria di circa 15°, a 300° ed a 500° approssimativamente.

Non mi parve opportuno di riscaldare i corpi, dei quali osservavo l'assorbimento, ponendoli sopra una fiamma Bunssen, come hanno fatto altri sperimentatori, perchè anzitutto sarebbe stato impossibile di determinare, anche per approssimazione, a quale temperatura venivano portati e poi l'energia chimica della fiamma poteva produrvi delle alterazioni, almeno alla superficie.

Ho invece riscaldato i corpi alla temperatura di 300°, tenendoli nella cavità circolare interna di una delle pentole cilindriche di ferro adoperate dal Prof. Naccari nel suo studio sui calori specifici di alcuni metalli fino alla temperatura di 320° (1).

La pentola conteneva del petrolio in ebollizione, e la luce vivissima e tranquilla di una fiamma a *gas incandescente* F, passando in una cavità cilindrica *AB*, chiusa con vetri e perpendicolare all'asse della pentola, attraversava il corpo assorbente *C*, sostenuto da una pinzetta, e poi cadeva sulla fenditura dello spettroscopio *S*.

La temperatura era determinata con un termometro a mercurio *T*. E per riscaldare i corpi alla temperatura di 500 gradi

(1) Naccari (A.), *Sui calori specifici di alcuni metalli dalla temperatura ordinaria sino a* 320°. Atti R. Acc. di Torino, XXIII, 1887.

Digitized by Google

li posi sopra un piccolo sostegno in un tubo di ferro, chiuso con vetri alle due estremità e collocato direttamente sopra una fiamma.

Nella tavola annessa sono descritti gli spettri di assorbimento osservati alla temperatura ordinaria e a 500°: qui trascrivo le lunghezze d'onda delle bande alle diverse temperature. Se le bande sono alquanto allargate, ne indico la posizione scrivendo successivamente la lunghezza d'onda del lembo meno rifrangibile, poi del massimo di intensità e dell'estremo più rifrangibile.

Vetro di didimio.

Lo spettro di assorbimento del vetro di didimio che ho osservato si compone, alla temperatura ordinaria, di otto bande di diversa intensità; ma, coll'aumentare della temperatura, talune si fanno più intense, ed altre diventano più sbiadite o cessano di essere visibili.

	$t =$	15°	300°	500°
I.	poco distinta	755 731 682	non visibile	non visibile
II.	sottile e poco visibile		684	allargata 685
III.		596 584 571	598 585 572	599 585 572
IV.		525	529	male distinta
V.		510	512	male distinta
VI.		483	—	—
VII.		475	—	—
VIII.	diffusa	447	male distinta	male distinta.

Alla temperatura ordinaria la terza banda è formata da un bel gruppo di bande distinte, una delle quali, verso la metà, è molto intensa; ma, al crescere della temperatura, queste si

Digitized by Google

allargano e ne risulta una banda sola che non è separabile, neppure con una maggiore dispersione dello spettroscopio

Le letture nella parte più rifrangibile sono alquanto incerte.

Vetro azzurro di cobalto.

	$t = 15°$	300°	500°
I.	687	690	692
	659	668	671
	638	648	646
II.	603	611	613
	590	593	594
	578	580	580
III.	552	563	565
	532	547	550
	non distinta	non distinta	non distinta.

Col crescere della temperatura aumenta molto l'assorbimento nel rosso e diminuisce l'intensità della terza banda.

Vetro violetto di manganese.

Il vetro violetto di manganese dà anch'esso uno spettro di assorbimento ben definito con tre bande, che rassomigliano a quelle del vetro di cobalto.

	$t = 15°$	300°	500°
I.	674	686	diffusa verso il rosso
	656	662	666
	638	546	550
II.	603	604	605
	590	592	593
	583	584	585
III.	554	554	554
	non definita	non definita	non definita.

Digitized by Google

Anche nel vetro di manganese aumenta l'assorbimento nel rosso e diminuisce nella parte più rifrangibile dello spettro col crescere della temperatura.

In tutti e tre i casi, lasciando raffreddare i corpi riscaldati, lo spettro riprende di nuovo l'aspetto primitivo e perciò si può ritenere che la variazione dell'assorbimento non sia dovuta ad una alterazione chimica della sostanza assorbente; ma sia prodotta esclusivamente dalla condizione fisica della più elevata temperatura.

Un attento esame di questi spettri dimostra che coll'aumentare della temperatura dei corpi solidi, cresce l'assorbimento per le radiazioni meno rifrangibili dello spettro luminoso, e le bande che sono nel rosso crescono di intensità dalla parte meno rifrangibile, e perciò lo spettro cambia d'aspetto come se le bande si spostassero verso il rosso; ma non pare che si produca un vero e proprio spostamento di alcuna banda.

II.

Sarebbe prematuro il voler trarre delle conseguenze teoriche dai pochi fatti che ho descritto; ma dalle sole osservazioni fatte e dagli studi eseguiti in questo campo dai fisici ricordati più sopra, senza introdurre alcuna ipotesi che non sia comunemente accettata, si può dedurre una notevole conferma del principio stabilito da Weber intorno al modo, col quale si sviluppano successivamente le radiazioni di diversa lunghezza d'onda da un corpo solido col crescere della temperatura.

In molti trattati di Ottica viene ancora riportata una legge, che si attribuisce al Draper, e secondo la quale tutti i corpi solidi, quando incominciano a diventare luminosi, emettono una luce rossa oscura; e poi, col crescere della temperatura, aumentano di intensità le prime radiazioni e vi si aggiungono man mano le radiazioni più rifrangibili, finchè, ad una temperatura sufficientemente elevata, emettono anche dei raggi chimici. Ma il Weber (1)

(1) WEBER (H. F.), *Die Entwickelung der Lichtemission glühender fester Körper*. Wied. Ann., XXXII (1887), 256.

con numerose ed accurate osservazioni dimostrò che lo spettro di un corpo solido incandescente non si estende solo da un lato col crescere della temperatura, e si sviluppa invece regolarmente da ambi i lati da una debolissima banda che appare nel mezzo dello spettro. Ora questo principio viene indirettamente confermato dalle mie osservazioni.

Lo studio del movimento di una particella materiale componente un corpo, quando è sollecitata da una ondulazione luminosa, la quale attraversa l'etere che la circonda, aveva già condotto Eulero ad affermare che i corpi assorbono i raggi di lunghezza d'onda uguale a quelle, colle quali possono vibrare le loro particelle, e Kirchhoff diede a questo concetto una forma più rigorosa, dimostrandolo in tutta la sua generalità, e lo pose a fondamento della sua teoria dello spettro solare.

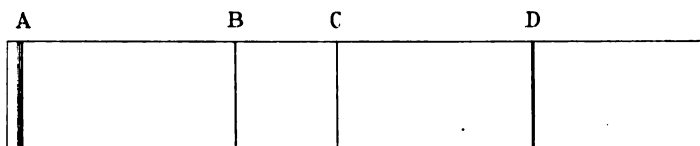
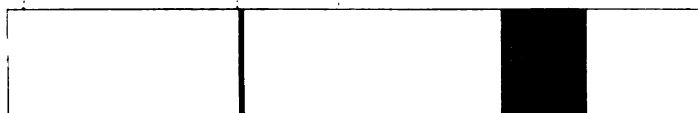
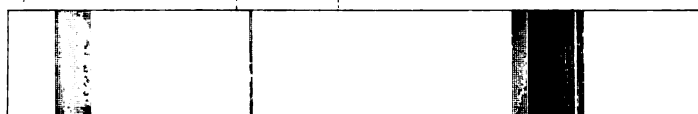
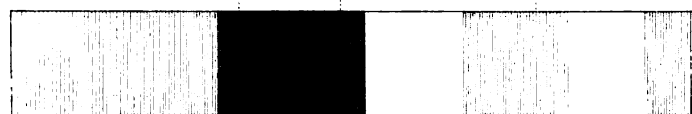
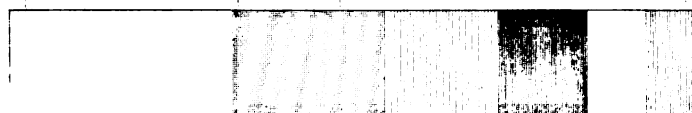
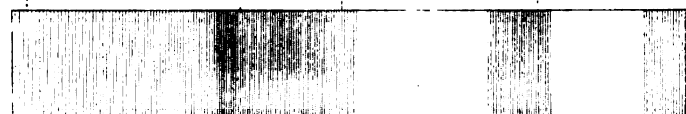
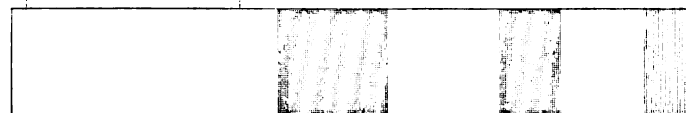
Ma qualunque sia per essere la sorte delle concezioni teoriche, colle quali noi ci spieghiamo la natura dei corpi, il calore, la luce e le altre energie fisiche, è un fatto dimostrato dalla esperienza che un corpo, fin che rimane inalterata la sua struttura molecolare, attenua ed assorbe precisamente quei raggi luminosi che esso è capace di emettere.

Ora, l'assorbimento dei corpi solidi, che io ho studiato, cresce da una regione intermedia fra il verde e l'azzurro verso la parte meno rifrangibile dello spettro coll'aumentare della temperatura: quindi si può conchiudere che, quando un corpo solido viene riscaldato, le radiazioni che esso emette crescono anche progressivamente di intensità nel medesimo senso.

Ringrazio con animo riconoscente il signor Prof. Naccari che mi aiutò sempre col suo consiglio e mi fornì tutti i mezzi per il mio studio sull'assorbimento

Torino, Aprile 1891.

Digitized by Google

TORINO - LIT. SALUSSOLIA

Digitized by Google

Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi;

pel Dott. G. CANO

INTRODUZIONE.

Dalla Monografia di M. Milne Edwards (1) « *Observations sur les affinités zoologiques et la classification naturelle des Crustacés* » risultano appartenere alla famiglia *Gonoplacidae* tre specie di Brachiuri viventi nel Mediterraneo, cioè: *Gonoplax angulata* (Fabr.), *G. rhomboides* (Fabr.) e *Brachynotus sexdentatus* (Risso).

Anche Heller (2) convenne più tardi nel medesimo errore; recentemente però Hilgendorf (3) ha dimostrato che il *G. sexdentata* Risso (4) (*Brachynotus sexdentatus* De Haan) (5) corrisponde senza alcun dubbio a quel medesimo crostaceo stato descritto da Lucas col nome di *Heterograpsus sexdentatus* e da Milne Edwards col nome di *H. Lucasi* (6). Il *Brachynotus sexdentatus* deve quindi pigliar posto tra i Grapsidi ai quali egli maggiormente si rapporta sia per le condizioni del suo sviluppo, sia per la forma del corpo e per l'organizzazione dell'adulto. Il genere *Gonoplax* collocato da Milne Edwards tra gli Ocypodidi e da De Haan tra i Canceridi conviene meglio con questi ultimi per la conformazione del suo apparecchio buccale. Infatti la forma dei peduncoli oculari che indusse Milne Edwards a stabilire rapporti più stretti di affinità del medesimo coi *Gelasimus*, *Ocypoda* e *Macrophthalmus* perde molto del suo valore se si

(1) *Ann. Sc. nat.*, Paris, t. XVIII e XX, 1852-53.
(2) *Crustaceen des südlichen Europa.* Wien, 1863, pag. 101-106
(3) *Sitz. Ber. Ges. Nat. Freunde.* Berlin, 1862, pag. 68.
(4) *Hist. nat. de l'Eur. Mérid.* Paris, t. V, 1826, pag. 13.
(5) *Fauna Japonica.* Lugdunum Batavorum, 1850, pag. 34.
(6) Op. cit., pag. 192.

Digitized by Google

considera questo stesso carattere tra due specie (*Portunus e Podophthalmus* appartenenti indiscutibilmente ad una medesima famiglia (*Portunidae*). Anche l'orifizio sessuale nel maschio del *Gonoplax* si apre apparentemente nello sterno, esso giace però effettivamente (1) nell'articolo basilare dell'ultimo piede ambulatorio al pari dei Canceridi.

Non ho potuto esaminare le prime fasi larvali di questo crostaceo, il quale nel golfo di Napoli è divenuto assai raro e ciò per meglio stabilire la posizione sistematica del medesimo nella serie dei Brachiuri.

Il *G. angulata* è una varietà del *G. rhomboides*, infatti tra i numerosi esemplari che io ho potuto esaminare si osserva che mentre negli individui giovani esiste un sol dente nel bordo laterale, negli individui adulti al contrario dietro il dente orbitario esterno si presenta sia un semplice tubercolo, sia un piccolo dente che in alcuni si sviluppa maggiormente.

Il *Gonoplax rhomboides* ed il *Brachynotus sexdentatus* vivono a poca profondità nelle acque luride e basse del porto e della spiaggia del Carmine (2). Il *Gonoplax* si riscontra però ancora a grandi profondità (400 m.). Il periodo di maturità sessuale di quest'ultimo non si è ancora potuto stabilire; quello del *Brachynotus* coincide coi mesi IV e VI, le prime fasi larvali si riscontrano ad una profondità di 40 a 60 m., le tre fasi del *Gonoplax* che io ho disegnato nella tavola provengono da una profondità di 200 a 400 m.

Brachynotus e Gonoplax.

(Tavola).

A. — Appena sortita dall'uovo la Zoea del *Brachynotus* presenta sullo scudo (fig. 1A) una lunga spina rostrale, una cardiaca, decorrenti in senso orizzontale e parallelo, e due spine laterali. Gli occhi non sporgono ancora sostenuti da un peduncolo

(1) Vedi Brocchi, *Recherches sur les organes génitaux des Crustacés Decapodes*, in Ann. Sc. nat. Paris, t. II, 1875, p. 76.

(2) Vedi a questo riguardo: *Notizie biologiche riguardanti il periodo di maturità sessuale degli animali del golfo di Napoli*, per Salvatore Lo Bianco, in Mith. Zool. Station Neapel, 1888, p. 409

Digitized by Google

ai lati della testa; le appendici del corpo sono in numero di sette paia, cioè cinque cefaliche (due paia di antenne e tre paia di appendici buccali) e due toraciche (più tardi primo e secondo piede mascellare). Le antenne interne sono semplici gemme coniche (fig. 2ª) che portano sul loro apice due filamenti olfattivi ed una piccola setola; le antenne esterne risultano formate di due spine delle quali una più lunga in continuità diretta col pezzo basilare ed una più corta articolata colla prima e corrispondente alla squama delle antenne dei Macruri.

Le mandibole (fig. 3ª) non hanno palpo e sono sprovviste di denti nella superficie triturante; nel primo paio di mascelle il palpo è diviso in due articoli (fig. 4ª), la lacinia interna ed esterna sono unilobe; nel secondo paio di mascelle il palpo è semplice, bilobo nell'apice (fig 5ª), la lacinia interna ed esterna sono bipartite, il ramo esterno si estende sotto forma di lamella branchiale guernita di setole nel suo margine.

Il primo ed il secondo piede toracico sono veri organi di nuoto e risultano di un ramo esterno (Schwimmfussast) diviso in due articoli che porta sull'apice quattro lunghissime setole, e di un ramo interno diviso in cinque articoli nel primo, in tre nel piede successivo, entrambi questi due rami sono articolati con un pezzo basilare impari (protopodite).

L'addome è diviso in cinque segmenti ed è privo di appendici; nel segmento anale mancano le spine 1, 2 e 3 (del segmento caudale dei Dromiacei) per cui l'armatura del medesimo è di 4 + 4 spine (fig. 9ª).

B. — In una seconda fase larvale persiste la forma generale del corpo precedentemente descritta, gli occhi però sporgono peduncolati ai lati della testa (fig. 1B).

Le antenne interne presentano una porzione basilare rigonfia, come primo accenno di formazione del sacco uditivo (fig. 2ᵇ), la porzione terminale dei medesimi si è segmentata per costituire il flagello principale, ai lati di questo sorge un piccolo flagello accessorio, nelle antenne esterne si è sviluppato sotto forma di piccola gemma il ramo interno.

Le mandibole hanno un piccolo palpo: le due paia di mascelle conservano presso a poco la medesima forma.

I due primi piedi toracici sono ancora piedi nuotatori, la porzione basilare dei medesimi è però divisa in due articoli, il

Digitized by Google

ramo esterno porta 10 lunghissime setole, sul primo articolo della base esiste un'appendice epipoidale; dietro di questi si sono sviluppate sei paia di gemme che rappresentano il primo abbozzo del terzo piede mascellare e dei cinque piedi ambulatori dell'adulto; la prima di queste gemme, oltre un'appendice epipoidale porta due appendici branchiali della serie *b* e *c* Claus, la seconda presenta del pari due appendici branchiali della medesima serie, la terza e la quarta una sola appartenente alla serie *c'* Claus.

L'addome è diviso in sette distinti segmenti, la seconda somite ha una distinta apofisi laterale, la terza, la quarta e la quinta terminano nel loro apice inferiore con una lunga spina, il segmento anale presenta 6 + 6 setole (fig. 9^b); esiste inoltre un paio di pleopodi sotto forma di piccole gemme nella seconda, terza, quarta e quinta somite.

C. — In una terza fase larvale (Metazoea) la forma del corpo e di tutte le sue appendici è quasi la stessa della fase larvale precedente (fig. 1C); le antenne interne (fig. 2^c) presentano l'orifizio del sacco uditivo, nelle antenne esterne si apre l'orifizio di sbocco della glandola antennale, il ramo interno è diviso in cinque articoli, il ramo nuotatore del primo e del secondo piede toracico porta 12 lunghissime setole, tutte le rimanenti appendici toraciche offrono un principio di segmentazione, i pleopodi nell'addome risultano di due rami, uno interno assai piccolo ed uno esterno lamelloso.

D. — In una quarta fase larvale (1ª fase di Megalopa) la forma del corpo e delle sue appendici è del tutto differente da quella delle fasi larvali precedenti, la spina rostrale (fig. 1D) si è in gran parte atrofizzata nel *Brachynotus*, persiste ancora ben sviluppata nel *Gonoplax* (fig. ID), la spina cardiaca è rappresentata da un semplice rudimento nel primo, si conserva ancora ben distinta nel secondo, le due spine laterali sono del tutto scomparse, lo scudo si è ripiegato nei lati (fig. X^d) per formare le camere branchiali, un lembo del medesimo si estende al dissotto delle antenne per formare le cavità antennarie, un altro lembo a guisa di duplicatura si solleva alquanto attorno al peduncolo oculare come primo accenno di formazione della cavità orbitaria.

Digitized by Google

Nelle antenne interne si distinguono due parti (fig. 2ᵈ IIᵈ): una peduncolare risultante di tre articoli dei quali quello della base in forma di sacchetto sferico ed una terminale costituita di due flagelli: uno principale coi filamenti olfattivi ed uno accessorio con due setole.

Nelle antenne esterne il pezzo basilare primitivo ha formato il primo articolo del peduncolo, il ramo interno coi suoi tre primi articoli forma successivamente il secondo, il terzo ed il quarto articolo del medesimo, coi rimanenti il cosidetto flagello.

Nelle mandibole la superficie triturante è sprovvista di denti, il palpo o è diviso in tre articoli (fig. 3^d) oppure presenta una semplice accenno di segmentazione (fig. III^d).

Nel primo paio di mascelle (fig. 4^c IV^d) il ramo interno ha perduto in parte la sua primitiva articolazione ed è sprovvisto di setole.

Nel secondo paio di mascelle (fig. 5^c, V^d) l'endopodite è divenuta stiliforme ed è fusa colla lacinia interna, l'esopodite si estende a lato della medesima in forma di lamella branchiale più larga per sostenere le correnti respiratorie.

Nel primo piede toracico (1° piede mascellare), i due articoli basilari divenuti lamellosi si sono trasformati in lacinie masticatrici, il ramo interno o conserva ancora un accenno della precedente segmentazione (fig. 6^d) oppure si è trasformato in una lamella di forma triangolare (fig. VI^d), l'articolo terminale del ramo esterno si ripiega ad angolo su quello precedente e diventa un'appendice flagelliforme del medesimo; la lamella epipoidale è molto sviluppata.

Nel secondo piede toracico (2° piede mascellare) i due articoli della base si sono raccorciati, il ramo interno si è ripiegato a ginocchio ed è diviso in cinque articoli, il ramo esterno ha subìto le medesime modificazioni del piede antecedente; l'articolo basilare porta una (fig. 7^d) oppure due (fig. VII^d) appendici epipoidali.

Nel terzo piede toracico (3° piede mascellare) i due primi articoli del ramo interno sono divenuti lamellosi, e si sviluppano a preferenza di quelli successivi, questi ultimi rappresentano quindi un' appendice flagelliforme dei due primi (fig. 8^d, $VIII^d$), il ramo esterno ha la medesima conformazione precedentemente descritta, l'articolo basilare porta una (fig. 8^d) oppure due (fig. $VIII^d$)

Digitized by Google

appendici epipoidali delle quali una rudimentale; al medesimo pure corrispondono due branchie della serie *b* e *c* Claus.

I cinque piedi toracici successivi (piedi ambulatori) sono divisi in sette articoli, il primo è terminato da una completa chela, i rimanenti terminano con un dattilo incurvato ed armato di spine, al primo corrispondono due appendici branchiali della serie *b* e *c* Claus, al secondo ed al terzo corrisponde una sola appendice branchiale della serie *c'*.

L'addome ha cinque paia di pleopodi provvisti, con eccezione dell'ultimo, di un piccolo ramo interno (fig. 11) con dei peli ripiegati ad uncino (*retinaculum*).

E. — In una quinta fase larvale (2ª fase di Megalopa) la forma del corpo si ravvicina a quella della fase larvale precedente, la spina rostrale e la spina cardiaca o persistono ancora ben sviluppate (fig. IE) oppure mentre quest'ultima è del tutto scomparsa, la prima persiste ancora come semplice rudimento nel punto mediano della fronte, la quale si ripiega davanti ai peduncoli oculari e sopra le cavità antennarie (fig. 1E). La fronte in entrambi i casi manda al dissotto un processo lamelloso (fig. X1) il quale, col ripiegarsi della fronte, unendosi ad un altro processo mediano dell'epistoma forma più tardi un setto tra le due antennule (fig. 1Xᵉ).

Quel lembo dello scudo che nella fase larvale precedente avea formato le cavità antennarie ora si estende maggiormente nel cavo boccale e manda quell'estraflessione conosciuta sotto il nome di epistoma, la quale, unendosi agli angoli delle ripiegature laterali che formano le camere branchiali, completa il cavo boccale (endostoma).

Le cavità orbitarie seguono uno sviluppo reciproco con quello dei peduncoli oculari e relativamente alla fase larvale precedente o sono meno sviluppati (fig. 1E) oppure lo sono maggiormente (fig. IE).

F. — Nello stadio postlarvale la forma del corpo (fig. 1F, IF) e di tutte le sue appendici è simile a quella dell'adulto, il rostro è completamente scomparso, la fronte si ripiega innanzi descrivendo col suo margine un contorno regolare (*Gonoplax*) oppure appena sinuoso (*Brachynotus*) dando luogo alla formazione di due lobi frontali. L'orbita è largamente aperta all'esterno ed

Digitized by Google

in basso, e presenta un dente orbitario superiore, uno orbitario esterno ed un dente infraorbitario (*Brachynotus*), la medesima presenta due incisioni al dissopra. Il margine laterale è armato di tre denti (*Brachynotus*) oppure di un solo (*Gonoplax*). La forma e la disposizione di tutte le appendici cefaliche e toraciche è simile a quella dell'adulto. La formula branchiale per il *Brachynotus* è la seguente:

	a	*b*	*c*	*d'*	
VIS.	E*p*	0	0	0 =	E*p*
VIIS.	E*p* + 1	0	0	0 =	E*p* + 1
VIIIS.	E*p*	1	1	0 =	E*p* + 2
IXS.	0	1	1	0 =	2
XS.	0	0	0	1 =	1
XIS.	0	0	0	1 =	1
XIIS.	0	0	0	0 =	0
XIIIS.	0	0	0	0 =	0

3 E*p* + 1 + 2 + 2 + 2 = 3E*p* + 7

per il *Gonoplax*:

	a	*b*	*c*	*d'*	
VIS.	E*p*	0	0	0 =	E*p*
VIIS.	E*p* + 1	0	0	0 =	E*p* + 1
VIIIS.	E*p* + 1	1	1	0 =	E*p* + 3
IXS.	0	1	1	0 =	2
XS.	0	0	0	1 =	1
XIS.	0	0	0	1 =	1
XIIS.	0	0	0	0 =	0
XIIIS.	0	0	0	0 =	0

3 E*p* + 2 + 2 + 2 + 2 = 3E*p* + 8.

Digitized by Google

Conclusioni.

Esaminando le diverse fasi di sviluppo postembrionale qui sopra enumerate si osserva che il *Brachynotus* presenta stretti rapporti di affinità con alcuni Grapsidi (*Pachygrapsus* e *Nautilograpsus*). Al pari di questi lo scudo è armato nelle prime fasi larvali di due spine decorrenti in senso orizzontale e parallelo, il segmento anale è privo di spine laterali, a differenza dei primi però persiste ancora un rudimento della squama sotto forma di spina mobile nel secondo paio di antenne.

Il *Brachynotus* al pari dei Grapsidi ha pure due fasi di Megalopa pressochè identiche, caratterizzata l'ultima fase principalmente dalla conformazione caratteristica dell'addome; il medesimo inoltre presenta con questi strettissimi rapporti di affinità nello stadio postlarvale e nell'adulto sia per la forma e disposizione della regione antennaria, delle cavità orbitarie e del cavo boccale, sia per la formazione del setto interantennulare il quale si effettua in entrambi per l'unione di un processo sottofrontale all'epistoma. Anche le appendici della masticazione segnatamente quelle del terzo segmento toracico (terzo piede mascellare) dove il palpo si inserisce nell'angolo esterno dell'articolo precedente offrono disposizioni somiglianti a quelle che si osservano nei Grapsidi. È da osservare intanto che a differenza del *Pachygrapsus*, nel *Brachynotus* la lacinia esterna del secondo paio di mascelle diventa uniloba nello stadio postlarvale e nell'adulto, manca l'appendice branchiale della serie *c* nel secondo piede mascellare, infine il terzo piede mascellare ha una sola appendice epipoidale, disposizioni queste che si osservano nei Dorippidei (*Ethusa*).

Per quanto si riferisce al *Gonoplax* l'impossibilità nella quale io mi son trovato di poter esaminare le prime fasi larvali di questo crostaceo rende incerta la posizione sistematica del medesimo di fronte agli altri Brachiuri. Egli è certo che la formazione del setto interantennulare qui si effettua in seguito al ripiegamento della fronte e per l'unione di un processo sottofrontale

---

(1) Vedi a questo riguardo: *Sviluppo postembrionale dei Dorippidei, Leucosiadi, Corystoidei e Grapsidi*, pel Dott. G. Cano in Atti della Società dei Quaranta, t. VIII, 3, III. n° 4, 1891.

Digitized by Google

all'epistoma come nei Grapsidi, in opposizione a quanto io ho osservato nello *Stenorynchus* dove il rostro della Megalopa si ripiega tra le due antennule per costituire un setto tra le medesime. La forma delle appendici boccali segnatamente quella del terzo piede mascellare, dove il palpo si inserisce nell'angolo interno dell'articolo precedente corrisponde meglio ad una condizione di cose che si osserva tipicamente nei Cyclometopi. È da osservare intanto che questo carattere manca nelle fasi di Megalopa e diventa soltanto acquisito nello stadio postlarvale ed adulto (v. fig. $VIII^d$, $VIII^e$, $VIII^f$).

Napoli, Stazione Zoologica. Aprile, 1891.

ELENCO DELLE FIGURE DELLA TAVOLA.

FIG. 1A Zoea, 1B fase intermediaria, 1C Metazoea, 1D prima fase di Megalopa, 1E seconda fase di Megalopa, 1F stadio postlarvale di *Brachynotus sexdentatus*.

» 2^a, 2^b, 2^c, 2^d differenti fasi di sviluppo delle antenne.

» 3^a, 3^d » » delle mandibole.

» 4^a, 4^c, 4^f » » del primo paio di [mascelle

» 5^a, 5^d, 5^f » » del secondo paio di [mascelle

» 6^d, 6^e, 6^f » » del primo piede mascellare

» 7^d, 7^e, 7^f » » del secondo piede [mascellare

» 8^c, 8^d, 8^e, 8^f » » del terzo piede ma- [scellare

Digitized by Google

Fig. 9[a], 9[c] forma del segmento anale negli stadi di Zoea e Metazoea

» 10. labbro inferiore nello stadio di Metazoea.

» 11. pleopode del primo segmento col *retinaculum* nel ramo interno.

» ID prima fase di Megalopa, IE seconda fase di Megalopa, IF stadio postlarvale di *Gonoplax rhomboides*.

» III[d] mandibola nella fase D.

» IV[d], IV[f] mascella del primo paio nella fase D ed F.

» V[d], V[f] mascella del secondo paio » »

» VI[d], VI[e], VI[f] primo piede mascellare nelle fasi D, E ed F.

» VII[d], VII[e], VII[f] secondo piede mascellare » »

» VIII[d], VIII[e], VIII[f] terzo piede mascellare » »

» IX[d], IX[e] scudo di *Gonoplax* nella fase D ed E per mostrare la formazione delle cavità antennarie, delle orbite e dell'epistoma.

» X si osserva la fronte lateralmente per mostrare il processo sottofrontale che si unisce all'epistoma per formare il setto tra le due antennule.

Digitized by Google

Un prisma universale a riflessione;

del Prof. NICODEMO JADANZA

I.

È a tutti nota la proprietà del prisma triangolare rettangolo isoscele di deviare un raggio luminoso di $90°$ mediante due riflessioni, la prima su di un cateto, l'altra sulla ipotenusa. Come si vede nella figura 1ª, il raggio luminoso PQ penetra nel prisma coll'angolo d'incidenza i in Q dove si rifrange prendendo la direzione QR. In R si riflette totalmente e prende la direzione RS facendo in S l'angolo colla normale all'ipotenusa eguale a $45° - r$, se r indica l'angolo di rifrazione corrispondente all'angolo d'incidenza i. Quivi si riflette di nuovo secondo la direzione ST ed in T fa colla normale al cateto un angolo eguale ad r; talchè il raggio emergente TU fa colla normale al cateto l'angolo i. La direzione TU del raggio emergente è normale a quella del raggio incidente PQ.

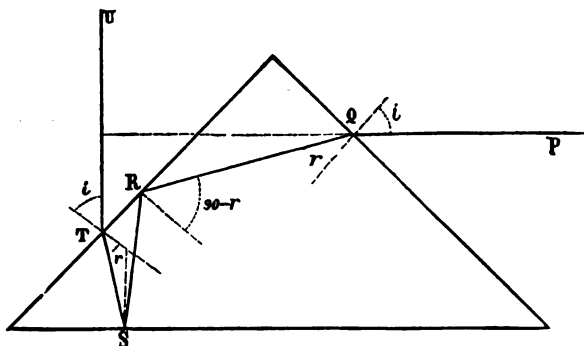



Fig. 1.

Siccome la riflessione in S non è sempre totale, così si usa inargentare la ipotenusa per rendere più luminosa la immagine definitiva.

Digitized by Google

Mediante doppia riflessione sui due cateti, si può deviare un raggio luminoso di 180°. È a codesto modo che agisce il prisma allineatore del Porro che si ottiene da quello triangolare con un taglio parallelo alla ipotenusa.

Indicando (fig. 2ª) con r l'angolo di rifrazione corrispondente all'angolo d'incidenza i del raggio PQ, gli angoli che le normali ai cateti nei punti RS fanno coi raggi rispettivi QR, RS sono $45° + r$ e $45° - r$; quindi per r sufficientemente piccolo vi può essere riflessione totale in R ed S.

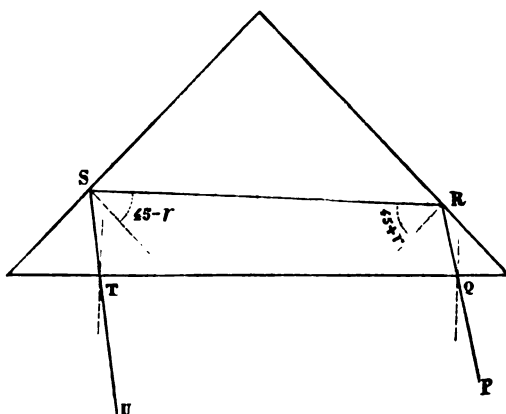



Fig. 2.

Adoperando un prisma triangolare rettangolo isoscele delle dimensioni indicate nella figura ed inargentando una parte della ipotenusa in modo da lasciare scoperti due segmenti agli estremi della ipotenusa si otterrà un prisma che servirà tanto come *squadro*, quanto come *allineatore*.

II.

Consideriamo ora nel prisma triangolare un raggio luminoso PQ (fig. 3) che è riflesso primieramente in R dalla ipotenusa e quindi di nuovo in S dal cateto AC; esso emergerà dal prisma nella direzione TU inclinata alla direzione PQ di un certo angolo

Digitized by Google

Ψ. Per trovare il valore di codesto angolo osserveremo che le due rette MQ, MT la prima perpendicolare al cateto BC in Q,

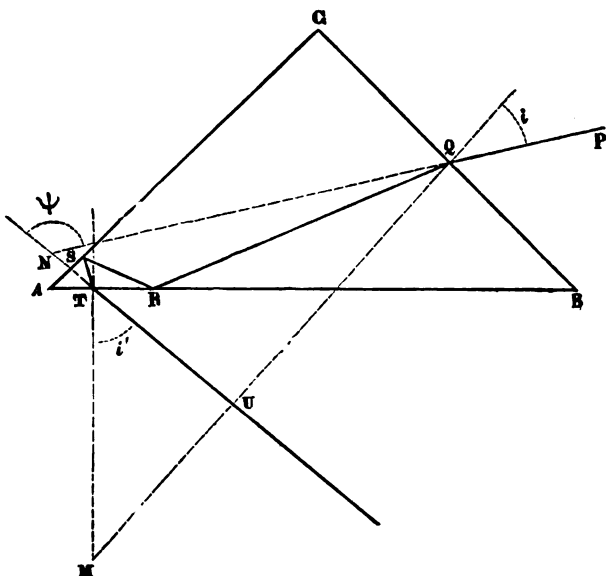



Fig. 3.

la seconda perpendicolare alla ipotenusa in T fanno tra loro un angolo di 45°, e quindi, se i, i' sono gli angoli d'incidenza e di emergenza, i due triangoli NUQ, UTM dànno

$$\Psi = u + i$$

$$u = 45° + i'$$

sicchè sarà

$$\Psi = 45° + (i + i') \qquad \ldots\ldots(1)$$

Inoltre è facile vedere che se r ed r' sono gli angoli di rifrazione corrispondenti agli angoli i, i' si ha

$$r' = 45° - r \qquad \ldots\ldots(2)$$

La funzione

$$i + i' = \text{arcsen}\, n \,\text{sen}\, r + \text{arcsen}\, n \,\text{sen}\, (45° - r)$$

Digitized by Google

ammette un *minimo;* esso è dato dalla equazione:

$$\frac{\partial(i+i')}{\partial r}=\frac{n\cos r}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 r}}-\frac{n\cos(45-r)}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2(45-r)}}=0 \quad .....(3)$$

La (3) è soddisfatta per $r=45-r$, ossia per

$$r=22^\circ\ 30'$$

il quale valore rende positiva la seconda derivata che è

$$\frac{\partial^2(i+i')}{\partial r^2}=(n^2-1)\left[\frac{n\operatorname{sen} r}{(1-n^2\operatorname{sen}^2 r)^{\frac{3}{2}}}+\frac{n\operatorname{sen}(45-r)}{\left[1-n^2\operatorname{sen}^2(45-r)\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \quad ...(4)$$

che per $r=45-r$ diventa:

$$2(n^2-1)\frac{n\operatorname{sen} r}{(1-n^2\operatorname{sen}^2 r)^{\frac{3}{2}}}\,. \quad .....(5)$$

Indicando con r_0 il valore particolare che assume r quando si ha $r=45-r$ e ponendo

$$i_0=\operatorname{arcsen} n\operatorname{sen} r_0\ ,$$

si avrà

$$\Psi_0=45^\circ+2\,i_0\,.$$

Per valori di r poco differenti da r_0 è:

$$r=r_0\pm\delta r$$
$$r'=45-r_0\mp\delta r=r_0\mp\delta r$$

e quindi

$$\operatorname{sen} i=n\operatorname{sen}(r_0\pm\delta r)=n\operatorname{sen} r_0\pm n\,\delta r\cos r_0$$
$$\operatorname{sen} i'=n\operatorname{sen}(r_0\mp\delta r)=n\operatorname{sen} r_0\mp n\,\delta r\cos r\ ,$$

donde

$$\operatorname{sen} i+\operatorname{sen} i'=2\,n\operatorname{sen} r_0$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(i+i')\cos\frac{1}{2}(i'-i)=n\operatorname{sen} r_0=\operatorname{sen} i_0$$

Digitized by Google

E poichè la differenza $i'-i$ è dell'ordine di δr, sarà

$$i+i'=2i_0 \;;$$

sicchè nel caso di r poco differente da r_0 si avrà

$$\Psi=45^\circ+2\,i_0 \;. \qquad \ldots\ldots(6)$$

Adunque guardando nella direzione UT si vedrà fissa la immagine di P *quasi* allo stesso modo (*) come quando la deviazione è indipendente dall'angolo d'incidenza.

Nella ipotesi di $n=1,53$ si ha lo specchio seguente:

i	r	$45^\circ-r$	i'	$i+i'$
31° 33′	20° 00′	25° 00′	40° 17′	71° 50′
32 24	20 30	24 30	39 23	71 47
33 15	21 00	24 00	38 29	71 44
34 06	21 30	23 30	37 36	71 42
34 58	22 00	23 00	36 43	71 41
35 50	**22 30**	**22 30**	**35 50**	**71 40**

Essendo $i_0=35^\circ\,50'$ sarà

$$\Psi=116^\circ\,40'$$

e quindi un prisma triangolare rettangolare isoscele formato di una sostanza il cui indice di rifrazione è $=1,53$ può deviare un raggio luminoso di un angolo eguale a $116^\circ\,40'$.

Anche qui, per avere la immagine più luminosa, bisogna inargentare un pezzo del cateto AC.

Il supplemento dell'angolo Ψ è utile per la misura della distanza tra due punti A, B (fig. 4).

(*) È bene avvertire che l'immagine dell'oggetto guardato è colorata.

Digitized by Google

L' osservatore stando in A potrà far tracciare sul terreno l'allineamento AC inclinato di

$$\Psi = 45^\circ + 2 \operatorname{arcsen} n \operatorname{sen} 22^\circ 30' ;$$

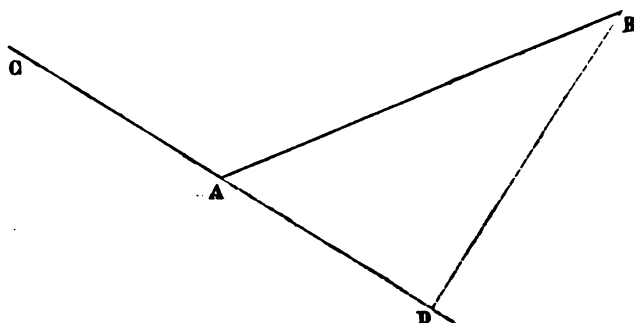



Fig. 4.

indi percorrendo l'allineamento CA, per mezzo dello stesso prisma potrà trovare il piede D della perpendicolare condotta da B su CA e misurare la lunghezza $AD = D$. Indicando con x la distanza richiesta AB si avrà:

$$x = \frac{D}{\cos(180 - \Psi)} \qquad \ldots\ldots (7)$$

Nella ipotesi di $n = 1{,}53$ si ottiene

$$x = 2{,}227\, D\ .$$

Il coefficiente $\frac{1}{\cos(180 - \Psi)}$ è una funzione dell' indice di rifrazione n della sostanza di cui è formato il prisma. Così p. e. per il *Crown-Glas* n. 9 per il quale è $n = 1{,}533005$ si ha

$$\Psi = 116^\circ 50' \ ; \quad \frac{1}{\cos(180 - \Psi)} = 2{,}2148\ .$$

Per il *Crown-Glas* n. 13 per cui $n = 1{,}531372$ è

$$\Psi = 116^\circ 45' \ ; \quad \frac{1}{\cos(180 - \Psi)} = 2{,}2216\ .$$

Digitized by Google

In pratica per un prisma di *Crown-Glas* si può sempre ritenere il coefficiente 2,220 e adoperare quindi la formola

$$x = 2,22\,D \qquad \ldots\ldots(8).$$

Del resto è meglio trovare sperimentalmente il valore del coefficiente $\frac{1}{\cos(180 - \Psi)}$ in ogni caso particolare.

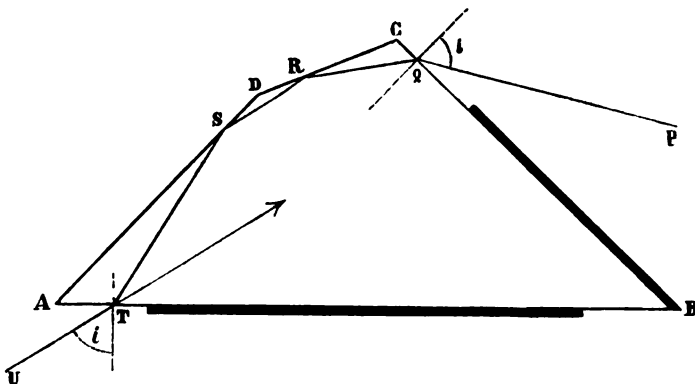
III.

Finora abbiamo supposto intero il prisma triangolare; possiamo tagliare il vertice dell'angolo retto in modo da poter tracciare anche angoli semiretti.

Tagliando il prisma con un piano inclinato alla ipotenusa di un angolo eguale a 22° 30′ si otterrà il prisma *quadrangolare* $ABCD$ rappresentato dalla fig. 5ª in cui si vede il cammino $PQRSTU$ che deve fare il raggio luminoso attraverso il prisma per essere deviato di 45°.

La possibilità di tale cammino si vede nello specchio seguente dove nella parte sinistra si trovano gli angoli dei tre triangoli CQR, RDS, STA nel caso generale di un angolo di rifrazione r corrispondente ad un angolo d'incidenza i, e nella parte destra si trovano gli angoli degli stessi triangoli nel caso di $r = 30°$.

Fig. 5.

Digitized by Google

$C = 90^\circ + 22^\circ\, 30'$	$C = 112^\circ\, 30'$ $(r = 30^\circ)$
$Q = 90 - r$	$Q = 60$
$R = r - 22\;\;30$	$R = 7\;\;30$
$180^\circ\, 00'$	$180\;\;00$
$R = r - 22^\circ\, 30'$	$R = 7\;\;30$
$D = 180 - 22\;\;30$	$D = 157\;\;30$
$S = 45 - r$	$S = 15$
$180\;\;00$	$180\;\;00$
$S = 45 - r$	$S = 15\;\;00$
$T = 90 + r$	$T = 120$
$A = 45$	$A = 45$
$180\;\;00$	$180\;\;00$

Si vede facilmente che, per la possibilità della deviazione di 45° del raggio incidente PQ, è necessario che sia $r > 22^\circ\, 30'$; sodisfatta tale condizione la riflessione sarà sempre totale tanto in R quanto in S.

Il prisma quadrangolare descritto precedentemente può adunque deviare un raggio luminoso di 45°, di 90°, 180° e può servire alla misura di una distanza; esso quindi può essere a buon diritto chiamato **Prisma universale.**

Sulla figura 5ª abbiamo marcato più intensamente quelle parti della ipotenusa e del cateto che debbono essere inargentate.

Le dimensioni del prisma possono essere le seguenti:

Ipotenusa $AB = 7$ centimetri

lato $AD = \frac{3}{4}$ del cateto intero (circa).

Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Maggio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice Presidente dell'Accademia, FLECHIA, Direttore della Classe, CLARETTA, ROSSI, MANNO, BOLLATI di SAINT-PIERRE, SCHIAPARELLI, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE-MARTIIS, BOSELLI, CIPOLLA e PEYRON che funge da Segretario.

Si legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio MANNO offre da parte degli autori le opere seguenti, dandone ampie informazioni:

1° « *Il Principe Cardinale Maurizio di Savoia, mecenate dei letterati e degli artisti* », del Cav. V. GIANAZZO di PAMPARATO (Torino, 1891);

2° Una serie di pubblicazioni storiche e bibliografiche del Canonico Ulisse CHEVALIER.

3° « *Documenti inediti per la storia delle armi da fuoco italiane* », raccolti e pubblicati da Angelo ANGELUCCI; vol. I (Torino, 1869). Il Socio MANNO mette in vista l'importanza di questo lavoro, ed esprime il desiderio, che questa raccolta sia continuata, e venga pure alla luce il *Dizionario militare*, intorno a cui l'Angelucci lavora da molti anni.

Digitized by Google

Il Socio SCHIAPARELLI legge una commemorazione del Socio corrispondente Giorgio RAWLINSON.

Il Socio CIPOLLA comunica alla Classe la perdita fatta del Socio estero Ferdinando GREGOROVIUS, e ne ricorda gli studi ed i lavori sulla storia d'Italia.

Lo stesso Socio legge una notizia sopra un diploma ora perduto dell'imperatore Carlo III (il Grosso) in favore della Chiesa di Vercelli.

Il Socio FERRERO legge una nota sopra un'ara votiva scoperta a Demonte.

Le commemorazioni e le notizie indicate sono pubblicate negli *Atti*.

In questa adunanza vengono pure eletti a Soci Stranieri, salvo l'approvazione sovrana, i signori professori Adolfo TOBLER e Rodolfo GNEIST, residenti a Berlino.

LETTURE

Breve commemorazione di GIORGIO RAWLINSON,
Socio corrispondente della Classe Morale, Storica e Filologica;

fatta dal Socio LUIGI SCHIAPARELLI

Nell'intervallo di tempo tra l'anno accademico passato ed il presente, infra le altre, la nostra Classe ebbe a lamentare la dolorosa perdita di uno dei più illustri ed operosi suoi colleghi corrispondenti, GIORGIO RAWLINSON, cultore valentissimo e fortunato della archeologia e della storia dell'Oriente antico; del quale espose luminosamente le vicende politiche e ogni ordine di coltura in tutti i suoi rami coi particolari di maggiore importanza, in otto volumi di oltre 500 pagine, di splendida edizione, abbellita da forse un migliaio di illustrazioni con carte geografiche, che ne rendono facile l'intelligenza, durevole la memoria e amena la lettura.

Digitized by Google

Giorgio Rawlinson, nato nel 1815 e fratello di Enrico, il grande filologo, scopritore e illustratore di monumenti assiri ed iranici, al quale dedica quasi tutta l'opera, che compiè in 40 anni di non interrotto studio e lavoro, si fece primamente notare nel mondo scientifico e letterario con parecchi articoli del *Dizionario della Bibbia*, e con una pubblicazione *Sulle differenze (contrast) del Cristianesimo col Paganesimo e col Giudaismo*. Quindi la traduzione di Erodoto in quattro volumi, con carte, note e illustrazioni, lo collocò fra i più insigni cultori dell'antichità ellenica.

Ma l'opera più grande e di utilità generale incontestabile fu la *Storia delle sei grandi monarchie asiatiche*, Assiria e Babilonia nel loro doppio periodo, Media, Persia e Partia, oltre l'Egitto e la storia dei Fenici (1); e nel mezzo di quelle pubblicazioni storiche un bellissimo *Manuale di storia antica* (un volume di quasi 600 pagine), opera utilissima, che compie quella non meno lodevole di Heeren sullo stesso argomento, ma già in parte antiquata; della quale però Rawlinson seguita l'ordine ed il sistema (2).

L'esecuzione di tutto il lavoro non potrebbe desiderarsi migliore, nè più adatta all'intelligenza e alla memoria dei lettori, nè più compiuta ad un tempo. L'autore procede ordinato dal principio al fine della narrazione della storia delle varie nazioni senza interruzioni, in modo di dare al lettore un giusto concetto del popolo di cui tratta. Comincia dalla descrizione fisica della contrada, convinto che l'ambiente geografico ed etnografico di un paese esercita una profonda azione sui suoi abitatori, e giova grandemente a chiarire molti fatti, che senza essa sarebbero difficilmente spiegabili. Alla storia politica unisce quella della coltura intellettuale, dei monumenti, delle arti, dei costumi, della religione, ecc., corredando il racconto colla indicazione concisa e rigorosa delle fonti, con parsimonia ed esattezza. Non afferma cosa, di cui non rechi documenti; e mostrasi al corrente non solo delle antiche scritture, ma dei principali lavori, scoperte archeologiche, progressi filologici e critici dell'età presente.

La narrazione è chiara, lo stile semplice e direi quasi didascalico, come doveva esser quello delle sue lezioni su quell'argomento. Forse in alcune conclusioni in relazione colla Bibbia, e nelle religioni, lascia qualche cosa a desiderare, e talvolta

(1) London, John Murray.
(2) Oxford, At the Clarendon press

Digitized by Google

abbonda in fiducia da questo lato, come membro della Direzione della Società archeologica biblica di Londra. Ma ciò nulla toglie al merito del suo gigantesco lavoro, di cui fu il compimento la *Storia dei Fenici* (1), che dedicò alle autorità e agli studenti dell'Università di Oxford, ed uscita l'anno prima (1889) di quello, in cui il suo Autore morì pieno di anni e di gloria, lasciando un monumento durevole della sua grande dottrina e del suo amore operoso dell'antichità.

Giorgio Rawlinson era nostro socio corrispondente: ed avendolo io stesso proposto alla classe, mi sono creduto in obbligo di farne una breve commemorazione; specialmente per essere egli stato uno di quei dotti, che onorano il proprio paese e le società scientifiche straniere, a cui vennero spontaneamente aggregati.

(1) London. Longmans, Green and Comp., 1889.

Commemorazione di Ferdinando Gregorovius;

del Socio CARLO CIPOLLA

Annuncio alla Classe una dolorosa notizia, ed è che la sera di ier l'altro, venerdì, 1° maggio (1), la scienza storica fece una perdita gravissima. È morto Ferdinando Gregorovius. L'illustre tedesco quasi poteva anche considerarsi italiano, se noi pensiamo all'amore speciale ch'egli portò al nostro paese, ai nostri monumenti, alla nostra storia. Quantunque stabilito a Monaco di Baviera, egli veniva spesso a far lunghi soggiorni a Roma, della cui storia egli era entusiasta.

La nostra Accademia da parecchi anni (2) si gloriava di averlo a suo Socio estero; per il che noi dobbiamo considerare la sua morte, come un nostro lutto speciale.

(1) Il fratello dello storico, colonnello Giulio Gregorovius, mi scrisse, che egli morì alle ore otto e un quarto di sera.

(2) Fu eletto Socio straniero nella seduta del 28 dicembre 1879.

Digitized by Google

Il Gregorovius è uno degli storici tedeschi più largamente conosciuti in Italia (1); e non poteva non esserlo. Non tutte le numerose sue opere intorno alla storia del nostro paese vennero voltate nella nostra lingua; ma tuttavia lo fu la maggior parte di esse. Egli non era un erudito freddo e pesante, tutto chiuso nelle sue cronache e nei suoi documenti. Anzi furono la molta e varia cultura, lo scrivere caldo ed immaginoso, lo stile elegantemente semplice, che gli procurarono fama, non solo tra gli storici di professione, ma anche fra tutti coloro che coltivano con amore le arti e le lettere.

Nato il 19 gennaio 1821 a Neidenburg, piccola città nella Prussia Orientale, nel distretto di Königsberg, si occupò dapprima di teologia e di filosofia, ma poi lasciò questi studi per abbandonarsi alle ispirazioni della sua anima d'artista, dedicandosi alla poesia ed alla storia. Egli intendeva la storia come opera d'arte; egli mirava alla ricostruzione del passato, facendo rivivere sotto gli occhi del lettore i suoi personaggi; e tale scopo raggiungeva, giovandosi delle memorie spesso frammentarie che ce ne rimasero, illuminate dal suo colpo d'occhio acuto e penetrante. Poichè questo colpo d'occhio egli lo possedeva e in ben alto grado. Tante volte avviene che sopra intricate questioni storico-critiche egli non possa spendere che poche parole, perchè incalzato da altri argomenti, ma quelle poche parole sono uno sprazzo di luce.

Lo stile suo è splendido e di una splendidezza speciale. Poichè è uno stile immaginoso, colorito, ma niente affatto pesante, niente affatto ridondante. È anzi uno stile diafano, attraentissimo, che

---

(1) Erano diggià scritte queste pagine, quando l'egregio dottor Enrico Simonsfeld, dell'Università di Monaco, pubblicò (*Beilage zur allgemeinen Zeitung*, 8 maggio 1891) una bellissima commemorazione del Gregorovius, nella quella egli osserva che l'illustre defunto « apparteneva a quella schiera, anzi, piuttosto, stava alla testa di quegli uomini, che, come Hillebrand, Reumont, G. M. Thomas, coi loro lavori fecero altamente apprezzata la scienza tedesca, e anche per le loro personali amicizie prepararono l'accostarsi dell'Italia alla Germania, e l'alleanza fra i due popoli ». Questi tedeschi, che, lungamente soggiornando nelle nostre città, appresero a stimare la nostra letteratura e la nostra storia, e suscitarono in noi l'amore per la letteratura e la storia loro, ormai sono morti tutti, lasciando pochi successori. Fra quei pochi va annoverato il Simonsfeld stesso, al quale si debbono utilissime pubblicazioni sulla storia di Venezia nel medio evo.

Digitized by Google

s'impadronisce del lettore e lo domina. Quando egli delinea le condizioni geografiche di un sito, allora lo scrittore diventa paesista; e coll'introduzione delle ricordanze storiche anima vieppiù la descrizione geografica. Tra le cose sue a me ha lasciato una indelebile impressione la descrizione dell'assedio di Metz, al quale si trovò presente per pochi giorni. Le case mutate in caserme nei villaggi presso all'assediata città, la confusione dei soldati che vengono e vanno, attendono gli ordini, e provano e manifestano l'ansia che precede il pericolo dell'imminente battaglia, tutto queste è rappresentato dal Gregorovius con tale efficacia, da farci credero trasportati nel mezzo degli avvenimenti, non di leggere un libro. Ci par proprio di vederli i contorni di Metz, quando egli ci descrive la corona dei forti racchiudenti l'avvallamento, in cui Metz giace nascosta così, che solo la cima della cattedrale sporge all'aperto (1).

Ci sono varie specie di storia. C'è la storia critica che trova i materiali, li coordina e li vaglia. Questa, per verità non è ancora storia, quantunque sia preparazione indispensabile alla storia. La vera storia si solleva più in alto; essa comincia là dove la critica finisce. Essa espone gli avvenimenti, che la critica ha dimostrato veri; trova tra i diversi avvenimenti la ragione di causa e di effetto, e li narra secondo tali esigenze. La storia, nel pieno senso di questa parola, è più nobile scienza, che non la critica. E per la storia, più che per la critica, è necessario altezza di mente, nobiltà di animo, elevatezza di pensiero, potenza di parola e di stile.

Il Gregorovius fu storico nel più alto senso di questa parola, pur non cessando dal raccogliere e studiare i documenti, che costituiscono la base della storia. Possedendo egli una rarissima valentia nello stile, riuscì a far tali libri, che non solo narrassero i fatti, ma li ponessero *sub oculis* del lettore, producendo in esso l'effetto dell'azione drammatica.

Dapprima egli usava cercare i documenti, poi li esaminava diligentemente e così assodava la verità dei fatti; quindi fra questi sceglieva i più importanti e caratteristici, e attorno ad essi raggruppava i minori. Poi veniva l'opera dell'arte e sentimento, e con essa dava vita a ciò che era morto.

(1) Nella scrittura *Fünf Tage vor Metz*, nel secondo volume delle *Kleine Schriften*.

Digitized by Google

La geniale eleganza del suo stile è molto spesso veramente affascinante. Non nego che talvolta dinanzi alla sua potenza immaginativa, che vivifica i grandi defunti, noi quasi ci chiediamo se la magìa del suo stile non riempia, contro il proposito dell'autore, qualche lacuna lasciata dalle memorie storiche. Ma bisogna pensare che dinanzi alla sua mente brillavano gli ideali di una storia larga, comprensiva, e in cui, come nelle storie dei classici, i grandi fatti si accompagnassero con una forma elevata. Egli non vuole fare la critica per la critica, ma la critica per la storia. Basta studiare davvicino qualcuno fra gli innumerabili argomenti da lui trattati, per comprendere quanto grande sia stata in lui la preparazione erudita, che egli volle studiatamente nascondere. Ognuno sa, del resto, che i lavori d'insieme non esauriscono mai un argomento vasto e complesso e ammettono il posteriore lavoro della critica minuta.

E ancora ci chiediamo se egli in ogni caso si dimostri pienamente sereno, calmo, oggettivo nei suoi giudizi, se egli sappia costantemente astenersi dal far piovere sopra i fatti che narra il riflesso di se medesimo e delle sue tendenze personali. Sarebbe adulazione il negar tutto questo, ma d'altronde sarebbe ingiustizia il dimenticare che nel rispondere a tale domanda, dobbiamo riflettere a ciò, che un uomo ricco di sentimento, espande facilmente se stesso al di fuori, e adopera una parola che non è morta, ma riscaldata dal fuoco che divora il cuore di chi la pronuncia. E quando la parola è calda, appassionata, anche il pensiero erompe caldo ed appassionato.

Quando contempliamo le esimie personalità, è confortante studiare in esse ciò che vi è di bello e di grande, poichè questo è destinato a restare. E moltissimo resterà delle opere di Gregorovius, perchè varie e splendide veramente furono le sue attitudini, come erudito e come scrittore.

Noi viviamo in un tempo di febbrile attività negli studi storici. Si moltiplicano le pubblicazioni dei documenti; in una colluvie infinita di monografie si indaga ogni persona, ogni minimo fatto del passato. Il Gregorovius segnò certe grandi linee, cui non varrà a cancellare quella critica minuta, la quale deve a lui, se le sono aperti nuovi e vasti campi, in cui far prova di se medesima.

Dicemmo che per lui la storia si rannoda indissolubilmente all'arte; e quindi vediamo che uno tra i suoi primi lavori storici di

Digitized by Google

mole notevole (1) è l'*Imperatore Adriano*, la cui prima edizione uscì nel 1851, contemporaneamente ad un dramma sulla morte di Tiberio. Anche negli anni dell'età matura egli ritornò più volte alla poesia; alle rovine di Pompei dedicò un poemetto in esametri.

Il suo pensiero risaliva volentieri all'età classica. Nel primo capo dell'*Adriano* (ediz. seconda, Stuttgart, 1884, p. 7-8) egli rileva con compiacenza che quell'imperatore *riuniva in sè due nature; egli era insieme greco e romano;* e ancora: *egli avvicinò spiritualmente tra loro le due metà del mondo antico, l'Ellade e Roma.* E all'Ellade e a Roma, Gregorovius dedicò la massima parte della sua vita e della sua attività scientifica.

Nel 1852 si recò a Roma e la storia di Roma lo entusiasmò. Nel viaggio toccò l'isola di Corsica e alla storia di quell'isola dedicò una monografia, che rimase sempre una delle cose più graziose, se non storicamente compiute, che siano uscite dalla sua penna. Quella monografia fu in parte tradotta nella nostra lingua da Paolo Perez, il quale trascurò tuttavia tutta la parte descrittiva, che è la più lunga, per non darci (2) che la versione della introduzione storica. La *Société des lettres* di Corsica procurò testè una versione francese dell'intera opera (3).

Col libro sulla Corsica, il Gregorovius segnò una speciale forma letteraria: l'associazione della narrazione storica, alla descrizione topografica. E a questa forma letteraria appartengono i cinque volumi dei *Wanderjahre in Italien*, che sono splendidi per forma, e dilettevoli alla lettura (4). Gregorovius si compiacque di quel genere letterario. Anzi quasi può dirsi ch'egli abbialo creato, o almeno l'abbia per primo portato ad alto grado di perfezione. Le sue pubblicazioni in questo genere ebbero il migliore accogli-

---

(1) Iniziò le sue pubblicazioni storiche con alcuni libri sulla storia polacca. Il Simonsfeld ci spiega questo fatto, ricordando che il Gregorovius discendeva da famiglia di origine polacca.

(2) Firenze, Le Monnier, 1857.

(3) In tre volumi stampati a Bastia, 1881, 1883, 1884.

(4) L'ultimo volume ne uscì nel 1877. Il loro contenuto è il seguente: tomo I « Storia, vita e scene d'Italia » (parla di Toscana, Roma, Capri; il primo articolo riguarda l'isola d'Elba e fu scritto nel 1852); tomo II « Estati latine » (parla anche di Avignone); tomo III « *Siciliana* »; tomo IV « Da Ravenna a Mentana »; tomo V « Campagne Pugliesi » (quest'ultimo volume fu scritto nel 1876). Di questi volumi l'ultimo fu tradotto in italiano dal professore Mariano.

Digitized by Google

mento, perchè presentano una vera fotografia dei luoghi, e offrono al lettore una erudizione, non pesante, ma pure istruttiva.

Egli tradusse, assai per tempo, in tedesco le poesie di Giovanni Meli; ed è questa una prova ben evidente della sua conoscenza della nostra letteratura.

A Roma passò i più bei giorni della sua vita, e li impiegò nello studiare e scrivere la storia di quella città, a partire dalla decadenza imperiale, fino a mezzo il Cinquecento. È quasi un millennio e mezzo di storia, per narrare la quale egli fece lunghissime ricerche negli archivi di Roma, del resto d'Italia, di Germania. Forse è questa la sua opera principale, e il Municipio di Roma, precipuamente per essa, lo nominò suo cittadino onorario. Non so tuttavia che cosa ci sia di vero in una voce corsa e ripetuta in Germania e in Italia, che la versione della *Geschichte der Stadt Rom im Mittelalter* (1), che si pubblicò a Venezia, sia stata ordinata dal Municipio di Roma. Uscì nella Collana storica dell'Antonelli, e non credo che in quella Collana il Municipio di Roma abbia giammai avuto nulla a che fare.

Quest'opera fu riguardata come la principale tra quelle del nostro autore, perchè più lungamente di tutte fu studiata e pensata. E infatti, dove trovare un argomento più importante e insieme più attraente? E, dal lato dello scrittore, dove trovare una dottrina più vasta, una intelligenza più fine? Il suo delicato sentimento artistico era necessario allo storico di Roma, dove i monumenti, così pieni di eloquenza nel loro solenne silenzio, attendevano uno storico-artista che li interpretasse. Come può immaginarsi uno storico di Roma freddo per l'arte? E chi più del Gregorovius preparato a sentire le impressioni artistiche, e ad associare i monumenti alle memorie storiche? L'autore non vi ha cansato ogni imperfezione; lo ammetto. Sopra alcuni punti sarà lecito avere opinioni divergenti dalle sue. Si potrà ancora credere, che, come tutti i lavori d'insieme, anche questa *Storia* perdette e perderà qualche brandello, strappatole dal progresso degli studi e dalla critica inesorabilmente severa. Ma impressiona in quest'opera e desta una vera meraviglia la ricchezza dell'erudizione sposata alla più

1) Si pubblicò fra il 1859 e il 1873, in 8 volumi. La *Geschichte* fu preceduta dal volume *Die Grabmäler der römischen Päpste*, che uscì nel 1857. Anche prima di pubblicare la Storia di Atene, il Gregorovius diede alle stampe alcune monografie di storia greca, che egli considerava come *scritti di orientazione*.

Digitized by Google

perfetta arte espositiva. E bisogna pensare che un libro di questo genere non esisteva affatto, e che solamente una preparazione indefessa, sorretta da un ingegno rarissimo, poteva innalzare un così eccelso edificio, nel quale le parti si corrispondono con ordine altamente mirabile. È un'opera che rivela in lui una vastità portentosa nelle cognizioni, una inflessibile tenacia nei propositi, una rarissima genialità di esposizione. Egli compulsò documenti d'ogni sorta, mentre giacevano ancora negli archivi, inediti, non illustrati. E, sorretto dal suo genio poetico, diede carne e sangue alle ossa dei morti, e loro infuse nuovamente la vita.

Nel 1874 vide la luce la sua monografia sopra Lucrezia Borgia, la quale ebbe straordinaria diffusione, essendo stata tradotta in francese, in ungherese e in italiano. Ad alcuni sembra il suo capolavoro.

Nella nostra lingua la volse Raffaele Mariano, al quale dobbiamo tutte, o quasi tutte, le versioni fatte in italiano delle opere del Gregorovius, tranne quella della *Geschichte der Stadt Rom* che appartiene a Renato Manzato.

La molta preparazione erudita, la potenza restitutrice del passato, la tranquilla vivacità dello stile armonizzano pienamente in questo lavoro, il cui argomento si prestava tanto bene alla manifestazione delle rare qualità del Gregorovius. La principessa che mutò la sua abitazione da città a città tanto spesso, quanto rapidamente cambiò le condizioni del suo stato, che si trovò in mezzo alle più aspre difficoltà, che sofferse ogni sorta di dolori, prestò ottima materia ad uno scrittore così abile nella descrizione dei luoghi e nel tratteggiare i caratteri dei personaggi. Quella Lucrezia che per i più era stata nient'altro che una donna perduta, ricupera per lui la sua dignità. Egli vuol persuadere il lettore che bisogna nutrir compassione ed anche ammirazione per colei che i drammi e i romanzi ci suggerivano di disprezzare. Io non so se il benigno giudizio del Gregorovius possa essere modificato dal progredire degli studi. È certo tuttavia che esso è il prodotto di una persuasione profonda; poichè infatti a molti quasi potrebbe parere strano che questo volume di riabilitazione sia stato scritto da uno storico, tutt'altro che parziale ai pontefici.

La storia dei Borgia è ancora da fare, nonostante che negli ultimi anni numerose e dottissime monografie siansi pubblicate sopra di questa famiglia. Che se pur qual che cosa si è fatto, non è che giustizia il confessarlo, una delle più forti spinte a tali studi la dobbiamo al Gregorovius e alla sua monografia sopra Lucrezia.

Digitized by Google

Altri lavori, e in buon numero, egli dedicò alla storia d'Italia, tra i quali citerò lo studio sulle monete di Alberico, la illustrazione della pianta di Roma delineata da Leonardo da Besozzo milanese, la stampa della rozza, ma pur interessante descrizione del sacco di Roma nel 1527, che dobbiamo a Gumppenberg, le notizie sui due Crivelli ambasciatori bavaresi a Roma nel secolo XVII, ecc. Fu tradotto in italiano il suo studio sopra Urbano VIII e la politica pontificia durante la guerra dei Trent'anni.

Finita la storia di Roma, il Gregorovius volse la sua attenzione e l'instancabile attività del suo spirito alla storia di Atene.

Dopo Roma egli amava la Grecia; e nella Grecia amava specialmente Atene. Nella letteratura tedesca dell'ultimo secolo Atene e la Grecia hanno una parte precipua. I deliziosi canti di Goethe, di Schiller, di Geibel, di Heine, mostrano come il cuore dei tedeschi batta per la Grecia. Quello che Ernesto Curtius fece per l'antica Ellade, Gregorovius compì per l'Atene medioevale. Visitò la Grecia per la prima volta nella primavera del 1880, e tosto si decise a realizzare il suo vecchio divisamento di scrivere sulla storia di quel paese, principiando col narrare la biografia di una principessa greca, Atenaide, donna piena di coltura, che dal paganesimo passando al cristianesimo, segnò in se stessa la trasformazione subìta dalla sua nazione. E sulla Grecia pubblicò in seguito altri scritti, che sono ricostruzioni storiche geniali, o descrizioni di paesi. Parlò dei *Mirabilia* di Atene, parlò di Corfù, ecc. E finalmente pubblicò, in due volumi, a Stuttgarda nel 1889, la sua storia di Atene nel medioevo. E quest'opera fu accolta dagli eruditi col più vivo entusiasmo. È un inno di lode, con pochissimi appunti, la recensione che recentissimamente ne fece il Diehl nella *Revue historique*. Dall'Archivio di Stato di Venezia, il Gregorovius tolse la maggior parte dei documenti inediti, ch'egli usufruì in questo suo libro.

Nella *Geschichte der Stadt Athen im Mittelalter*, il Gregorovius ci guida attraverso ai giorni decadenti di quella città, fino alla vittoria definitiva della Mezzaluna sulla Croce; ma all'autore duole di lasciare il suo lettore sotto l'impressione di un pensiero di tanta mestizia, e nelle ultime pagine del secondo tomo, riassume i fatti posteriori, e termina cogli eroici sforzi, che, coronati da lieto esito, ridonarono ai Greci una patria.

Parlando di Roma e di Atene, Gregorovius intendeva discorrere dei Greci e degli Italiani in generale. Infatti nella prefazione

Digitized by Google

alla sua storia di Atene, dice chiaro il motivo per il quale egli predilesse la storia di queste « immortali » città: perchè i popoli alle quali esse appartengono, diventano nelle medesime *plastici e monumentali*. Anche in queste parole adunque abbiamo la manifestazione del pensiero e dell'animo dello storico-artista.

L'ultimo scritto che uscì dalla sua penna è un discorso sulle Grandi Monarchie. Egli lo tenne nel passato novembre all'Accademia di Monaco, e subito l'abbiamo veduto riprodotto in italiano nella *Nuova Antologia* (1). Comprende in un solo sguardo la storia mondiale, in quanto essa dimostra il crescente avvicinarsi reciproco dei popoli, che mirano a fondersi in un solo organismo sociale, realizzando estrinsecamente l'unità intrinseca dell'umana famiglia. Con questo lavoro di larga sintesi, in cui si riconosce la nobiltà della storia e l'eccellenza dei destini dell'umanità, egli chiuse degnamente la sua carriera scientifica. Per lui l'umanità ha uno scopo, un fine; fine alto, elevato, verso il quale essa si muove lottando, come a meta provvidenziale prefissale. Qualcuno sperava che dopo Roma ed Atene, il Gregorovius studiasse Costantinopoli, che è un'altra di quelle città ch' egli disse « immortali ». E per verità l'*Atenaide* poteva anche essere una preparazione alla storia di Bisanzio. Ma la sua fibra, sotto il peso di così intenso e così lungo lavoro, si era oramai indebolita.

Chi contempla il ritratto che del Gregorovius sta inciso dinanzi al suo libro *Nelle Puglie* — un volume dei *Wanderjahre* — nella versione di R. Mariano, forse può credere che la sua fisonomia fosse diversa dalla vera. Il ritratto è molto somigliante, ma l'occhio parmi vi sia riprodotto con troppa austerità; quasi lo si direbbe di viso arcigno. In realtà il Gregorovius ebbe severa la fisonomia, ma senza soverchia fierezza. La sua conversazione era un misto di dottrina e di nobile famigliarità.

La perdita dell'illustre scrittore ed erudito tedesco sarà amaramente deplorata da quanti s'interessano agli studi storici, anzi da tutti coloro che seguono con animo attento le vicissitudini della letteratura moderna. La nostra Accademia ha anche il debito di ricordare in lui il proprio Socio; poichè, non contento di aver mostrato per lettera che la sua aggregazione gli era tornata gradita, non mancò d'inviare a questa Accademia le sue pubblicazioni.

---

(1) Tomo CXV, pag. 5 e segg. (1° gennaio 1891).

Digitized by Google

Essa tuttavia comprende, come onorando la memoria del Gregorovius, più che ai vincoli particolari che a lui la legavano, debba guardare ai meriti scientifici dell'erudito tedesco e alla predilezione che egli ebbe per l'Italia e per la sua storia (1).

---

(1) Nella lettera da Roma, 1° febbraio 1880, colla quale ringrazia l'Accademia per la sua nomina a Socio estraneo, il Gregorovius si esprime con parole molto benevole e gentili per l'Accademia stessa. Fa conto di qui pubblicare per disteso un'altra sua lettera, la quale, come la prima, si conserva nell'archivio accademico, e che riesce di grande onore alla memoria del Ricotti. Ambedue le lettere sono in lingua italiana.

« Onorevole Presidenza,

« Stavo sul punto di partire da Monaco per Roma, quando mi pervenne « la dolorosa partecipazione della morte, che ci tolse quell'illustre uomo, che « fu Ercole Ricotti. Quindi non prima di oggi mi venne fatto dar testimo- « nianza a V. S. del vivo duolo, onde codesta irreparabile perdita anche me « ha empito. La R. Accademia di Monaco, che andava gloriosa di noverare « tra i suoi più celebri soci il Presidente della Torinese, saprà onorare « debitamente la memoria del dotto, il quale dopo di aver occupato un sì « segnalato posto nel e lettere e nelle scienze, lascia a noi superstiti l'esempio « del suo carattere illibato, e il tesoro delle sue opere non periture.

« V. S. accolga benevolmente da mia parte l'espressione di quella devo- « zione, che sempre ho professato all'illustre defunto, nonchè l'attestato dei « sensi di riverenza e di affetto, che mi legano all'insigne Accademia di « Torino, della quale mi protesto

« *Roma*, 14 *marzo* 1883.

« *Divotissimo Socio*
« Ferdinand Gregorovius. »

Forse solo la sua lontananza da Monaco impedì al Gregorovius di parlare del Ricotti dinanzi all'Accademia Bavarese, nella quale quegli fu invece commemorato dal Giesebrecht. E anche Guglielmo Giesebrecht è ora fra i morti !

Digitized by Google

Di un diploma perduto di Carlo III (il Grosso) in favore della Chiesa di Vercelli;

del Socio CARLO CIPOLLA

Iacopo Durandi (1), il quale fu, a non dubitarne, uno dei maggiori critici ed eruditi piemontesi della vecchia generazione, pubblicò e lungamente e dottamente discusse un diploma di Ottone III, datato da Roma 7 maggio 999, e concesso in favore della Chiesa Vercellese.

Anche nel tomo I *Chartarum*, nei *Mon. hist. patriae* (2), troviamo pubblicato un diploma di Ottone III, in favore della stessa Chiesa Vercellese e del suo vescovo Leone; e anche questo diploma porta la data di Roma 7 maggio 999. Ma i due diplomi sono affatto diversi tra loro. Poichè nel primo diploma si confermano numerosi ed ampli possessi alla Chiesa Vercellese, e si convalidano i diplomi precedentemente largiti a pro della medesima Chiesa. Invece nell'altro diploma, l'imperatore fa una concessione nuova al vescovo Leone, quasi a ricompensa larghissima di quanto gli aveva fatto soffrire re Arduino. L'imperatore dice: *concessimus* a Leone *totam civitatem Vercellensem in*

(1) *Alpi Graie e Pennine*, Torino 1804, p. 148 sgg.; MURATORI, *Ant. Ital.* VI, 317; cfr. PROVANA, *Re Ardoino*, Torino 1844, p. 348 sgg., il quale riproduce e commenta assai eruditamente il diploma stesso, che è il n. 1190 dello Stumpf. Alcuni brani ne estrasse l'UGHELLI (*Italia sacra*, ed. Coleti, IV, 772). Il TERRANEO nel suo ms. *Tabularium Celto-Ligusticum* (nella bibliot. Nazionale-Universitaria di Torino) inserì il documento, trascrivendolo dall'IRICO, *De S. Oglerio* p. 3-4, e collazionandolo col Muratori; copiò anche il testo dell'Ughelli; e, ciò che più importa, aggiunse al suo testo una stampa per uso legale, dove si contiene il diploma stesso.

(2) Col. 325 sgg., n. 193 (Stumpf 1191). — Ambedue i diplomi vengono accennati da Vittorio Mandelli (*Del governo civile di Vercelli nel sec. XII*, in *Diario Vercellese* del 1847), il quale nella frase *more precessorum* ecc. intravvede un'allusione a concessioni fatte in antichi tempi « a partire fors'anche da Carlo il Grosso. »

Digitized by Google

integrum cum omni publica potestate in perpetuum more precessorum atque predecessorum nostrorum. Come si vede, la frase che richiama ai precedenti re o imperatori è molto vaga, mentre, perchè avesse valore storico, dovrebbe essere pienamente determinata. E quando anche si volesse dare una vera importanza a questa frase, non ci sarebbe alcun motivo per asserire che Ottone si riferisse a diplomi dati dai suoi precedessori in favore della Chiesa Vercellese, collo scopo di aggiudicare ad essa il comitato di quella città. Anzi non mancano considerazioni in senso opposto. Poichè Ottone III usa la parola *concessimus*, la quale non implica, anzi esclude il concetto di conferma. Nel seguito del diploma si ribadiscono gli stessi pensieri, si ripetono le stesse espressioni, dicendosi che l'imperatore *donavit* al vescovo Leone *totum comitatum cum omnibus publicis pertinentiis, et totum comitatum quem dicunt sancte Agathe in perpetuum*..., vale a dire, che la donazione include, oltre al comitato di Vercelli, anche quello di *Sancta Agatha*, cioè di Santhià (1).

Rilevato il valore della frase *more precessorum atque predecessorum nostrorum*, bisogna anche accennare alle questioni sollevatesi sull'autenticità del diploma stesso. Esso è accompagnato da una lettera di papa Silvestro II; questa è senza data, e contiene la dichiarazione, *affirmavimus*, che il comitato di Santhià spetta alla Chiesa Vercellese. Anche in questa lettera vennero riscontrati alcuni vizi. Tuttavia essa è ammessa per buona sia dal Iaffé, sia da coloro che di recente ripubblicarono l'opera del Iaffé (2). L'epistola pontificia si collega colla sinodo Romana, celebrata fra l'aprile ed il maggio 999, nella quale, alla presenza dell' imperatore Ottone III, fu appunto scomunicato Arduino, per le offese da lui recate al vescovo Leone (3). Quanto all'autenticità del diploma imperiale, sarà sufficiente avvertire che S. Löwenfeld (4), pure ammettendo che nella seconda metà del medesimo si incontrino alcune difficoltà, dichiara che non si può revocarne in dubbio l'autenticità. Egualmente Carlo Rieger (5),

---

(1) Gli scrupoli del DURANDI (*Dell'antica condizione del Vercellese*, Torino 1766, p. 91-2) sulla derivazione etimologica di *Santhià* da *Sancta Agatha* non hanno ragione di essere.

(2) *Reg., Pontificum* 2 ed., 3903 (?989).

(3) *Reg.*, 2 ed., I, 496.

(4) *Leo von Vercelli*, Posen 1877, p. 12-3.

(5) *Die Immunitätsprivilegien der Kaiser aus dem sächsischen Hause für italienische Bisthümer*, Wien 1881, p. 47.

Digitized by Google

confermando le osservazioni che Steindorf oppose ai dubbi di Bethmann-Hollweg, confermò l'autenticità del diploma. E per lo scopo nostro, ciò può essere sufficiente.

Se riferendosi al costume dei suoi predecessori, per quanto riguarda la concessione dei diritti comitali, Ottone III poteva alludere a quanto suo padre e il suo avo avevano usato determinare in favore dell'una Chiesa o dell'altra, senza alludere ad alcun diploma riflettente Vercelli, ben diversamente vanno interpretate le espressioni dell'altro diploma. Giacchè ivi l'imperatore accenna espressamente a vari precedenti diplomi, che avevano per oggetto particolare la Chiesa Vercellese. Ottone III tosto dichiara di voler confermare (non usa del verbo concedere) quanto fu mai elargito a quella Chiesa « et maxime que Carolus imperator Liutvardo episcopo aut dedit aut reddidit ». E tosto dopo: « quod nos ipsi imperatoris Caroli praecepta legimus, et litterae in ecclesia sancti Eusebii a tempore Caroli super altare sancti Johannis scriptae testimonium donant et ad veritatem recognoscendam fidem legentibus faciunt ». Qui pare che l'imperatore faccia cenno indiretto, non di uno, ma di più diplomi, *praecepta*, di Carlo. Noi possediamo (1) un diploma di Carlo III in favore di S. Eusebio di Vercelli, largito a preghiera del vescovo Luttardo, datato da Pavia, 16 marzo 882, che fu pubblicato da una copia del 1340. Sarà bene confrontare minutamente il diploma dell'anno 882, con quanto, nel diploma Ottoniano del 999, sembra dipendere da altro diploma di Carlo III, diverso da quello a noi pervenuto.

Carlo III nel diploma dell'anno 882 fa una concessione a *s. Eusebio*, e al vescovo Luttardo, dicendo di elargire cose non prima donate, e restituire ciò che a quella Chiesa era stato dato da imperatori e re, e poi era stato ad essa rapito (2). Concede dunque:

1) « curtem nostram magnam, que dicitur regia, antico (*antica?*) nuncupatur vulgo, cum tota silva eiusdem ». Questa *corte regia*, di cui dovremo parlare anche in appresso, « comprendeva una notevole parte della città di Vercelli », siccome scrive

(1) *Mon. hist. patriae*, Chart. I, 64-6, n. 38 (Mühlbacher 1592).

(2) « Aliqua de iure regni nostri concederemus et aliqua suae ab imperatoribus et regibus iam donata sunt et subtracta sunt redderemus ».

Digitized by Google

il p. Bruzza (1); questo erudito si appoggia qui al Mandelli (2), il quale parla della corte regia a proposito di un diploma di Berengario I, del 913, dal quale egli trae occasione per discorrere del perimetro antico della città di Vercelli, e della estensione di detta *corte regia*. Di questa corte si tace nel diploma Ottoniano del 999 (3). In una donazione fatta, nel 945, da Attone vescovo di Vercelli ai suoi canonici (4), si ricorda che la corte *quondam regia* era stata *concessa* al donatore dai re Ugo e Lotario « quae...... Vercellis, quam nobis per precepti paginam Ugo et Lotarius concesserunt cum omnibus suis adiacentiis et familiis ». Ci sono bensì pervenuti due diplomi di Ugo e Lotario in favore dei canonici di Vercelli, degli anni 943 e 945 (5), ma pare che nessuno di essi sia il documento a cui allude Attone. Sembra dunque che esso non ci sia stato conservato.

2) le corti di *Bugella* (Biella), *Sestegnum* (Sostegno, cfr. Durandi, *Alpi Graie*, p. 115), *Romanianum* (Romagnano), *Rovaxinda* (Roasenda), *Firminiana* (Formigliana), *Aucimianum*, ricordate nel diploma del 999 (6).

3) varie altre corti, (*Roueredo*, *Trecade*) col ponte detto *Notingo* (dal vescovo Vercellese di questo nome), delle quali località tace il diploma Ottoniano. Per l'opposto molte località ricordate in quest'ultimo documento mancano nel precedente. Questo non ci deve far meraviglia, poichè Ottone III non intende di limitarsi a confermare i *praecepta* di Carlo III, ma di confermare e questi e altri documenti, e di aggiungere nuove elargizioni. Infatti si trova nel suo diploma una lunga serie di beni tolti ad alcuni nemici della Chiesa Vercellese, che furono per la loro condotta privati del loro avere, tra i quali sopratutto figura l'arcidiacono Vercellese Giselberto, accusato di essersi fatto seguace di re Ardoino. Nè basta questo, poichè per parecchie località si citano altri diplomi

(1) *Iscriz. Vercell.*, p. 354.

(2) *Il comune di Vercelli*, III, 54.

(3) È quello che il Dümmler registra, senza numero, e colloca tra il n. 68 e il n. 69.

(4) Chart. I, 155-6, n. 93.

(5) Chart. I, 152-3, n. 91 e 157-8, n. 95.

(6) Nel diploma Ottoniano, edito dal Durandi, leggonsi infatti, in mezzo agli altri, anche i seguenti nomi: « Firminianam », « Sestignum », « Bugella cum omnibus suis appendiciis », « districtum per totum Bugellense », « Sylva Rovaxinda », « Romanianum », « Aucimianum ».

Digitized by Google

di altri re ed imperatori; qui peraltro è debito osservare che Ottone III poteva benissimo citare un diploma di sovrano anteriore a Carlo III, anche se la località in esso accennata fosse stata compresa in qualche diploma di Carlo III, tanto più che può anche supporsi che Carlo III, insieme colla località rammentasse il nome di quel monarca che l'aveva donata o confermata alla Chiesa Vercellese.

Ciò premesso, sarà opportuno di rilevare quali diplomi sono espressamente ricordati nel diploma Ottoniano. Per molti luoghi non si cita alcun diploma anteriore, e qui può supporsi che si alluda implicitamente ai precetti di Carlo III, che sono citati, nella maniera larga e comprensiva che abbiamo indicato, sul principio del precetto Ottoniano; ma può anche ammettersi che talora si alluda invece ad altri documenti a noi totalmente sconosciuti. Ecco la serie dei diplomi accennati nell'Ottoniano;

a) *Re Liutprando* « cortem Torcelli confirmamus sicut Liprandus rex donavit ».

b) *Lotario I.* « Confirmamus s. Michaëli de Luceio, sicut Lotarius augustus donavit, quando corpus s. Januarii ibi collocavit, cortem Quadradolam cum districtu herimanorum ». Qui veramente non si parla di un dono fatto alla Chiesa di Vercelli, ma al Monastero di Lucedio. Bisogna tuttavia riflettere che il dono stesso quasi doveasi riputare come fatto alla Chiesa di S. Eusebio, giacchè questa apparteneva a quel monastero, con tutti i suoi diritti.

c) *Lodovico* (Lodovico II?). « Cortem Canavam sicut Ludovicus imp. donavit ».

d) *Berengario II e Adalberto*, che largirono Clevolo ed altri luoghi di loro proprietà.

e) *Ottone II*, che confermò o rinnovò una donazione di Carlo III, siccome tosto si dirà.

Ed ora veniamo ai luoghi, nei quali si ricorda espressamente un precetto di Carlo III. I passi sono quattro, cioè;

1) « Odoniacum cum districtu... et ecclesiam sancti Salvatoris ultra Padum, sicut Carolus augustus fecit ».

2) « Abbatiam de Arona confirmamus sicut praeceptum Caroli testatur ».

3) « Confirmamus s. Eusebio abbatiam de Luceio, sicut Carolus augustus et divae memoriae genitor noster (*Ottone II*) fecerunt ».

Digitized by Google

4) « Confirmamus Romanianum et Aucimianum, sicut Carolus augustus donavit et confirmavit ».

Solamente il quarto punto, con *Romanianum* (Romagnano) e *Aucimianum* (Occimiano) trova la sua corrispondenza nel noto diploma di Carlo III. D'altra parte, parecchi luoghi menzionati da Carlo III nel suo conosciuto diploma dell'anno 882, e cioè Biella, Sostegno, Roasenda, Formigliana, sono bensì confermati dal precetto di Ottone III, ma senza che qui si dichiari espressamente che di essi facesse menzione Carlo III.

A queste cognizioni che ci sono offerte da documenti noti, posso ora aggiungere un singolare documento, che non saprei se si debba appellare o notizia o iscrizione. Esso mi fu primieramente indicato dall'egregio dott. Federico Patetta, che lo vide al principio del ms. XV, del sec. X, nell'Archivio Capitolare di Vercelli.

Recatomi addì 3 giugno 1890 a visitare l'Archivio Capitolare di Vercelli, vi fui accolto con ogni maniera di cortesie dal compianto canonico Pietro Cannetti, allora archivista e bibliotecario; e, per cortesia di lui, potei esaminare a tutto mio agio l'antico codice, e trascrivermi la notizia indicata, la quale si legge sul *verso* del fol. 1, occupando 12 linee.

Ecco il documento o Notizia:

HAEC TIBI REX KAROLUS SCISSIMO REDDO TENENDA.
DEDIMUS CURTEM REGIAM INFRA VRBEM.
ET CURTES DUAS IN CASTELLO UICTIMOLENSI.
SALUTIOLAM ET PETRORIUM.
ABBATIAM ARONAM RESTITUIMUS.
CVRTEM CANAUAM ET CURTEM CAUALLI.
ET ECCLAM SCI SALUATORIS ULTRA PADUM.
DEDIMUS CURTES ROMANIANĀ ET FIRMINIANĀ.
DEDIMUS MONASTERIO LAUCEDIENSI CURTĒ
QUADRODOLAM DEDIMUS.
CURTEM JN AUDINICO. ET IN COLUBIANO
CUM ADIACENTIIS EARUM DEDIMUS.

L'aneddoto scritto in carattere maiuscolo, colle lettere in generale di forma onciale o semi-onciale, mescolate tuttavia con qualche rara lettera capitale. Le *d* sono di due forme, onciale e capitale. E così la *m*. Le *e* sono tutte onciali o piuttosto semionciali, tranne una sola, nella parola *Petrorium;* quivi la *e* è

Digitized by Google

di forma capitale, cogli apici prolungati, ma col taglio mediano relativamente piccolo, sicchè assume la sembianza di una lettera a pennello.

Nei riguardi della paleografia, una delle particolarità che più danno nell'occhio è la *A* quasi sempre di forma semi-minuscola, senza il taglio orizzontale.

La parola *sanctissimo* nella prima linea accenna a s. Eusebio, patrono di Vercelli. Infatti, nel diploma conosciuto dell'anno 882 Carlo III fa la sua donazione « sanctissimo patri Eusebio ». Confrontando questa Notizia col medesimo diploma, si trova che tre luoghi in essa ricordati, vengono citati anche nel diploma, cioè la Corte Regia, nell'interno della città, Romagnano e Formigliana. Raffrontandola col diploma di Ottone III del 999, trovansi ricordate in quest'ultimo parecchie località, che sono rammentate anche dalla Notizia, e cioè: Formigliana, « Castellum Victimuli » (1), l'abbazia di Arona, la corte *Canava*, la Chiesa di S. Salvatore *ultra Padum*, Romagnano, la corte Quadradola o Quadrodola data al Monasterio di Lucedio, ed Audinico od Odinico (Oldenico). Quantunque nella Notizia non si dica espressamente che l' abbazia di Lucedio veniva regalata alla Chiesa Vercellese, siccome si trova detto invece in modo chiaro nel diploma Ottoniano, tuttavia ciò viene presupposto; poichè senza di questo non si intenderebbe neppure come vi si ricordasse il dono di Quadradola fatto al Monastero di Lucedio.

Ciò posto, è evidente che tutte le corti ricordate dal diploma Ottoniano siccome largite da Carlo III, appariscono anche nella Notizia, nella quale poi si registrano alcune località ommesse nel precetto del 999. E anzitutto la Notizia ricorda la Corte regia, di cui peraltro si fa parola nel diploma di Carlo III dell'anno 882. Vi si trovano poi parecchie località deficienti e al diploma dell'882 e a quello del 999, e sono; la corte *Salutiola*, la corte *Petrorius*, la corte *Cavalli*, e la corte *in Colubiano*.

(1) Il ch. cav. Pietro Vayra (*Diploma di Lodovico Pio e Lotario*, Torino 1890) notò che nelle edizioni del diploma Ottoniano si hanno su questo punto alcune differenze di lezione. E di vero il Muratori (*Ant.* VI, 317) legge *Castellum Vicinili*, e dice di aver tolto la sua edizione da un *apografo;* l'Ughelli (ed. Coleti, IV, 772) omette il passo, e la Stampa legale presso il Terraneo porta *Castellum Victumuli.* Il Terraneo, com'è suo costume, riferisce le *adnotationes* fatte a questo documento da mons. Francesco Agostino Della Chiesa, il quale leggeva *Castrum Vitumuli.* Trascriveremo più avanti la nota del Della Chiesa a questo nome.

Digitized by Google

Abbiamo due altri diplomi di Ottone III in favore di Leone vescovo di Vercelli. Sono ambedue del 1° novembre dell'anno 1000 (1). Nel primo, tra i luoghi concessi o confermati, comparisce anche il monasterio di Lucedio con tutte le sue pertinenze: nel secondo si ricorda Formigliana, e si conferma la corte *Quadradula* al monastero di S. Michele di Lucedio. Nel rimanente i due documenti non si connettono alla tradizione diplomatica, alla quale appartengono i due diplomi noti di Carlo III, 882, e di Ottone III, 999.

Quanto abbiamo detto ci permette dunque di formarci un concetto più compiuto di quanto finora fosse possibile intorno al diploma perduto di Carlo III. Ma prima di ricercare la identificazione di alcuni luoghi minori in esso ricordati, è necessario esaminare un punto, la cui soluzione sarebbe indispensabile per chi volesse discutere sull'autenticità del diploma perduto.

Il Durandi (2) riteneva falso e inventato dal vescovo Leone il perduto diploma di Carlo III. Che di tal guisa egli la pensasse, risulta infatti dalle parole ch'egli scrive riguardo alla donazione dell'abbazia di Arona, che si vuole fatta da Carlo III alla chiesa di Vercelli. Egli scrive così: « Un'impostura del vescovo Leone si vuol però qui avvertire, ma così sciocca, che tradì la sua avidità, il quale per carpir a Ottone III anche l'abazia di Arona fondata non prima del 979, ha supposto che Carlo il grosso l'avesse di già incommendata ai vescovi di Vercelli. I monaci di Arona non tardarono a smentirla e in nessuno de' successivi diplomi a pro della Chiesa di Vercelli mai più se ne fece motto ».

Il Durandi forse fu troppo sollecito a concludere, poichè la questione sembra molto arruffata e complessa. È un fatto che i posteriori diplomi riguardanti Vercelli, non ripetono la concessione di quell'abbazia; ma d'altronde non risulta che i monaci abbiano protestato contro il diploma Ottoniano. Se ciò fosse vero, potremmo dedurne la falsità del diploma di Carlo III; ma tutto si riduce ad una supposizione del Durandi. È ben vero che i monaci della Novalesa (3) pretendevano che il vescovo Leone intendesse di usurpare il possesso del loro monastero, e cessasse di agognarlo solo quando ne fu spaventato da una visione; ma

(1) Chart. I, 338, n. 197; e 339-342, n 198.
(2) *Alpi Graie e Pennine*, Torino 1804, p. 151.
(3) *Chron. Novalic.*, in MGH., Script. VII, 118.

Digitized by Google

checchè si pensi di tutto questo, e delle intenzioni di Leone riguardo alla Novalesa, ciò ha pochissima relazione colla questione che ora ci occupa. Il fatto è che l'origine dell'abbazia di Arona è molto oscura.

Generalmente, e anche da uomini sommamente competenti, si opina pur oggidì, che l'abbazia suddetta sia stata fondata nel 979. Un valentissimo filologo e filosofo, e che nel tempo stesso è pur uno dei più benemeriti e dotti cultori della storia locale (1), non molti anni or sono, raccogliendo le opinioni meglio accolte dagli studiosi, diceva che certo Adamo detto anche Amizone nel 963 formò il disegno di fondare in Arona un monastero di Benedettini, « quel monastero, che, a quanto pare, ebbe il suo compimento l'anno 979 ». La frase *a quanto pare* dimostra che chi scriveva così, non credeva di dir cosa veramente assodata e sicura. Le fonti sono scarse e poco chiare.

Il p. Francescantonio Zaccaria (2) pubblicò e discusse i due soli documenti che si riferiscono a tale questione. Il primo è una epigrafe metrica, destinata al sepolcro di un « princeps Ada », il quale combattè valorosamente sotto le mura di Roma. Egli era in relazione con un *rex*, del quale ammansò l'ira; trasportò da Perugia i corpi dei santi Gratiniano e Filino, e:

> « Fecit coenobium sub normae tramite dignum,
> Sufficiens victum fratribus esse dedit. »

L'iscrizione non esisteva più neanche al tempo del p. Zaccaria, il quale la pubblicò da alcune trascrizioni.

L'altro documento è una Notizia, che il Zaccaria rilevò da un ms., da lui riguardato di poco posteriore al secolo XIII, ed è una diffusa narrazione delle vicende del « Comes Amizo, Stationensis atque Sepriensis comitatuum incola », il quale a Roma diede fuoco al portico di S. Paolo, per il qual motivo fu colpito da malattia al braccio e alla mano destra. Chiese rimedio al Cielo, e recatosi a Perugia, mentre imperava Ottone II, domandò al vescovo di quella città i corpi dei martiri Gratiniano

(1) Vincenzo De Vit, *Il Lago Maggiore, Stresa e le isole Borromee* I, 1, (Prato, 1875), p. 280.

(2) *De' santi martiri Fedele, Carpoforo, Gratiniano e Filino*, Milano 1750, p. 84-6. Nulla di nuovo in *Acta SS.*, *Jun.* I, 23, e nel *Manipolus florum* di Galvano Fiamma, in Murat. *R. I. S*, XI, 608 C, dove si parla dei medesimi santi e si accenna ai medesimi fatti.

Digitized by Google

e Filino; ma questi non si poterono smuovere prima che egli promettesse di portarli nella sua patria, « ibique coenobium, quod incoeperat, ad honorem eorum aedificaturum ». Di qui a poche linee si accenna all'*ira regis*, che Amizone mitigava. E può notarsi che la parola *coenobium* e la voce *ira regis* dipendono manifestamente dalla iscrizione, tanto più, che, specialmente la frase *ira regis* sta qui fuori di posto, e dà poco chiaro significato, mentre si intende benissimo nell'iscrizione. Narrasi poscia nella Notizia, che i corpi furono finalmente tolti dal luogo dove stavano; essi riposavano « iuxta Tyberim fluvium haud procul ab eadem urbe » (Perugia). Così ebbe luogo il trasporto delle sacre reliquie ad Arona. Nel corpo del documento non si dice che ivi quel conte abbia costruito il cenobio, ma di ciò si fa menzione in una postilla, che il Zaccaria riproduce: « videlicet ad castrum, quod Arona dicitur, in quo et coenobium in honore eorum et Salvatoris domini construxit iuxta ripam laci maioris ». La Notizia finisce poi con questa datazione, che diede molto da pensare ai critici: « Actum anno dominicae incarnationis DCCCCLXIII ind. VII, regni vero domini secundi Ottonis XVIII, imperii autem eius XII ». A niuno sfuggì che le due date non si corrispondevano, mentre gli anni dell'impero e del regno, come pure l'indizione richiamano al 979, quando imperava realmente Ottone II; e per l'opposto nel 963 era imperatore Ottone I. Anzi fu per questo motivo che si suppose, che l'anno 963 sia qui a ricordare l'incendio del portico di S. Pietro, e le altre indicazioni cronologiche segnino invece l'anno 979, nel quale il proposito del milite penitente ebbe il suo effetto. In questo senso parla il Giulini (1), il quale esamina la controversia di tutti i lati.

Egli non si preoccupa affatto della vera od apparente differenza di nome, *Adam*, *Amizo* (2), che c'è tra l'iscrizione e la Notizia. Ma trova che il doppio nome non deve sorprendere, mentre si può

---

(1) *Mem. stor. di Milano*, II, 370 sgg.

(2) GIULINI sotto l'anno 969 riferisce un sunto di un diploma perduto di Ottone I, concesso « *Arduino inclyto marchioni et Adam et Amicho et Mainfredo et Odoni....* » e suppone che qui si possa intendere *Adam* [*qui*] *et Amicho* (*Amizo*), senza escludere (e questo può essere ben controverso) l'identificazione di costui col nostro conte di Siprio. Ma si può prendere la cosa da un altro punto di vista e riconoscere che alla fine la differenza tra i due nomi può essere contestata; pare infatti che la identità dei nomi *Adam* e *Amizo* sia stata provata da F. SAVIO, *Antichi vescovi di Torino*, Tor. 1888, p. 79.

Digitized by Google

supporre che il guerriero si chiamasse *Adam qui et Amizo*, secondo era nel costume di quei tempi. Crede che al 963 spettino l'assedio di Roma e l'incendio del portico di S. Pietro, e al 979 l'erezione del monastero; anzi al 963 sostituisce il 964, forse perchè trova quest'ultima data, più che il 963, in consonanza colla vera storia di Roma. A spiegare poi come siasi introdotta nella Notizia una confusione, anzi un amalgama di due date, ricorre alla supposizione di un'alterazione dovuta al copista, rammentando che il ms., a giudizio del Zaccaria, che lo vide e pubblicò, non era anteriore al principio del XIV secolo. Ma dubito forte che questa spiegazione valga assai poco, giacchè l'anno e le altre note cronologiche sono fuse insieme perfettamente bene, in una sola formula, che è poi una formula notissima e ovvia in tutti i diplomi imperiali e reali.

Di passaggio si può avvertire che la sostituzione dell'anno 964 al 963, proposta dal Giulini, è giustificata soltanto in parte; giacchè Ottone I oppugnò Roma tanto sul cadere del 963, quanto nel giugno del 964. Infatti egli si presentò sotto le mura di Roma al principio di novembre 963, invitato da quegli ottimati, i quali avevano occupato il « sancti Pauli castellum », secondo la frase del continuatore di Reginone; e il 23 giugno 964, in una nuova spedizione contro Roma, l'imperatore costrinse quella città ad assoggettarsegli, prostrata sia dalle macchine guerresche degli assalitori, sia dalla fame (1).

Ritornando alla Notizia pubblicata dal p. Zaccaria ed alle osservazioni del Giulini, bisogna riconoscere che non può ammettersi alcuna relazione tra il testo della Notizia e la data ad esso apposta. Le fonti del testo sono parecchie; avvi cioè il nocciolo fornito dalla iscrizione, attorno al quale si aggira una serie di fioriture con carattere vago, indeterminato, leggendario. La data dipende da qualche diploma, malamente trascritto; e ad essa nulla corrisponde nella iscrizione, alla quale fa difetto ogni nota cronologica. Anche nelle parole e frasi c'è da ridire; vedemmo che Adamo conte, è detto *incola*. Questa è una fraseologia relativamente moderna. Anzi un tale epiteto, nel posto dove si trova, guasta tutto.

I documenti che dell'abbazia di Arona si conservano nell'Archivio di Stato di Torino, e che furono pubblicati nel I tomo

(1) Dümmler, *Otto der Grosse*, Leipzig 1876, p. 348-9 e 363.

Digitized by Google

Chartarum, non giovano molto a chiarire queste dubbiezze. La più antica pergamena di quell'abbazia non parla dell'abbazia stessa, che si trova per la prima volta menzionata in una commutazione stipulata il 22 giugno 999 tra Arnolfo arcivescovo di Milano e « Lanfredus abba monasterio domini Salvatori, quod est fundatum in loco et fundo Arona iusta lacum magiore (*var.* mayore), ubi[que] quiescunt (*var.* quiescit) corporas sanctorum martires Felici et Gratiniani (*var.* Graciniani) » (1). Qui dunque il monastero ha il solo nome di *Monasterium domini Salvatori*[s], o *abbatia d. Salvatoris*, siccome vien chiamato verso la fine del documento; dei santi Filino e Graciniano è detto soltanto che i loro corpi riposano colà. Procedendo coi tempi, esso si chiamerà il monastero di S. Salvatore e dei santi Graciniano e Filino (2). In appresso, al triplice appellativo (3) verrà accompagnandosi il nome tolto dai santi Graciniano e Filino, che finirà per prevalere (4); in ultimo poi si avrà il solo nome di S. Graciniano (5). Di qui si può arguire che il primo nome dell'abbazia sia quello di S. Salvatore, e che solo più tardi e in grazia della venerazione che si aveva verso i corpi dei due santi martiri suddetti, siasi venuto a rilento modificando e poi mutando il nome della medesima. Anzi pare che tale modificazione sia cominciata soltanto tra la fine del X ed il principio del secolo XI, mentre il documento del 999 sembra ne mostri i primi indizi.

Nella Notizia edita dal p. Zaccaria è già detto che Amizo aveva principiato a costruire l'abbazia di Arona prima che pensasse a trasportarvi da Perugia i due corpi santi. Questo può dar valore all'ipotesi ora proposta, che cioè l'abbazia sia anteriore alla traslazione dei due santi. E può essere anche anteriore di molto, poichè la Notizia non bisogna interpretarla troppo alla lettera a cagione del tempo tardo al quale evidentemente appartiene e del modo con cui è compilata. Tutto considerato, e pensando che sarebbe malagevole supporre che Ottone III

(1) Di questo documento (edito in Chart. I, 328 sgg., n. 194) esistono due copie del sec. XIV. Forse si leggerà: *ubi requiescunt*, ecc.

(2) Atti del 1011 e 1014 in Chart. I, 387, n. 228, e I, 401, n. 235.

(3) Documenti del 1030 (Chart. I, 487 sgg., n. 280), 1062 (I, 597-8, n. 353), 1086 (I, 676, n. 404).

(4) Dumenti del 1028 (Chart. I, 461, n. 271), 1044 (I, 559, n. 328).

(5) Documenti del 1061 (Chart. I, 596, n. 352), 1201 (ib. 1073, n. 731), 1202 (ib. 1075, n. 733).

Digitized by Google

nel 999 trovasse già falsificato un diploma di Carlo III riguardante l'abbazia di Arona, se questa fosse stata eretta appena nel 979, ne consegue che si debbano interpretare diversamente da quanto, a primo aspetto, parrebbe, i due versi dell'iscrizione di *Adam*. Potrà credersi che l'epigrafista, dicendo che Adamo *fecit coenobium* sotto una regola, e lo arricchì di redditi, alludesse alla ricostruzione e all'ingrandimento del monastero, senza escludere l'esistenza di una più antica abbazia.

Anche sull'abbazia di Lucedio, che si afferma concessa da Carlo III alla Chiesa Vercellese, si possono sollevare difficoltà. Infatti re Berengario I, con diploma del giorno 8 luglio 900 (1), dice di dare, *tradidimus*, a s. Eusebio e suoi successori il monastero di s. Michele di Lucedio. Di qui può desumersi una difficoltà. Ma bisogna riflettere che le parole adoperate da Berengario non possono dirsi sufficienti per concluderne, che nei tempi precedenti Lucedio non dipendesse dalla Chiesa di Vercelli; anzi sembra provare il contrario un diploma di Ariperto re dei Longobardi, del 9 ottobre 707, nel quale si conferma la donazione che di detto monastero fece al vescovo Vercellese certo Gauderis, che lo fondò (2). Quantunque un giudice autorevolissimo, com'è il dott. Antonio Chroust (3), creda che il diploma di re Ariberto sia *per lo meno assai interpolato*, tuttavia non siamo per questo autorizzati a negar fede alla parte essenziale di quel documento e alla donazione di Gauderis.

Qualche difficoltà può presentare anche la *curtis Caballi* ricordata nella notizia Vercellese. Che quel nome indichi Cavaglià, grossa terra tra Salussola e Santhià, sembra risultare da un diploma di Corrado II (4), e fu già indicato dal ch. Bruzza. Ma, come avvertì Ferdinando Rondolino (5), da un diploma del 1 novembre 1000, di Ottone III (6), si vede che Cavaglià apparteneva al

(1) Dümmler 29; Chart. I, nr. 58, dove sta inserto nel placito tenuto a Pavia, marzo 901, alla presenza di Berengario, quando si confermò il contenuto del diploma stesso.

(2) Chart I, 13-5, n. 7.

(3) *Langobard. Königs- und Herzogs-Urkunden*, Graz 1888, p. 187.

(4) Chart. I, 523.

(5) *Cronistoria di Cavaglià*, Torino 1882, p. 38-9.

(6) Chart. I, 338, nr 197, Stumpf 1243. Il Rondolino si riferisce al I Biscione dell'Archivio Civico di Vercelli; quel diploma poi è un tutt'uno col diploma pubblicato, come si conferma confrontando Caccianotti, *Summarium monument. omnium quae in tabul. munic. Vercelli continentur*, Verc. 1868, p. 4.

Digitized by Google

monastero di s. Stefano di Vercelli, che lo perdette per le male arti di Ingone vescovo di Vercelli. Il testo del diploma Ottoniano presuppone che il monastero di san Stefano dipendesse dal vescovo Vercellese, quantunque non si dica se qui si parli dell'ordinaria dipendenza giurisdizionale, o di una vera e propria appartenenza. Esso vi è messo tuttavia alla pari col monastero di Lucedio, che Ottone III nel diploma del 999 confermò, come appartenenza diretta, alla Chiesa di Vercelli. La *curtis Caballi*, che è una cosa sola con *Cabaliaca*, è riconosciuta alla Chiesa di Vercelli dal diploma di Corrado II.

Un nome per la storia assai importante ci conservò la Notizia Vercellese, dove dice: « in castello Victimolensi ». Colà c'erano le miniere d'oro, ricordate da Strabone, da Plinio e dall'Anonimo Ravennate (1). Tutti sono oramai concordi nel riconoscere che qui si faccia allusione alla località ora detta la Bessa, dove i geologi riconoscono quelle miniere aurifere, che ci sono attestate dalle antiche testimonianze (2). Il ch. cav. Pietro Vayra (3) pubblicò in facsimile il prezioso diploma, 11 luglio 826 (4), di Lodovico il Pio e di Lotario in favore del conte Bosone, dove ricorre la stessa espressione che nella nostra Notizia; ma colà, per alcune lacerazioni subìte dalla pergamena, manca una

---

(1) Veggansi i passi relativi presso il Bruzza, p. CXIV e CXVII.

(2) BRUZZA, p. CXVIII; RONDOLINO, *Cron. di Cavaglià*, p. 32-4; VAYRA, *Diploma di Lodovico Pio e Lotario*, Torino 1890. Nel sec. XVII Francesco Agostino DELLA CHIESA, nelle citate *Adnotationes* al diploma Ottoniano del 999, manifesta la stessa opinione, mentre alla parola *Castrum Vitumuli* annota: « *In* .... *monte, qui Labessa dicitur*... »

(3) *Diploma degli imperatori Lodovico Pio e Lotario di donazione al conte Bosone*, Torino 1870. In questa maniera il VAYRA ricondusse le ricerche sopra il pago dei Vittimoli sopra un buon terreno; poichè dopo del Bruzza, era uscito un opuscolo dell'avv. Antonio RUSCONI — erudito del resto assai rispettabile — il quale aveva confuso ogni cosa. Il RUSCONI (*Gl'Ictimoli e i Bessi nel Vercellese e nel Novarese*, Novara 1877) vuole che la voce *Ittimoli* non designi una speciale popolazione, ma il mestiere dello scavare il metallo, e per provare ciò si perde in vane etimologie, facendo derivare quel nome da una parola celtica e da una o fenicia o basca. Ammette (p. 16) poi che il Vico degli Ittimoli sia in Santhià, ma vuole che altre aurofodine, quelle della Bessa, fossero scavate da altri *ittimoli*, cioè da altri minatori. Poco dopo (p. 44) pare che restringa il vocabolo a designare i minatori delle cave auree della Bessa.

(4) Mühlbacher 805.

Digitized by Google

parte del nome (1). Il Vayra ebbe il merito di riconoscere di che si trattava. Ed ora la nostra Notizia non solamente conferma l'opinione dell'esimio paleografo, ma ci dà il modo di restituire per intero in questo luogo il testo del diploma (2), che risulta nella maniera seguente: « concessimus fideli nostro bosoni comiti ad proprium quasdam res proprietatis nostrae Quae sunt in Langobardia in pago [ui]ctimolen[si] quod pertinet ad comitatum uercellensem idest in uilla quae dicitur bugella — ».

Quanto agli altri nomi ricordati dalla Notizia, *Salutiola* è Saluzzola, grossa terra sull' Elvo (3), *Petrorium*, Proh (4), *Colubiano*, Collobiano a poca distanza da Vercelli, al confluente del Cervo coll'Elvo. La chiesa di S. Salvatore oltre il Po, potrà probabilmente identificarsi coll' attuale villaggio di S. Salvatore (5), che trovasi appunto sulla destra del Po, a non grande lontananza da Occimiano.

Intorno a *Canava* ed *Audinicum* debbo alcune utili notizie all'egregio avv. Federico Marocchino, bibliotecario civico di Vercelli. « La corta Canava — egli mi scrisse in data di Vercelli, 27 marzo 1891 — donata nel 901 alla Chiesa Vercellese dall'imperatore Ludovico, era una terra situata presso Rivarotta, già spettante al territorio di Salassa ». « L'*Audinicum* è l'attuale comune di Oldenico, posto a destra del fiume Sesia superiormente a Quinto Vercellese ».

---

(1) Il MURATORI (*Ant. It.* V, 553-4) aveva lasciato una lacuna, trascurando le lettere che nella pergamena rimangono di quel nome.

(2) Debbo in parte questa osservazione al dottor F. Patetta.

(3) DURANDI, *Alpi Graie*, p. 113; Bruzza, p. LXXXIII.

(4) A. CERUTI, *Statuta Novariae*, p. 284 (per gentile comunicazione del sac. Carlo Fusi).

(5) Cfr. CASALIS, *Dizionario*, XVIII, 756.

Digitized by Google

35

il
rio
86
to,
è
e
sto
lo,
ita
l'i-
Ro-
che
or-
769,

Digitized by Google

Ara votiva scoperta a Demonte;

Nota del Socio ERMANNO FERRERO

L'amico conte Alessandro Baudi di Vesme mi comunicò il calco dell'iscrizione, e poscia mi ottenne dal cortese proprietario una riproduzione fotografica di un'ara votiva scoperta nel 1886 a Demonte (Cuneo). Il luogo, ove fu trovato questo monumento, ora custodito dal conte Giacinto Borelli, chiamasi *Rialpo*, ed è a levante dell'abitato di Demonte, a poca distanza da questo e a' piedi di una collina sulla sponda sinistra della Stura. In questo luogo si dissotterrarono pure urne antiche.

L'ara di marmo, sormontata da volute, fra cui sorge il foculo, è alta m. 0,90, larga 0,40, profonda 0,25. Nei fianchi è scolpita una figura virile presso un cavallo e nella faccia anteriore l'iscrizione con lettere dell'altezza media di 0,035 (tav. XII).

L · CRISPIVS
AVGVSTINVS
DVMVIR · DIIS
RVBACASCOET
ROBEONI · VOTVM
S · L · L · M

L. Crispius Augustinus du(*u*)*mvir diis Rubacasco et Robeoni votum s*(*olvit*) *l*(*aetus*) *l*(*ibens*) *m*(*erito*).

Trovasi Demonte nel territorio dell'antica città di *Pedo*, che esisteva nel luogo dell'odierno Borgo San Dalmazzo (1). All'or-

(1) Durandi, *Delle antiche città di Pedona*, *Caburro*, ecc., Torino, 1769, pag. 41-57. Il nome antico è *Pedo*, non *Pedona*.

Digitized by Google

dinamento municipale di Pedone sinora si riferivano soltanto due epigrafi: una, parimente di Demonte, ove occorre un decurione (1), ed una di Caraglio, nella quale era il nome, ora perito, di un curatore di questa città (2). La nuova ara fu posta da un duumviro, il cui gentilizio, non troppo frequente, è conosciuto, nella nostra regione, a Susa (3) ed a Vercelli (4). Neppure comune è il cognome di questo magistrato; notisi che quello, anche raro, di cui esso è diminutivo, si è letto altresì in una lapide di Demonte (5). Il nostro duumviro tace il nome della tribù; ma l'anzidetta epigrafe del decurione, un'altra scoperta nel medesimo luogo, di un *veteranus Augusti* (6) ed una urbana di un pretoriano, oriundo di Pedone (7), insegnano che questo municipio fu ascritto alla tribù Quirina.

L'epigrafia di Demonte, purgata dalle finzioni del Meyranesio (8), sale, col monumento pubblicato, a sette titoli, di cui quattro tuttora esistenti (9). Già due di essi ci avevano fatto conoscere il dio indigeno Leucimalaco, chiamato una volta con questo solo nome ed un'altra identificato col Marte romano (10). Parimente nuovi riescono i dei Rubacasco e Robeone, il cui culto, come quello di Leucimalaco e delle Matrone (11), sopravvisse in quei luoghi all'introduzione della religione romana, alla quale spet-

---

(1) *C. I. L.*, V, n. 7862 *a*.
(2) *Ibid.*, n. 7836.
(3) *Ibid.*, n. 7283.
(4) *C. I. L.*, VI, n. 2382 *b*.
(5) [*A*]*ufilliu*[*s*] *Augustus* (*C. I. L.*, V, n. 7862).
(6) *C. I. L.*, V, n. 7861.
(7) *C. I. L.*, VI, n. 2753.
(8) Quasi tutte, pur troppo, accolte dal Durandi (*Pedona*, pag. 7, 45, 71; *Piem. Cisp.*, p. 149, cf. p. 107). Le iscrizioni false di Demonte sono nelle spurie del *C. I. L.*, V, ai numeri 920, 935, 967, 976, 980, 984, 987, 991, 997.
(9) Sono a Demonte le lapidi n. 7860, 7862, 7862 *a*, le due prime nella casa del conte Borelli; l'ultima in casa Boeris. Fu trasportata, nel secolo passato, nel museo di Torino l'ara n. 7861.
(10) *C. I. L.*, V, n. 7862, 7862 *a* (*Deo Marti Leucimalaco*). Può forse essere un avanzo di un titolo sacro a questo nume il frammento di Borgo San Dalmazzo, n. 7858.
(11) *Ibid.*, n. 7848, 7849, 7860, 7861.

Digitized by Google

tano monumenti dedicati a Giove, a Nettuno, alla Vittoria (1). Il suffisso *-asc* palesa nel primo l'origine ligure; anche la radice s'incontra in altri nomi della stessa origine. Un *saltus Rubacaustos* ed un *saltus sive fundus Rubacotius* sono in fatti menzionati nella tavola alimentaria di Veleia (2).

Che niun'altra memoria si conosca di queste due divinità, posso affermare con l'autorità di un dotto, in grado di dare su ciò la più esatta informazione. Interrogai, a proposito di questi nomi, l'amico dottore Alfredo Holder, bibliotecario granducale a Carlsruhe, che per molti anni ha lavorato a raccogliere il tesoro dell'antico celtico, in un'opera, di cui or ora è uscito alla luce il primo fascicolo (3). E dacchè m'è occorso di menzionare il principio della pubblicazione di quest'opera mi pare non inopportuno notarne il valore grandissimo, non solo per i linguisti, ma per tutti coloro, che studiano la geografia, la storia antica, l'epigrafia, la mitologia dei paesi fra l'Atlantico e le contrade renane e danubiane, fra l'arcipelago britannico e la penisola iberica e la superiore Italia; vasto impero un dì dell'idioma celtico, perduto, salvo scarsa parte dell'occidente, per la vittoria del latino e del germanico, non senza però che suoni e vocaboli della scomparsa favella non siano persistiti nei moderni parlari.

Tutti i vocaboli celtici, che gli scrittori, i glossarii, gl'itinerarii, le iscrizioni, le monete hanno conservato sino alla metà del secolo VIII, furono registrati dall'autore, che sotto ogni voce dispose i documenti, che la concernono, in ordine cronologico, tenendo per quelli, forniti dalle iscrizioni e dalle monete, anche l'ordine dei luoghi, in cui avvennero le scoperte. Un lavoro sì fatto non può essere condotto se non con lezioni di scrittori e di epigrafi assolutamente accertate. Il dottore Holder non solamente si valse delle edizioni migliori, ma sovente verificò egli stesso i testi sui codici

(1) *C. I. L.*, V, n. 7850, 7860, 8761.
(2) *C. I. L.*, XI, 1147, II, 6, 9.
(3) *Alt-celtischer Sprachschatz*, Leipzig, B. G. Teubner.

Digitized by Google

e sui marmi. Quale critico valente egli sia è mostrato dalle sue ottime edizioni di Erodoto, Cesare, Orazio, Festo Avieno, della legge salica e delle glosse malbergiane di questa, del poema anglo-sassone di Beowulf, di Beda, di Sassone Grammatico e di altre opere della letteratura classica e germanica. La laboriosità dell'Holder ci assicura che non sarà prolungato lo spazio di cinque anni, annunciato per la pubblicazione di questo vocabolario meritevole del più largo encomio per la fatica costata al diligentissimo autore, per il criterio, con cui si palesa distribuito, e per la molteplice sua importanza.

L'Accademico Segretario
GASPARE GORRESIO.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 12 al 26 Aprile 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

	Donatori
* Transactions of the R. Society of South Australia; vol. XIII, part 2. Adelaide, 1890; in-8°.	R. Società dell'Austr. merid. (Adelaide).
* Bulletin des séances de la Société belge de Microscopie; t. XVII, n. 5. Bruxelles, 1891; in-8°.	Società belga di Microscopia (Bruxelle).
* Anales de la Sociedad cientifica Argentina; t. XXXI, entrega 3. Buenos Ayres, 1891; in-8°.	Soc scientifica Argentina (Buenos Ayres).
A Catalogue of the Mantadea, with descriptions of new genera and species, and an enumeration of the specimens, in the collection of the Indian Museum Calcutta; by J. WOOD-MASON: n. 2, pp. 49-66, with pls. I and II, and one Woodcut. Calcutta, 1891; in-8°.	Museo Indiano di Calcutta.
* Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie: Comptes rendus des séances de l'année 1891; Mars. Cracovie, 1891; in-8°.	Accad. delle Sc. di Cracovia.
* Transactions of the Scottish Society of Arts; vol. XII, part 4. Edinburgh, 1891; in-8°.	R. Soc. Scozzese delle Arti (Edimborgo).

Digitized by Google

Ateneo Ligure (Genova). * Ateneo Ligure. — Rassegna mensile della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova; anno XIV, Gennaio-Marzo 1891. Genova, in-8°.

J. V. Carus (Lipsia). * Zoologischer Anzeiger herausg. von J. Victor Carus in Leipzig, etc ; XIV Jahrgang, n. 360-361. Leipzig, 1891 ; in 8°.

R. Istituto della G. Bretagna (Londra). * Proceedings of the R. Institution of Great Britain: vol. XIII, part I, n. 84. London, 1891 ; in-8°.

Id. — List of the Members, Officers and Prof., etc., and Lists of lectures and donations in 1889. London, 1890 ; 1 fasc. in-8°.

R. Soc. astronom. di Londra. * Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 5. London, 1891 ; in-8°.

Londra. * * British Petrography; with special reference to the igneous rocks: by J. J. Harris Teall. London, 1888; 1 vol. in-4°.

Soc. geologica di Manchester. Transactions of the Manchester geological Society, etc.; vol. XXI, part 6 Manchester, 1891 ; in-8°.

R. Oss. di Brera in Milano. * R. Osservatorio astronomico di Brera in Milano. — Osservazioni meteorologiche eseguite nell'anno 1890 col riassunto sulle medesime da E. Pini. Milano, 1891 ; 1 fasc. in-8° gr.

Società Reale di Napoli. * Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sez. della Società Reale di Napoli); serie 2ª, vol. V, fasc. 2 e 3. Napoli, 1890 ; in-4°.

La Direzione (Nuova-York). * The Journal of comparative Medicine and veterinary Archives, edited by W. A. Conklin; vol. XII, n. 4. New York, 1891 ; in-8°.

Osservatorio di Rio Janeiro. * Revista do Observatorio. — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno VI, n. 2. Rio de Janeiro, 1891; in-4°.

R. Accademia dei Lincei (Roma). * Memorie della R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali; serie 4ª, vol. V. Roma, 1888; in-4°.

Società Viticol. italiani (Roma). Bollettino della Società generale dei Viticoltori italiani; anno VI, n. 7. Roma, 1891; in-8° gr.

Società degli Spettr. ital. (Roma). Memoria della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XX, disp. 2 Roma, 1891 ; in-4°.

Osservatorio di Tiflis. * Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1888-1889, und 1889. Tiflis, 1890; 2 vol, in-8°.

Digitized by Google

* Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino; vol. XXXIII, 1890. Torino, 1891; in-8°.	R. Accademia d'Agricoltura di Torino.
* Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, ecc.; anno LIV, n. 1-2. Torino, 1891; in-8°.	R. Acc. di Medic. di Torino.
Città di Torino — Biblioteca civica: Bollettino annuale; anno 1890 Torino, 1891; 1 fasc. in-8° gr.	Municipio di Torino.
Società anonima Canavese per la strada ferrata Torino-Ciriè-Lanzo: capitale sociale L. 2,300,000 versato; Sede in Torino — Assemblea generale ordinaria de' 31 marzo 1891. Torino, 1891; 1 fasc. in 8°.	Società anonima Canavesana in Torino.
* Bollettino mensuale della Società meteorologica italiana, ecc; serie 2ª, vol. XI, n. 3. Torino, 1891; in-4°.	Soc. Meteor. ital. (Torino).
Prof. Giovanni Luvini — Nuova forma di dinamo, alla quale l'autore ha dato il nome di Metergo Torino, 1891; 1 fasc. in-8°.	L'Autore.
Brani di Elmintologia Tergestina, per Michele Stossich, Prof. in Trieste, serie 1ª-7ª (Estr. dal *Bollettino della Società adriatica di Scienze naturali in Trieste;* vol. VIII-XII, 1883-90); 7 fasc. in-8°.	L'A.
— Elminti Veneti raccolti dal Dott. Conte Alessandro De Ninni e descritti da Michele Stossich, Prof. in Trieste. Trieste, 1890; 1 fasc. in-8°.	Id.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 18 Aprile al 3 Maggio 1891

	Donatori
* Proceedings of the R. Society of London; vol. XLIX, n. 298. London, 1891; in-8°.	R. Società di Londra.
* Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVIII, cuaderno 4. Madrid, 1891; in-8°.	Reale Accademia di Storia (Madrid).
* Società Reale di Napoli — Rendiconto delle tornate e dei lavori dell'Accademia di Scienze morali e politiche: anno XXIX, gennaio-dicembre 1890. Napoli, 1891; 1 fasc. in-8°.	Società Reale di Napoli.
— Annuario della Società R. di Napoli 1891. Napoli, 1891; 1 fasc. in-8°.	Id.

Digitized by Google

Ministero delle Finanze (Roma). — Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale; anno VIII, marzo-aprile, 1891; fasc. 1. Roma, 1891; in-8° gr.

Id. — Statistica del commercio speciale di importazione dal 1° gennaio al 31 marzo 1891. Roma, 1891; 1 fasc. in-8° gr.

Ministero d'Agr. Ind. e Comm., (Roma). — Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno IX, n. 2. Roma, 1891; in-8° gr.

Bibliot. nazionale di Roma. — Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele in Roma — Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. VI, n. 3. Roma, 1891; in-8° gr.

Accad. di Conf. storico-giuridiche (Roma). — * Studi e Documenti di Storia e Diritto; Pubblicazione periodica dell'Accademia di Conferenze storico-giuridiche; anno XII, fasc. 1. Roma, 1891; in-4°.

Venezia. * * — I diarii di Marino Sanuto; t. XXXI, fasc. 147. Venezia, 1891; in-4°.

L'Autrice. — Carlotta FERRARI da Lodi — Rime scelte. Bologna, 1891; 1 vol. in-8° picc.

L'A. — Diritto sociale; Tentativo in bozza dell'Avv. Pietro PELLEGRINI. Borgo a Mozzano, 1891; 1 vol. in-8°.

L'A. — The Roots of the Sanskrits Language; by W. D. WHITNEY (Extr. from *Transactions of American Philological Association*, 1885); 1 fasc. in-8°.

Id. — On the second vol. of Eggeling's Translation of Çatapatha-Brāhmana, by Prof. W. D. WHITNEY (*American Oriental Society's Proceeding*, Oct. 1888); 1 fasc. in-8°.

Id. — Böhtlingk's Upanishads; by W. D. WHITNEY (Reprinted from *American Journal of Philology*, vol. XI, n. 4); 1 fasc. in-8°.

Id. — Translation of the Katha-Upanishad; by W. D. WHITNEY (Extr. from the *Transactions of the American Philological Ass.*, vol. XXI); 1 fasc. in-8°.

Id. — On Böhtlingk's Upanishads; by Prof. W. D. WHITNEY (*Americ. Oriental Soc. Proceedings*, Oct. 1890); 1 fasc. in-8°.

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
681 (50 C 8) 8 VII-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. **13ª, 1890-91**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Maggio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE, PEANO e BASSO Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato. Il Segretario presenta all'Accademia, a nome dell'Autore Prof. Giovanni CAPELLINI, Socio corrispondente, una monografia intitolata: « *Zofioidi fossili e il rostro di Dioplodonte della Farnesina presso Roma* ».

Il Socio SALVADORI legge un suo lavoro intitolato: « *Aggiunte alla Ornitologia della Papuasia e delle Molucche* », il quale costituisce l'ultima parte del suo studio su tale argomento, essendo già le altre parti state precedentemente pubblicate nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio GIBELLI dà lettura di un suo lavoro eseguito in collaborazione col Dott. Saverio BELLI, e intitolato « *Rivista delle specie di Trifolium italiane comparate con quelle del resto d'Europa e delle regioni circummediterranee, della Sezione Mystilus* PRESL ».

I due menzionati lavori dei Soci SALVADORI e GIBELLI vengono dalla Classe, con votazioni unanimi, approvati per l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio NACCARI presenta la parte III dello studio che il Professore Angelo BATTELLI dell'Università di Cagliari prosegue *sulle*

Digitized by Google

proprietà termiche dei vapori. L'attuale monografia ha per oggetto l'esame del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac.

Il Socio Gibelli presenta una Memoria dei Dottori O. Mattirolo e L. Buscalioni, la quale contiene: « *Ricerche anatomo-fisiologiche sul tegumento seminale delle Papilionacee, e precisamente tratta dall'anatomia della membrana di rivestimento, delle cellule Malpighiane, delle cellule a colonna, dello strato profondo, e di alcuni organi scoperti dagli autori nell'area del funicolo (tubercoli gemini e chilario)* ».

Così il lavoro del Prof. Battelli, come quello dei Dottori Mattirolo e Buscalioni, sarebbero destinati ai volumi delle *Memorie.* Perciò il Presidente nomina apposite Commissioni incaricate di esaminarli e riferirne in seguito alla Classe.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione negli *Atti* e legge una Nota del Dott. G. B. Rizzo, Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino, col titolo: « *Di un notevole tipo isobarico subalpino* ».

Questo lavoro del Dott. Rizzo porge occasione al Socio Berruti di fare alcune osservazioni *intorno ai moti ciclonici dell'atmosfera ed alla influenza di questi sulle condizioni meteorologiche della nostra regione.* Tali osservazioni vengono dallo stesso Socio Berruti riassunte in uno scritto da pubblicarsi negli Atti.

Infine il Socio Basso presenta pure per l'inserzione negli *Atti*, per incarico del Socio D'Ovidio assente per ragioni d'ufficio, uno studio del Dott. Federico Amodeo, Prof. nel R Istituto tecnico di Torino, intitolato: « *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r.

Digitized by Google

LETTURE

Di un notevole tipo isobarico subalpino;

Nota del Dott. G. B. RIZZO
Assistente all'Osservatorio della R. Università in Torino

Per molti anni la Meteorologia ebbe solo per oggetto di raccogliere un gran numero d'osservazioni intorno alla temperatura, alla pressione atmosferica e agli altri elementi del tempo in ciascun paese e per un lungo periodo di anni, collo scopo di determinare il clima delle diverse regioni ed anche per vedere se veramente nel regolare avvicendarsi delle stagioni, alcuni fenomeni, che sembrano maggiormente degni di nota, come i freddi eccessivi e, in generale, le grandi variazioni nella temperatura e nel regime delle piogge, si succedano con una certa legge, o abbiano qualche relazione col moto degli astri. Non si giunse sinora a trovare alcuna relazione fra le vicende del tempo ed i movimenti degli astri, nè si potè scoprire alcun periodo (oltre a quelli determinati dai moti della terra), il quale regoli il succedersi dei più notevoli fonomeni atmosferici; ma le osservazioni meteorologiche diligentemente raccolte in un paese per lunghi anni, combinate opportunamente fra di loro e calcolate coi metodi suggeriti dall'Analisi Matematica, mostrano quale è il clima e forniscono delle indicazioni che sono preziosissime per l'igiene e l'agricoltura.

Essendosi poi considerevolmente accresciuto il numero degli Osservatori, e rese più facili e pronte le comunicazioni fra una regione e l'altra, si può conoscere quali siano, in un determinato istante, le condizioni generali dell'atmosfera sopra una gran parte della superficie terrestre, e sapendo quali variazioni del tempo sogliono accompagnare una determinata distribuzione della temperatura della pressione e della umidità atmosferica, ossia un determinato tipo isobarico, si può trarne un presagio per il tempo di qualche giorno appresso.

Ed ora si apre un nuovo campo agli studi meteorici; col progredire delle scienze fisiche si incominciarono a studiare i

Digitized by Google

fenomeni atmosferici direttamente e non soltanto sulle medie pazientemente calcolate; uomini illustri nelle scienze sperimentali si sono dedicati all'osservazione di ciascun fenomeno in se stesso ricercandone le cause e studiandone le molteplici manifestazioni, coll'aiuto della Meccanica e della Fisica; e la Meteorologia, che era prima una statistica con tutti i suoi dati importanti, ma privi di legame e senza una spiegazione rigorosa, diventa ora una vera scienza, cioè la Fisica dell'atmosfera.

In questa Nota mi propongo di spiegare una apparente anomalia, che è frequentissima nelle condizioni del tempo in Piemonte.

Si ammette generalmente che per la differenza di riscaldamento fra i poli e l'equatore si producano quivi delle correnti d'aria ascendenti, le quali poi si riversano da una parte e dall'altra verso il Nord e verso il Sud, mentre delle correnti d'aria fredda affluiscono dai poli all'equatore; ma accanto a questa, che fu chiamata *la grande circolazione atmosferica*, si producono degli altri movimenti nell'aria, i quali sono la causa delle principali modificazioni del tempo.

Spesso si formano alla superficie della terra delle aree di bassa pressione atmosferica, intorno alle quali l'aria prende un movimento vorticoso, e questi sistemi di correnti intorno ad un minimo di pressione si chiamano col nome di cicloni. Nell'interno di un'area ciclonica l'aria ha, in generale, un moto ascendente, e mentre essa si innalza, si raffredda, perchè si espande e si condensa il vapor acqueo che essa contiene; perciò un ciclone comprende quasi sempre un'area di pioggia. Le cause che determinano la formazione e la conservazione dei cicloni sono molto complesse e sono ancora oggetto di vivissime discussioni; uno studio più maturo, fatto a grandi altezze nell'atmosfera terrestre, dove i fenomeni appaiono in tutta la loro pienezza, senza essere molto alterati dalle accidentalità del terreno, mostrerà se i movimenti che si compiono nei cicloni sono dovuti alla rarefazione dell'aria, che ne occupa il centro, o se, invece, la rarefazione è una conseguenza essa stessa, in tutto o in parte, di questi movimenti. Ma qualunque sia l'origine dei cicloni, è certo che essi, una volta formatisi, persistono a lungo senza scomporsi, e si muovono in tutto il loro insieme sulla superficie terrestre secondo certe leggi ben determinate; e quando un ciclone si avvicina

Digitized by Google

ad un paese, si avverte dapprima un piccolo aumento e poi una rapida diminuzione nella pressione barometrica e il tempo va peggiorando, fin che il ciclone non si allontana. Questi principii sono sufficienti per fare una previsione del tempo, quando si osservi l'andamento del barometro e si conoscano le condizioni generali dell'atmosfera per una regione sufficientemente estesa, intorno al luogo di osservazione. In generale, quando il barometro indica una depressione, ciò significa che si avvicina a noi un ciclone e il tempo tende a peggiorare.

Ma vi sono alcuni casi, in cui le condizioni topografiche di una regione e specialmente la sua conformazione orografica, alterano sì fattamente le condizioni generali del tempo, che rendono fallace ogni previsione, la quale sia unicamente fondata sullo studio del tipo ciclonico, senza tenere esatto conto delle condizioni locali.

La grandiosa catena delle Alpi, specialmente a Ovest e a Nord-Ovest, si trova sul cammino dei più notevoli cicloni che attraversano l'Europa, e perciò deve notevolmente modificarne il movimento e gli effetti. Lo Schiaparelli e il De Marchi hanno mostrato quale azione esercitano queste montagne sulla formazione dei temporali nella valle del Po; io indicherò qui come in generale vengano modificate le condizioni del tempo ai piedi delle Alpi occidentali, quando il barometro indica una depressione e poi soffia impetuoso il vento di Ovest, ossia quando un ciclone attraversa l'Europa del Nord o l'Europa di mezzo.

Le osservazioni fatte all'Osservatorio di Torino, che io ho potuto consultare, abbracciano un periodo di oltre un secolo; e in tutto questo tempo si osservarono spesso dei rapidi aumenti di temperatura, accompagnati da venti forti di Ovest o di Sud-Ovest con cielo sereno, dopo una depressione barometrica; ma per brevità trascrivo soltanto le principali variazioni di questa specie avvenute negli ultimi venticinque anni, le quali sono sufficienti per mostrare quale è il carattere generale dei cambiamenti di tempo nelle condizioni che io considero.

E per mettere meglio in evidenza la grandezza di queste variazioni, insieme coi numeri che esprimono il valore della pressione atmosferica, della temperatura e degli altri più notevoli elementi meteorici nei giorni considerati, scrivo anche le differenze fra questi valori e i medi dei valori osservati alle stesse ore nei due giorni che precedono e nei due giorni che seguono.

Digitized by Google

DATA			PRESSIONE a 0°			TEMPERATURA				
Anno	Mese	Giorno	9h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.	Mass.	Min.
1866	Dicembre . .	14	732.8 — 8.0	731.6 — 7.7	734.5 — 4.3	6,5 — 0.6	16.6 + 6.5	11.8 + 4.6	18.0 + 6.4	5.1 — 0.1
1867	Febbraio . . .	7	26.3 —10.0	29.2 — 5.4	34.5 — 0.4	1.1 — 0.8	8.9 + 1.3	6.5 + 2.9	10.1 + 1.3	1.9 — 2.2
1868	Marzo	6	25.5 — 9.1	25.7 — 8.2	28.6 — 4.4	12.0 + 5.1	14.1 + 1.5	8.9 — 0.4	14.0 + 0.6	8.9 + 0.4
—	Dicembre . .	9	35.4 — 8.3	36.0 — 6.5	39.0 — 4.3	16.6 + 9.0	10.3 + 4.2	6.9 + 2.9	17.4 + 8.8	7.1 + 2.7
—	— . .	17	38,3 — 2.4	38.5 — 0.7	39.6 + 0.7	13.6 + 7.4	8.1 + 3.0	0.8 — 3.0	14.3 + 7.4	10.1 + 5.7
1869	Aprile	19	28.2 — 1.6	29.2 — 0.6	34.4 + 3.5	13.9 + 2.8	20.9 + 4.7	13.8 + 1.3	21.0 + 4.7	13.9 + 2.8
—	Agosto	10-11	28.6 —10.0	27.3 — 9.9	30.0 — 7.3	22.2 + 2.0	26.6 + 2.0	23.1 + 1.1	29.4 + 4.2	18.8 + 3.5
—	Novembre . .	5	27.1 — 6.1	27.6 — 5.4	28.3 — 4.9	13.7 +10.9	15.5 + 5.6	13.1 + 5.9	15.8 + 5.2	10.7 + 9.4
1870	Giugno	25	31.5 — 7.1	30.4 — 5.9	35.1 — 1.3	22.0 + 0.1	26.5 + 0.5	21.2 — 0.5	26.9 + 0.1	17.2 — 0.1
—	Settembre . .	8	31.4 — 8.6	34.7 — 3.6	38.0 + 0.6	17.8 + 1.4	22.7 + 3.1	18.2 + 0.2	22.7 + 2.3	15.2 + 1.5
1871	Ottobre	2	25.0 — 6.5	25.9 — 3,1	27.5 — 1.7	19.2 + 3.6	21.1 — 0.3	18.0 + 1.8	21.3 — 0.3	14.6 + 1.8
1872	Settembre . .	21	28.8 — 4.4	30.7 — 1.0	33.5 + 0.4	17.9 + 1.8	20.5 + 0.7	14.6 — 1.9	21.1 + 0.9	14.6 + 1.7
1874	Agosto	9	31.9 — 5.4	33.0 — 3.0	35.1 — 0.7	21.2 — 0.3	25.0 + 1.5	20.1 — 0.4	25.8 + 0.3	15.9 — 1.7
1876	Febbraio . . .	24	36.0 — 3.0	35.4 — 2.3	36.4 + 0.4	9.7 + 5.3	12.2 + 4.5	9.9 + 4.7	12.3 + 4.3	4.4 + 1.5
—	Agosto	25	23.9 — 7.5	25.7 — 6.4	29.5 — 2.7	20.5 + 2.1	24.3 + 1.9	19.3 + 0.2	24.6 + 1.8	16.6 + 1.1
1877	Aprile	24	24.8 — 7.2	26.2 — 4.2	29.0 — 1.3	13.3 + 2.5	15.7 — 0.6	11.8 — 1.8	16.4 — 1.2	8.6 + 2.3
—	Maggio	13	32.0 + 2.2	32.0 — 1.6	34.2 — 0,2	15.9 + 1.7	20.8 + 4.4	15.6 + 2.2	21.0 + 3.2	11.4 + 0.8

Digitized by Google

UMIDITÀ RELATIVA			VENTO			Acqua evaporata	STATO DEL CIELO		
9h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.		9h a.	3h p.	9h p.
98 + 12	45 − 49	34 − 42	*NE* 1	*SW* 4	*W* 4		≡²	0	0
91 + 18	33 − 28	36 − 46	*WSW* 1	*W* 3	*W* 4		2 ≡	6 *m*	0
53 − 3	31 − 6	25 − 26	*W* 4	*W* 4	*W* 2		8 *m*	1	0
67 − 16	21 − 47	49 − 33	*N* 2	*W* 2	*SW* 2		1	0	0
36 − 51	26 − 63	46 − 47	*W* 4	*NW* 3	— —		0	2	0
49 − 24	17 − 29	59 − 5	*SW* 2	*W* 4	*NE* 1		1	3	10
42 − 24	43 − 17	31 − 27	*W* 3	*W* 4	*W* 3	7.5 + 5.8	7	4	1
28 − 39	11 − 40	30 − 33	*W* 4	*W* 4	*W* 3	6.8 + 6.2	4	4	0
71 + 21	10 − 29	14 − 44	*SSW* 1	*W* 4	*W* 2	5.0 + 2.4	0	1	0
30 − 33	13 − 42	20 − 50	*W* 4	*W* 3	*NW* 2	5.7 + 4.2	0	0	0
29 − 33	27 − 7	23 − 38	*W* 3	*W* 4	*W* 3	4.3 + 2.2	2	1	0
16 − 58	11 − 42	27 − 47	*W* 3	*W* 3	*W* 2	4.0 + 2.6	0	0	0
32 − 34	19 − 36	77 + 8	*W* 4	*W* 4	*W* 1	3.0 + 0.3	0	0	0
32 − 48	27 − 48	24 − 58	*W* 4	*W* 4	*W* 3		2	0	0
31 − 42	29 − 27	52 − 45	*W* 3	*W* 3	*S* 2	2.6 + 1.4	3	7	3
21 − 43	19 − 23	27 − 26	*W* 4	*W* 4	*W* 3	2.3 + 0.8	1	1	0
73 + 3	15 − 52	33 − 40	*W* 1	*W* 4	*W* 1	2.0 + 0.8	0	1	0

Digitized by Google

DATA			PRESSIONE a 0°			TEMPERATURA				
Anno	Mese	Giorno	9h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.	Mass.	Min.
1877	Dicembre . .	26	727,8 — 6.0	726.3 — 7.3	726.9 — 7.5	7.6 + 6.0	10.6 + 6.1	3.4 + 1 8	11.2 + 5.8	— 0.4 — 0.8
1878	Gennaio . . .	24	31.8 — 4.2	28.6 — 6.2	24.8 —10.1	8.1 + 8.2	9.5 + 5.1	5.3 + 3.6	10.9 + 6.1	0.9 + 2.6
—	Novembre . .	9	36.3 — 1.5	38.0 + 0.8	41.1 + 3.3	0.3 — 1.9	9.8 + 4.2	6.4 + 3.3	10.4 + 4.8	— 1.1 — 1.0
—	Dicembre . .	9	21.5 — 7.2	22.4 — 4.7	25.3 — 0.9	1.4 — 0.8	4.2 + 1.9	2.8 + 4.2	4.7 + 2.6	— 2.1 0
1879	Gennaio . . .	5	34.9 — 1.9	36.5 + 4.3	38.9 + 3.9	7.5 + 9.7	9.0 + 5.7	3.5 + 3.5	9.6 + 5.4	0.1 + 0.1
—	Dicembre . .	5	23.6 —10.9	25.0 — 8.9	27.6 — 6.7	6.0 — 0.8	5.6 + 6.6	2.2 + 5.5	6.2 + 6 2	— 6.2 + 0.7
1881	Gennaio . . .	20	25.3 — 9.4	28.0 — 5.1	31.3 + 1.1	3.7 + 8.7	3.0 + 4.8	0.3 + 4.1	5.2 + 6.1	— [illegible] + 1.1
—	Luglio	27	31.6 — 7.8	32.3 — 5.6	35.2 — 2.4	23.3 + 1.5	27.7 + 3.0	22.5 — 0.4	28.2 + 2.2	18.8 + 1.1
—	Agosto	18	28.8 — 8.0	28.2 — 6.7	31.6 — 3.0	20.8 + 0.7	29.4 + 4.7	24.5 + 3.0	29.4 + 4.3	15.5 0
1882	Dicembre . .	24	26.7 —11.3	25.3 —10.0	27.4 — 8.2	5.6 + 4.8	8.2 + 4.3	5.0 + 3.3	8.2 + 3.1	3.8 + 1 5
1883	Luglio	15-16	34.4 — 1.2	35.0 — 0.1	35.0 — 0.4	23,1 + 0.9	27.8 + 2.9	23.3 + 2.5	28.2 + 2.3	19.7 + 0 5
1884	Marzo	7	31.7 — 2.6	33.1 + 0.4	35.3 + 2 4	11.8 + 5,5	17.1 + 6,7	12.5 + 4.5	17.6 + 6.0	5.7 + 0.1
1886	Febbraio . . .	2	27.6 — 4.4	28.6 — 1.5	30.2 — 0.4	6.5 + 5.8	7.6 + 3.0	4.5 + 2.7	7.9 + 2.7	0.4 + 0.5
1887	Agosto	18	28.9 — 2.6	27.3 — 3.0	28.1 — 2.6	9.8 + 0.8	11.0 — 0.1	8.4 — 1,0	14.8 + 0.8	6.8 + 0.2
1889	Aprile	2	28.3 — 6.1	28.8 — 3.6	32.0 — 0.3	21.9 + 0.9	24.5 + 0.2	21.2 + 1.1	24.9 —	19.9 + 4.5
1890	Gennaio . . .	24	30.6 — 7.6	33.5 — 3.2	35.9 — 1.0	9.8 + 7.2	13.3 + 7,5	7.8 + 4.3	14.0 + 7,4	0.5 — 1.6

Digitized by Google

TÀ RELATIVA		VENTO			Acqua evaporata	STATO DEL CIELO		
3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.		9h a.	3h p.	9h p.
34 — 26	68 — 4	W 4	W 4	NE 1		3	1	0
44 — 11	65 — 4	W 2	W 3	N 1		10	7	0
17 — 45	32 — 44	WNW 2	WNW 3	0	6.9 + 6.0	1	0	0
35 — 38	50 — 32	SW 1	W 3	W 3		0	2	1
26 — 53	58 — 34	W 2	W 3	S 2		0	0	6
53 — 39	69 — 45	SW 3	W 4	W 3		3	1	0
54 — 25	54 — 29	W 3	W 4	0		9	4	0
16 — 36	32 — 27	W 3	W 2	W 1	18.0 +11.9	0	0	0
17 — 32	23 — 42	— —	W 3	W 1	14.6 + 9.9	0	0	0
31 — 42	47 — 36	W 3	W 2	W 1		0	0	0
17 — 35	26 — 37	W 4	W 3	W 4	18.4 +13.8	0	0	0
24 — 46	35 — 48	WSW 3	W 4	SW 2		1	0	0
30 — 55	39 — 37	W 4	W 3	NW 2		0	0	0
16 — 22	28 — 22	SW 2	W 4	WNW 4	9.9 + 7.1	3	2	0
16 — 35	23 — 30	W 4	W 3	W 2	12.1 + 8.0	3	2	0
26 — 41	50 — 33	SW 3	W 3	S 2		1	2	0

Digitized by Google

Tutte queste osservazioni mostrano evidentemente che dopo una depressione barometrica, alla quale tenga dietro un vento forte occidentale, il cielo si rasserena tosto nel Piemonte, la temperatura si eleva notevolmente e sopra tutto diminuisce l'umidità dell'aria.

Per determinare la causa di questo fenomeno singolare, che apparentemente contraddice alle leggi generali sulla variazione del tempo, ho studiato con grande copia di osservazioni raccolte in tutto il Piemonte, sulle Alpi, nella Savoia e nel Delfinato, le condizioni dell'atmosfera nel mattino del 24 gennaio 1890.

Ma prima di parlare di queste osservazioni, ricorderò ancora un altro fenomeno che presenta i medesimi caratteri. È viva ancora nella memoria di tutti la burrasca che sconvolse il mare Mediterraneo dal 16 al 17 ottobre 1890, e che costò alla nostra flotta una torpediniera e la vita ai valorosi marinai che vi erano imbarcati. Qui a Torino il barometro scendeva rapidamente il giorno 16 con un tempo piuttosto cattivo e raggiungeva il valore minimo (727.3) alle ore 6 pomeridiane; in quell'ora stessa si levò un vento impetuoso di WSW che durò tutta la notte. E col levarsi del vento il cielo si rasserenò immediatamente, la temperatura mostrò un notevole aumento, l'aria si fece secchissima e il cielo continuò ad essere sereno tutto il giorno seguente, mentre seguitava a spirare il vento di W. Nel rimanente dell'Italia il cielo fu quasi sempre coperto e il tempo molto cattivo.

Affinchè si possa vedere come variano insieme la pressione atmosferica, la temperatura, l'umidità dell'aria e l'intensità del vento, quando si presentano le condizioni generali del tempo che sto esaminando, trascrivo i valori ottenuti dagli strumenti registratori dell'Osservatorio dal mezzodì del 23 gennaio 1890 fino alla mezzanotte del giorno successivo.

Digitized by Google

Condizioni atmosferiche in Torino il 23 e 24 gennaio 1890.

Giorno	Ora	Pressione barometrica	VENTO		Temperatura	Umidità relativa	Stato del cielo
			Direzione	Velocità km.			
23	12h *m*	732.3	*SE*	4	0.6	92	10 $\equiv^{2}$
	1 *p*	31.3	*SE*	2	1.3	89	10 $\equiv$
	2	30.6	*SE*	1	2.0		
	3	29.5	(*SW*)	0	2.6	82	8 $\equiv^{0}$
	4	28.6	(*SSE*)	0	2.6		
	5	28.0	*S*	3	2.5		
	6	27.7	*SE*	8	2.2	89	10 $\bullet^{0}$
	7	27.3	*SSE*	8	2.3		
	8	27.1	*SSE*	5	2.2		
	9	26.9	*S*	8	2.2	87	10 $\bullet^{0}$
	10	25.2	*S*	7	2.0		
	11	24.0	*S*	8	1.0		
	12	24.2	*SSW*	15	1.3	76	8
24	1 *a*	26.0	*S*	18	1.6		
	2	26.7	*SSW*	25	3.5		
	3	27.0	*SSW*	20	4.2	63	2 *ms*
	4	27.0	*SW*	27	7.3		
	5	26.9	*SW*	25	8.0		
	6	27.5	*SSW*	18	8.2	58	1 *ms*
	7	29.0	*S*	16	9.0		
	8	30.0	*SW*	20	9.2	35	1 *msw*
	9	30.6	*SW*	20	9.8	32	1 *msw*
	10	31.3	*SW*	25	10.5		
	11	32.0	*SW*	30	11.2		
	12	32.7	*SSW*	35	11.8	42	3 *msw*
	1 *p*	33.0	*SW*	38	13.0	25	1 *ms*
	2	33.2	*W*	30	14.0		
	3	33.5	*W*	15	13.3	26	3 *msrw*
	4	33.8	*W*	18	13.5		
	5	34.6	*SW*	20	11.8		
	6	35.3	*ENE*	5	10.3	36	1 *msw*
	7	35.4	*ENE*	0	9.3		
	8	35.2	*NE*	4	8.8		
	9	35.9	*S*	7	7.8	50	0
	10	37.5	*NE*	6	7.4		
	11	38.1	*S*	8	7.0		
	12	38.6	*S*	0	4.2	72	2 *ms*

Digitized by Google

Queste variazioni sono rappresentate dai diagrammi della tavola I^a, e la II^a rappresenta le condizioni del tempo in Europa al mattino del 24 gennaio e poi in particolare la temperatura, l'umidità, l'aspetto del cielo e la direzione del vento sulle Alpi occidentali e nel Piemonte (1).

Il mattino dal giorno 23 vi era una pressione barometrica molto bassa fra l'Inghilterra e l'Irlanda; alla sera il ciclone aveva il suo centro vicino allo Zuider Zee, e, seguitando nel suo movimento, si portò sulla Polonia al mattino del 24. Secondo la legge generale della circolazione dell'aria in un ciclone la penisola iberica e la Francia e l'Europa di mezzo furono percorse dai venti di ponente a cominciare dal giorno 23; ma questi venti venivano arrestati dalle Alpi occidentali e non si fecero sentire se non debolmente sull'Italia superiore; anzi si venne formando nella Valle del Po un'area secondaria di bassa pressione e quindi vi fu un leggero richiamo d'aria dal Sud, cosicchè nel pomeriggio del giorno 23 predominarono i venti deboli di Sud e di Sud-Est. L'aria si addensava sul versante occidentale delle Alpi, quasi come avrebbe fatto un corso d'acqua incontrando una diga; ma allorquando il rigurgito dell'aria superò la catena montuosa e il moto ciclonico dell'aria fu aiutato dalla notevole differenza di pressione barometrica fra la Valle del Po e il versante occidentale delle Alpi, incominciò a soffiare un fortissimo vento di Ovest e di Sud-Ovest, che solo in alcuni luoghi prendeva una direzione differente per la particolare conformazione orografica del paese. Allora nel Piemonte, e in modo particolare alle falde delle Alpi, dove prima arrivava l'aria che aveva superate le montagne, il cielo si rasserenò immediatamente, l'aria divenne secca, la temperatura si elevò ad un tratto e al mattino del giorno 24, mentre nelle altre contrade il tempo era generalmente cattivo, qui splendeva il più bel sole di primavera.

Simili giornate serene con temperatura molto mite, nel cuore dell'inverno, sono frequentissime nei nostri paesi di montagna e

(1) Le condizioni generali in Europa sono desunte dai Bollettini meteorici giornalieri che si pubblicano in Italia, in Francia e in Austria e dal Weekly Weather Report dell'Ufficio Meteorologico di Londra: ed ho costrutto la tavola del Piemonte e delle Alpi colle indicazioni che mi furono gentilmente trasmesse dai signori Direttori delle Stazioni Meteorologiche Piemontesi, del Delfinato e della Savoia; io li ringrazio qui della loro cortesia.

Digitized by Google

gli abitanti chiamano scirocco il vento che porta quella mitezza di cielo, senza punto cercare di spiegarne l'origine. Alcuni meteorologisti, poi, accogliendo troppo facilmente un'ipotesi che loro sembrava rendere ragione di quel vento caldo, pensarono senz'altro che fosse un ramo discendente di una corrente calda venuta dall'equatore.

Ma questa ipotesi è troppo artificiosa, e non è confermata da alcun fatto sperimentale, e poi è insufficiente a spiegare il fenomeno. Infatti non si saprebbe comprendere come quest'aria calda, che si sarebbe elevata dall' Oceano, o almeno dovrebbe aver attraversati i mari, non giunga a noi carica di vapori e non produca delle abbondanti precipitazioni venendo a contatto col suolo freddo; ma è invece straordinariamente secca. Osservando la distribuzione della temperatura e della umidità sul Piemonte nel mattino del 24 gennaio 1890, si vede che il cielo era sereno, l'aria secca e la temperatura elevatissima ai piedi delle Alpi e poi andava man mano diminuendo verso la pianura; la linea isotermica di 9° seguiva quasi esattamente la direzione della catena montuosa, mentre sull'altro versante la temperatura era molto più bassa, il cielo quasi tutto coperto e in alcuni luoghi cadeva la pioggia o la neve; e per spiegare questi fenomeni non possiamo pensare ad una corrente d'aria calda venuta dall'equatore a riscaldare tutta la zona che va da Boves nelle Alpi Marittime fino a Biella. Anzi la distribuzione della pressione barometrica sull'Europa e il sistema generale della circolazione atmosferica in quel giorno dimostrano che non sarebbe stata possibile una tale corrente.

Questi fenomeni così generali, che si ripetono sempre coi medesimi caratteri alle falde orientali delle nostre Alpi, come i fenomeni della medesima natura che si osservano alle falde delle Alpi Svizzere, quando soffia un vento impetuoso e molto caldo che discende dalla montagna, il föhn (1), e ai piedi delle montagne

(1) Questo classico vento caldo e asciutto, che spira sulla Svizzera dalle cime nevose delle Alpi, fu studiato particolarmente da Helmholtz, da Hann e da v. Bezold. Questi, insieme a molte pregevoli memorie, nelle quali applicò i principii della termodinamica ai fenomeni atmosferici, e in particolare al föhn, scrisse in forma elementare intorno a questo vento e intorno alla formazione delle precipitazioni un bellissimo articolo che fu pubblicato, nella rivista Himmel und Erde (1889) e poi tradotto e arricchito di preziose note dal Dott. Michele Raina dell'Osservatorio di Milano.

Digitized by Google

Rocciose, quando soffia il vento di Ovest, e persino alle falde orientali degli Urali, debbono avere un'origine più semplice e meglio determinata, che ha il suo fondamento nelle proprietà generali dei gas e dell'aria atmosferica e nei principii della termodinamica.

Consideriamo una certa massa di aria contenente del vapore acqueo, la quale si muova verso le Alpi da occidente verso oriente, partecipando al movimento di un ciclone, che attraversa l'Europa al Nord dell'Italia; quest'aria incontra la catena delle Alpi ed è costretta ad innalzarsi per sorpassarla. In questo sollevamento si espande, perchè diminuisce la pressione a cui è soggetta; e per il lavoro che fa nell'espandersi, vincendo la pressione esterna, si raffredda; quindi il vapore che essa contiene la satura completamente e poi, seguitando a diminuire la temperatura, lascia precipitare sotto forma di pioggia o di neve l'eccesso di vapore, mentre ritiene in gran parte il calore messo in libertà dal vapore condensato o dall'acqua che si è congelata.

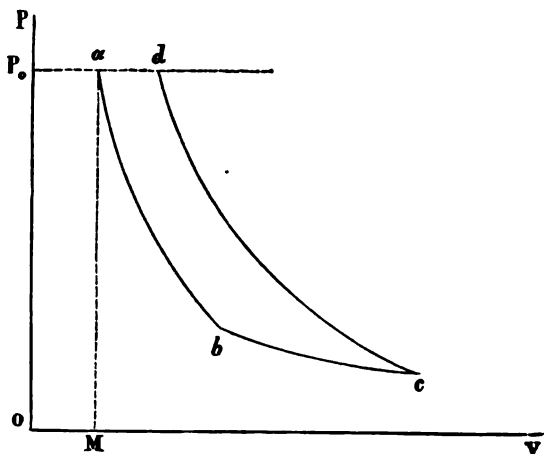
L'analisi matematica permette di calcolare la temperatura che quest'aria possiede in ogni istante, ma questo calcolo presenta alcune difficoltà, anche perchè bisognerebbe tenere esatto conto del calore scambiato per irradiazione; però è certo che l'aria giunge alla sommità della montagna priva di una gran parte del suo vapore e ad una temperatura molto più alta di quella che avrebbe avuto senza la precipitazione del vapore, e questo spiega come in generale il tempo sia cattivo sul versante dal quale spira il vento.

Quando poi l'aria ha superato la sommità della montagna, si precipita a valle dall'altra parte con una velocità che è tanto maggiore quanto è più grande la differenza di pressione fra i due versanti; in questa discesa l'aria viene compressa e perciò si riscalda, si trasforma anche in calore una porzione dell'energia di movimento che essa possiede giungendo al piano, e viene portata ad una temperatura più alta di quella che aveva al principio della salita, perchè è quasi priva di vapore ed inoltre possiede una gran parte del calore che questo ha messo in libertà nel condensarsi sull'altro versante; quindi il cielo è sereno e la temperatura molto elevata alle falde delle Alpi verso il Piemonte.

Queste variazioni di temperatura di una massa d'aria umida, che sale sul fianco di una montagna e poi precipita dall'altra parte, si possono rappresentare in modo facile ed evidente coi

Digitized by Google

metodi impiegati nello studio della termodinamica e che furono applicati alla Meteorologia specialmente da v. Bezold.

È noto che scegliendo due assi ortogonali OV, OP, se prendiamo sul primo un segmento OM proporzionale al volume di una data massa di gas, e sopra una parallela ad OP condotta per M prendiamo un segmento Oa proporzionale alla sua pressione, il punto a determina le condizioni del gas, perchè ne indica la pressione e il volume, e si potrà inoltre calcolarne la temperatura; quindi per studiare come variano le condizioni del gas basterà osservare la legge colla quale si muove il punto a che lo rappresenta, nel piano dei due assi. Ora se una data massa di aria umida si eleva nell'atmosfera, senza che venga comunicato o sottratto calore dall'esterno, il punto a, che ne rappresenta le condizioni fisiche descriverà una linea come ab

fino a tanto che incominci a condensarsi e a precipitare il vapore per il raffreddamento; quindi, per tutto il tempo che dura la condensazione descrive una linea come bc, e poi, quando l'aria discende dal fianco opposto della montagna il punto descrive una linea come cd, se immaginiamo che si arresti in d, ossia che la pressione finale sia uguale alla pressione che aveva l'aria al principio della salita.

Ora, per una determinata pressione, la temperatura assoluta di una certa massa di gas è proporzionale al suo volume, e perciò

Digitized by Google

il segmento *ad* misura l'aumento di temperatura che l'aria subisce percorrendo il ciclo *abcd*. Da questo schema si vede ancora come la temperatura dell'aria che scende ai piedi delle Alpi dipende sopra tutto dalla temperatura dell'aria al principio del moto ascendente sull'altro versante e dall'abbondanza delle precipitazioni che si compiono nella salita. E questo spiega come i venti di Nord, i quali, nella loro discesa dalle Alpi, sembrerebbero dover dare origine a fenomeni analoghi a quelli studiati fin qui, non rechino in generale una temperatura mite con cielo sereno, quantunque alcuni rapidi aumenti di temperatura con venti di Nord siano stati osservati a Milano dallo Schiaparelli fin dal 1869.

Dalle osservazioni fatte parmi di poter così spiegare i caratteri del tipo isobarico, che mi ero proposto di studiare:

1° Quando un ciclone attraversa l'Europa al Nord dell'Italia, da ponente verso levante, il tempo peggiora sul versante occidentale delle Alpi; e, poichè sul Piemonte incomincia a spirare un vento forte di Ovest o di Sud-Ovest (che in alcuni luoghi può anche essere modificato dalle particolari condizioni orografiche), quivi il cielo si fa sereno e si innalza notevolmente la temperatura, specialmente alle falde delle montagne.

2° Questo vento caldo ed asciutto non è dovuto ad alcuna speciale corrente venuta dall'Equatore; ma la sua secchezza e la elevata temperatura sono una conseguenza della condensazione del vapore contenuto nell'aria quando questa si solleva, e del riscaldamento prodotto dall'aumentar della pressione, quando essa discende sul versante orientale, secondo le leggi generali della termodinamica.

Digitized by Google

Influenza dei cicloni sulla meteorologia locale;

Nota del Socio G. BERRUTI

Dalla Nota del dott. G. B. Rizzo, di cui l'egregio collega ha dato comunicazione all'Accademia, rilevo con piacere che all'osservatorio della R. Università di Torino si studi la meteorologia locale in relazione con quella generale. È oramai provato, che i fenomeni meteorologici locali dipendono in massima parte da fenomeni più generali, quali sono le grandi correnti atmosferiche ed i cicloni. L'Europa occidentale e la centrale subiscono gli effetti dei medesimi cicloni, che arrivano dall'America attraverso l'Atlantico. Il Piemonte ha contro gli effetti dinamici diretti dei medesimi una potente difesa nelle Alpi occidentali. L'influenza di questa difesa si manifesta nettamente nelle carte isobariche giornaliere pubblicate dall'ufficio centrale di meteorologia.

Percorrendo le Alpi ho avuto molte volte l'occasione di assistere allo spettacolo della bufera, che mentre infieriva sul versante francese e sulle alte vette, non riesciva a penetrare in Italia, che per brevi distanze attraverso i colli compresi fra i duemila ed i tremila metri di altezza. Questo fatto come l'altro, che le correnti umide del sud-ovest apportatrici di pioggia o di neve non arrivano in Piemonte attraversando le Alpi, ma vi arrivano solamente per riflessione o rigurgito dopo varcata la catena degli Appennini, io credo che valga a dimostrare, che anche nei cicloni allo spostamento verticale dell'aria dopo un certo percorso prevale lo spostamento orizzontale, ed è all'aria trascinata in questo movimento, che si devono attribuire i rapidi cambiamenti di temperatura, che si manifestano al passaggio del ciclone, il che concorderebbe col fatto, che in uno stesso luogo si ha aumento di temperatura e come un vento di scirocco quando passa l'arco di ciclone diretto da sud a nord, e diminuzione di temperatura quando passa l'arco diretto da nord a sud.

Digitized by Google

Così è avvenuto per l'ultimo grande ciclone, che ha attraversata l'Europa facendosi sentire dalla latitudine di Roma a quella di Berlino. Esso si manifestò da noi con due giorni di vento sciroccale a cui successero tosto quei venti freddi, che portarono la neve in Svizzera e le brinate in Francia ed in Liguria.

Del resto malgrado gli studi bellissimi già fatti specialmente dall'astronomo Faye sul moto ascendente o discendente dell'aria nell'interno dei cicloni, io credo che molto rimanga ancora da definirsi in proposito tanto più, che il ciclone deve subire delle grandissime deformazioni quando urta contro ineguaglianze del suolo, che come le Alpi non possono a meno di produrre correnti riflesse in direzioni diverse. Per studiare il fenomeno all'infuori di queste perturbazioni in Francia ed in Germania si sono creati degli osservatori in montagna In Italia il Club alpino sta impiantandone uno sulla vetta del Monte-Rosa. Forse sarebbe meglio collocato per questo scopo un osservatorio sul Monviso o sopra altra vetta isolata delle Alpi occidentali.

Ad ogni modo è certo fin d'ora, che le più grandi perturbazioni atmosferiche dipendono dai cicloni e che colla osservazione degli effetti locali e coll'aiuto del telegrafo la meteorologia è già in grado di fare presagi praticamente utili. Con un buon servizio di comunicazioni telegrafiche internazionali, si poteva evitare il disastro di cui furono vittime al Montebianco nell'agosto 1890 il Conte di Villanova e le guide Castagneri e Maquignaz, poichè causa di quel disastro fu precisamente un ciclone, che già da due giorni percorreva la Francia producendo danni gravissimi sul suo passaggio, e che doveva inevitabilmente venire, come venne, a battere furiosamente contro le Alpi. Il viaggiatore e le guide avrebbero potuto riceverne avviso alla stazione telegrafica di Courmayeur in tempo utile per sospendere la loro partenza ed evitare il pericolo.

Digitized by Google

Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno $\mathbf{S}_r$;

Nota di FEDERICO AMODEO

> **Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen,.....**
>
> **RIEMANN, *Gesammelte Werke*, p. 254.**

In un'epoca, in cui si discute con tanto interesse intorno alle idee fondamentali delle matematiche, non è forse fuor di proposito il cercare di mettere in evidenza quali debbano essere i postulati della geometria proiettiva, sia che si voglia considerarla limitata alle 3 dimensioni dello spazio ordinario, sia che si voglia estenderla ad un numero maggiore di dimensioni; sì che si possa dedurre da essi la rappresentazione dei punti dello spazio mediante coordinate (1). E ciò ha tanto maggiore interesse in quanto è noto che dalla geometria proiettiva si ricavano, con particolari considerazioni e opportune restrizioni, le tre geometrie metriche, *iperbolica*, *parabolica* ed *ellittica* (2). Quando questa questione fosse risoluta, si potrebbe anche di conseguenza definire che cosa è una *varietà lineare di dimensione* r, cioè precisare quali sono i caratteri che deve avere una varietà di dimensione r, perchè il suo studio sia analogo a quello di uno spazio lineare ad r dimensioni.

(1) Vedi a tal proposito, SEGRE, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* (*Rivista di Mat.*, vol I, p. 61, nota).

(2) Vedi le memorie del KLEIN pubblicate nei *Math. Ann.* Bd. IV, VI, VII e XXXVII sulla geometria non euclidea; e inoltre la 3ª parte del 2º vol. delle *Vorlesungen über Geometrie* di A. CLEBSCH pubblicate dal LINDEMANN, dove è esposto, secondo i concetti del KLEIN, lo studio di queste geometrie dipendentemente da quello della geometria proiettiva.

Digitized by Google

L'argomento si scinde in due parti ben distinte; l'una riguarda i postulati che necessitano per generare lo spazio ad r dimensioni; l'altra riguarda i postulati che bisogna aggiungere per rappresentare con coordinate i punti dello spazio, e stabilire l'equazione di uno S_{r-1} contenuto nello S_r.

Nessuno, che io sappia, ha ancora discusso l'argomento di cui qui si tratta; invece parecchi hanno trattato argomento analogo in riguardo allo spazio a 3 dimensioni, io mi limito a citare quelli che maggiormente ho avuto presenti in questa ricerca. In ordine cronologico essi sono:

R. De Paolis, *Sui fondamenti della geometria proiettiva;* Mem. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol 9, p. 489, 1880-81;

M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig 1884;

Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, 2° vol., Leipzig 1891 (1).

Il De Paolis tratta solo la seconda parte del tema e fonda tutto il suo lavoro sulla costruzione del *sistema armonico*, col quale stabilisce la teoria della proiettività e dell'involuzione, e se ne serve per passare alla rappresentazione della variabile numerica reale sulla retta. Si vedrà come si possa pervenire alla detta rappresentazione indipendentemente dal sistema armonico e dalla teoria dell'involuzione. Il Pasch, che tratta ambedue le parti dell'argomento, fonda il suo sistema di postulati sul concetto primitivo di segmento, e ammette che esso sia individuato dai suoi estremi; poi genera la retta, il piano e lo spazio; egli più che la geometria proiettiva tiene presente lo spazio fisico e poi generalizza il linguaggio estendendolo al modo di vedere della proiettiva. Il Lindemann stabilisce i concetti di piano e di retta in modo che non si potrebbero egualmente estendere ad uno spazio di qualunque numero di dimensione, e non si ferma abbastanza sulla seconda parte del tema.

Essendo nel mio intendimento di abbracciare in unico ragionamento, tanto lo spazio proiettivo, quanto ogni varietà lineare

---

(1) Un altro pregevole lavoro è stato pubblicato sullo stesso argomento dal Peano, intitolato: *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino 1889. In esso l'A. segue con alquante modificazioni la via tenuta dal Pasch, limitandosi solo alla prima parte dell'argomento.

Digitized by Google

di forme geometriche, non ho creduto opportuno di seguire la via tracciata dal PASCH; sia perchè il segmento è il meno che si sappia ideare quando si voglia passare dal concetto ordinario di retta a quello più generale di un fascio di varietà qualsiansi, ma più perchè il segmento in un fascio non è *individuato* dai due suoi estremi; invece ho posto a base del mio sistema di postulati il concetto fondamentale della linea retta (1).

Il presente lavoro è diviso in tre paragrafi. Nel primo si tratta della generazione degli spazii e delle loro principali proprietà, e in esso si mostra che necessitano $r+2$ postulati per pervenire a generare uno spazio ad r dimensioni: si tenga però presente che di questi, solo due sono sostanzialmente diversi dai rimanenti e sono il postulato della retta e quello del piano, gli altri r sono identici nella forma e si potrebbero, volendo, ridurre ad un solo. Nel secondo paragrafo stabilisco in modo diretto la corrispondenza univoca fra i punti di una retta (o elementi di un fascio qualunque di varietà) e la variabile numerica: per questo si ha bisogno di altri tre postulati; l'uno riguarda la *forma* della retta; l'altro corrisponde al postulato di *Archimede;* il terzo è il postulato della *continuità*. Nel terzo paragrafo parlo del birapporto e della proiettività, accenno alla variabile immaginaria, e stabilisco la equazione di un S_{r-1} dello S_r (2).

Qualora si voglia passare dalla geometria proiettiva a una delle geometrie metriche, iperbolica, parabolica, o ellittica, ai postulati qui enunciati basterà aggiungere un postulato riguardante l'ente all'infinito e limitarsi alle trasformazioni proiettive che trasformano questo ente in se stesso.

---

(1) Avevo già terminato questo lavoro, quando dal chiar. prof. VERONESE (che nel passato aveva nelle sue lezioni seguito i concetti del PASCH) mi fu comunicato a voce che egli nella sua opera sui fondamenti della geometria (in corso di stampa) nemmanco ha creduto più opportuno di poggiarsi sul concetto di segmento.

(2) Tengo ad avvertire che il numero dei postulati è rappresentato da $r+5$ per gli spazii di dimensione $r \geq 3$, e invece per l'S_1 e per l'S_2 sono gli stessi che per l'S_3; poichè per completare la geometria proiettiva della retta e del piano con questi postulati, a causa del teorema che tre elementi di una forma semplice, considerati in un certo ordine, individuano il quarto armonico v. n. 14), bisogna ammettere l'esistenza dell'S_3.

Digitized by Google

§ 1.

Generazione degli spazii.

1. — Supposto che si sia definito che cosa è un punto (1), bisogna ammettere che:

Post. 1.° *Esistono dei punti.*

Per indicare un punto useremo il simbolo S_0, e per indicare un determinato punto useremo una lettera italica minuscola marcata. Quando diremo che due punti **a**, **b** *coincidono*, o più brevemente che **a** = **b**, intendiamo di dire che **a** e **b** rappresentano lo stesso punto. Per comodità diremo *indipendenti* due punti distinti.

2. — Post. 2.° *Dati due punti indipendenti* **a**, **b**, *è da essi individuata una classe di infiniti punti, di cui quei due fan parte, la quale ha la proprietà che ogni altra classe analoga di punti, che contenga quei due, è identica ad essa.*

Questa classe di infiniti punti dicesi *retta*, o *fascio*, o *varietà lineare* ∞^1. Con questo postulato ammettiamo come *ente* non definito la retta, e tale sarebbe se si trattasse solo della retta ordinaria, nel caso più generale del fascio propriamente detto, sarà sempre possibile, per le cognizioni che si hanno dell'ente che si assume come punto, di poter generare o costruire geometricamente un fascio. Per indicare una retta useremo il simbolo S_1; e per indicare la retta individuata dai punti **a**,**b** useremo la notazione **ab**: e diremo che **ab** congiunge **a** con **b**, ovvero che essa passa per i punti che essa contiene, che appartiene a tutti i suoi punti, e che i punti **a**, **b**,... della retta **ab** appartengono alla retta. Quando diremo che due rette *coincidono*, o più brevemente che **ab** = **cd**, intendiamo di dire che **ab** e **cd** rappresentano la medesima retta; in generale estenderemo questo significato a tutti gli altri enti che in seguito andremo nominando.

---

(1) Non è necessario per lo scopo che ci proponiamo che il punto sia il punto ordinario; può essere l'insieme di un gruppo di punti, una curva o superficie di un determinato ordine, un complesso, un connesso, una *varietà qualsiasi a qualunque numero di dimensioni*, un ente geometrico qualunque.

Digitized by Google

Dal post. 2° si ricava che **ab** = **ba**; e inoltre che *la retta* **ab** *è pure individuata da due qualunque altri suoi punti indipendenti* **c, d**; cioè che se **c, d** sono due punti indipendenti della retta **ab**, è **ab** = **cd**.

3. — Con gl'infiniti punti di una retta potrebbero essere esauriti i punti che si sono supposti esistere mediante il post. 1°; quindi è necessario ammettere che:

Post. 3.° *Fuori della retta individuata da' due punti* **a, b** *esiste ancora un punto.*

Tre punti che non appartengono ad una medesima retta, oppure una retta ed un punto che non si appartengono si dicono *indipendenti.*

Siano $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ tre punti indipendenti; il luogo di tutti i punti degli S_1 che congiungono uno dei tre punti, p. es. $\mathbf{a}_0$, ai punti della retta che passa per i rimanenti punti $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, ciascuno considerato una volta sola (anche se fosse comune a due di essi come avviene per i punti della retta $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, o a più di essi come avviene per il punto $\mathbf{a}_0$), è un nuovo ente che chiameremo *piano*, o *varietà lineare* ∞^2.

Due rette, se non coincidono, non possono avere più di un punto comune (punto *d'intersezione*); quindi, *ognuno degli* S_1 *che passano per* $\mathbf{a}_0$ *non può segare la retta* $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *che in un punto solo.*

Per indicare un piano useremo il simbolo S_2, e per indicare che esso si è generato nel modo sopra indicato, scriveremo $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Di ogni retta i cui punti appartengono ad un S_2, si dirà che *appartiene* al piano o *giace* o *è contenuta* nel piano, e si dirà che il piano *passa* per la retta o *appartiene* alla retta.

È evidente che se $\mathbf{b}_0\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; o, in altre parole, che il piano è pure individuato dal punto $\mathbf{a}_0$ e da due altri punti indipendenti della retta $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

4. — Per poter ora passare ad esaminare la proprietà del piano, bisogna ammettere qualche cosa che lo distingua da ogni altra varietà ∞^2; a noi pare che, fra le diverse proprietà del piano che si potrebbero assumere come postulati, sia preferibile questa: *il piano è individuato da* 3 *suoi punti*, che noi limiteremo alla seguente forma:

Digitized by Google

Post. 4.° *Dati i tre punti* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *e costruito il piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, *ogni altro piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bc}$ *che contenga i punti* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *coincide con esso.*

Derivano dal post. 4° le seguenti proposizioni: *Se* $\mathbf{b}_1$ *è un punto della retta* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$. *Ogni retta che passa per il punto* $\mathbf{a}_1$ *e per un punto dell'* $S_1\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$ (o *per il punto* $\mathbf{a}_2$ *e per un punto dell'* $S_1\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$) *giace nel piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Il piano $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *è identico al piano* $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$ (poichè ogni punto dell'uno giace nell'altro), *ed al piano* $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$. Perciò l'$S_2$ si può indicare anche con la scrittura $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Se $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *sono due punti rispettivamente degli* S_1 $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; e quindi: *Ogni retta che unisce due punti indipendenti di due degli* S_1 *che congiungono i tre punti* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *giace nel piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Se $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sono due punti indipendenti non appartenenti ad uno dei due raggi* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; e quindi: *Ogni retta che unisce due punti del piano giace nel piano.*

Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sono tre punti indipendenti del piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, *sarà* $\mathbf{abc} = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

E finalmente: *Due rette* $\mathbf{ab}$, $\mathbf{cd}$, *che congiungono due coppie di punti di un piano, si segano in un punto;* poichè se non avessero alcun punto comune, nel piano $\mathbf{a} \cdot \mathbf{cd}$ non sarebbe compresa la retta $\mathbf{ab}$, e quindi nemmanco il punto $\mathbf{b}$.

5. — Post. 5.° *Fuori del piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *esiste ancora un punto.*

Diremo *indipendenti* quattro punti che non appartengono ad uno stesso piano. Se quattro punti sono indipendenti; tre qualunque fra essi debbono pure essere indipendenti, poichè se fossero sopra una retta, il piano, che passa per essa e pel quarto punto, conterrebbe i punti dati; assurdo. *A fortiori*, anche due qualunque dei punti dati debbono essere indipendenti.

Un punto ed un piano che non si appartengono si diranno pure *indipendenti.*

Se quattro punti sono indipendenti, la retta che unisce due di essi, e quella che unisce gli altri due non hanno alcun punto comune.

Due rette che non hanno alcun punto comune si dicono *indipendenti.*

Digitized by Google

6. — Siano $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ quattro punti indipendenti, il luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno di questi punti, p. es. $\mathbf{a}_0$, ai punti del piano individuato dai rimanenti punti $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, contato ciascuno una volta sola, è un nuovo ente, che chiameremo *spazio a tre dimensioni* o *varietà lineare* ∞^3.

Per indicare uno spazio a tre dimensioni useremo il simbolo S_3, e quando vogliamo indicare che è generato nel modo qui indicato, diremo l'S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$. Sono evidenti le seguenti proposizioni.

Se $\mathbf{b}_0 \mathbf{c}_0 \mathbf{d}_0$ *sono punti indipendenti dell'* S_2 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \mathbf{c}_0 \mathbf{d}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$.

L' S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *è pure il luogo di tutti gli* S_2 *che passano per la retta* $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1$ *e per i punti della retta* $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$.

Ogni S_2 *che passa per* $\mathbf{a}_0$ *e per una retta qualsiasi del piano* $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *giace nell'*S_3.

Ogni S_1 *che passa per due punti* $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ *dello* S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *giace in esso.*

Ogni S_2 *che passa per tre punti indipendenti* $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ *di* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *giace in esso.*

L' S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *è identico agli* S_3 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$; e perciò indicheremo l'S_3 anche più semplicemente con $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$.

Se $\mathbf{bcd}$ *sono tre punti indipendenti di* S_3 che *non appartengono ad un piano di* $\mathbf{a}_0$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bcd} = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$.

Lo spazio $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ *è individuato da quattro qualunque* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ *dei suoi punti indipendenti;* poichè se $\mathbf{acd}$ è un piano che non passa per $\mathbf{a}_0$ (1), sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{acd} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_0 \mathbf{cd} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{bcd}$. Quindi possiamo ancora aggiungere che lo stesso S_3 è pure individuato da un punto e da un piano in esso contenuti, o da due rette, purchè questi elementi siano indipendenti.

Due piani di un S_3, $\mathbf{bcd}$, $\mathbf{b'c'd'}$, *se non coincidono devono avere a comune una retta.*

Un piano $\mathbf{bcd}$ *ed una retta* $\mathbf{a'b'}$ di un S_3 se non *si appartengono devono avere in comune un punto.*

---

(1) Si noti che, se tre piani $\mathbf{abc}$, $\mathbf{acd}$, $\mathbf{abd}$ dei quattro determinati da $\mathbf{abcd}$ passano per $\mathbf{a}_0$, sarà $\mathbf{a}_0$ coincidente con $\mathbf{a}$ e si ricade nel teorema precedente; il quarto piano non può passare per $\mathbf{a}_0 \neq \mathbf{a}$.

Digitized by Google

7. — Post. 6.° *Fuori dell'* S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *esiste ancora un punto.*

Cinque punti $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ non appartenenti ad uno stesso S_3, oppure un punto ed un S_3 che non si appartengono si diranno *indipendenti.*

Analogamente a quando si è fatto nel n. 6, si mostrerebbe che cinque punti indipendenti generano un S_4 (*spazio a* 4 *dimensioni*, o *varietà lineare* ∞^4), luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno dei punti dati ai punti dell' S_3 determinato dagli altri quattro; che questo S_4 contiene tutti gli S_1, S_2, S_3, che passano per due, tre o quattro dei suoi punti; che esso stesso è individuato da 5 qualunque dei suoi punti indipendenti.

E così di seguito, ammettendo che *fuori dell'* S_4 $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4$ *esiste ancora un punto* (post. 7°) si genera un S_5, e con un altro analogo postulato (8°) si genera un S_6, ecc., ecc., fino a che si giunge con un (r+1)^{mo} postulato a generare un S_{r-1}, che è individuato da r qualunque dei suoi punti, purchè indipendenti fra loro.

In generale diremo che $k+1$ punti sono indipendenti, quando essi non appartengono ad uno stesso S_{k-1}, e quindi nemmanco ad uno spazio di minore dimensione. E diremo che due spazii contenuti in un medesimo spazio sono indipendenti, se essi non hanno alcun punto comune.

8. — Post. (r+2).^{mo} *Fuori dell'* S_{r-1} *esiste ancora un punto.*

Sian dati r+1 punti indipendenti $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{r-2}, \mathbf{a}_{r-1}, \mathbf{a}_r$, il luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno di questi punti, p. es. $\mathbf{a}_0$, ai punti dell' S_{r-1} individuato dai rimanenti punti $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, contato ciascuno una volta sola, è un nuovo ente che chiameremo *spazio ad* r *dimensioni*, o *varietà lineare* ∞^r.

Indicheremo siffatto ente col simbolo S_r, e per indicare il modo di generazione qui accennato scriveremo $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_r$. Lo stesso S_r è pure il luogo dei punti di tutti gli S_2 che passano per l'S_1 $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$ e per i punti dell' S_{r-2} $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \ldots \mathbf{a}_r$, ecc., ecc.; ed è anche luogo dei punti di tutti gli S_{r-1} che passano per l'S_{r-2} $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{r-2}$ e per i punti dell'S_1 $\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$.

Lo stesso S *contiene tutti gli* $S_2, S_3, \ldots, S_{r-2}$, *che congiungono il punto* $\mathbf{a}_0$ *agli* $S_1, S_2, \ldots S_{r-3}$ *dell'* S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_r$; perchè questi sono contenuti negli spazii precedentemente nominati; *e contiene ogni* S_{r-1} *che passa per* $\mathbf{a}_0$ *e per un* S_{r-2} *dell'* S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_r$,

Digitized by Google

perchè esso contiene quelli e soli gli S_1 che congiungono $\mathbf{a}_0$ ai punti dell'S_{r-2}.

Ogni S_k $(k=1,2,\ldots,r-1)$ *che passa per* $\mathbf{a}_0$ *non può avere con l'* S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$ *alcun altro punto comune oltre l'* S_{k-1} *pel quale esso passa.*

Ogni S_1 *che è individuato da* 2 *punti* $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ *indipendenti dello* S_r *è contenuto nello* S_r*;* poichè esso o passa per $\mathbf{a}_0$ e allora è un S_1 che proietta un punto di $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_r$, o è contenuto nell'$S_2$ $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ il quale è a sua volta contenuto in S_r.

Ogni S_{k-1} *individuato da* k *punti indipendenti dello* S_r $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{k-1},\mathbf{b}_k$ $(k\leq r)$ *giace in esso;* poichè ogni S_1 dell'S_{k-1} $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{b}_k$ sta nell'S_r.

L' S_r $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$ *è identico all'* S_r $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$, poichè ogni punto dell'uno è punto dell'altro. Si ha analogamente $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r=$ $=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_r=\ldots=\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_{r-1}$; e perciò indicheremo l'S_r più semplicemente scrivendo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$.

Se $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots\mathbf{b}_{r-1},\mathbf{b}_r$ *sono* r *punti indipendenti di* S_r *non appartenenti ad un* S_{r-1} *di* $\mathbf{a}_0$, *sarà* $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$. Difatti ogni punto di $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_{r-1}\mathbf{b}_r$, essendo un punto di $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$, con $\mathbf{a}_0$ genera un raggio di $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$; viceversa l'$S_r$ $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2.\,\mathbf{b}_r$ contiene l'S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$, e perciò ogni punto di $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2.\,\mathbf{a}_r$ con $\mathbf{a}_0$ produce un raggio di $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$.

L' S_r $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$ *è individuato da* $r+1$ *suoi punti indipendenti* $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,..,\mathbf{b}_{r-1},\mathbf{b}_r$; poichè, se $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$ è un S_{r-1} individuato dai punti dati, che non passi per $\mathbf{a}_0$ (1), sarà $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r=$ $=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$.

Quindi possiamo ancora aggiungere che *lo stesso* S_r *è pure individuato dallo spazio individuato da un gruppo qualunque* $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,..,\mathbf{b}_i$ *degli* $r+1$ *punti indipendenti, e dallo spazio individuato dagli* $r-i$ *punti rimanenti.*

9. — Senza bisogno di alcun nuovo postulato si possono dimostrare tutte le proprietà che citiamo in questo numero e nei seguenti n.[i] 10 e 11.

Se due spazii contenuti in un S_r *hanno* $i+1$ *punti comuni indipendenti fra loro, essi hanno a comune l'* S_i *individuato da questi punti.*

(1) Il punto $\mathbf{a}_0$ può trovarsi al massimo sopra r di questi S_{r-1}, ma allora coincide con uno dei punti $\mathbf{b}$ e si ricade nel teorema precedente.

Digitized by Google

Due spazii indipendenti S_k, $S_{k'}$ *individuano un* $S_{k+k'+1}$ *che li contiene, nè sono contenuti in uno spazio di dimensione minore.* Da questo teorema si ricavano i seguenti corollarii:

Dati due spazii indipendenti $S_k, S_{k'}$, *un gruppo di* $k+1$ *punti indipendenti dell'uno ed un gruppo di* $k'+1$ *punti indipendenti dell'altro formano un gruppo solo di* $k+k'+2$ *punti pure indipendenti.*

L'S_r *è pure individuato da un* S_k *e da un* S_{r-k-1} *indipendenti.*

L'S_r *è pure generato da un numero* s *di spazii* $S_k, S_{k'}, S_{k''}, \ldots$ *indipendenti a due a due, purchè sia* $\Sigma k = r+1-s$.

10. — *Due spazii* $S_k, S_{k'}$, *che hanno in comune un* S_i, *e non uno spazio maggiore, individuano un* $S_{k+k'-i}$, *e questo è il minimo spazio in cui essi sono contenuti.*

Dal quale teorema si deducono i seguenti:

Se $k+k'-i=r$, *i due spazii* $S_k, S_{k'}$, *individuano l'* S_r *in cui sono contenuti;* o altrimenti:

Se due spazii $S_k, S_{k'}$, *si segano in un* $S_{r-k-k'}$, *e non in uno spazio maggiore, essi individuano lo spazio* S_r.

Se $k+k'+2$ *punti sono indipendenti, gli spazii individuati da un gruppo di* $k+1$ *di questi punti, e lo spazio individuato dai rimanenti* $k'+1$ *punti, sono pure indipendenti.*

Se si ha un gruppo di punti indipendenti, e si suddivide in gruppi minori, gli spazii individuati da questi gruppi sono a due a due indipendenti.

11. — *Se la somma degli indici di due spazii* $S_k, S_{k'}$, *contenuti in* S_r *è maggiore di* $r-1$, *essi devono almeno avere a comune un* $S_{k+k'-r}$. Oppure più in generale:

Se S_k, $S_{k'}$, *sono due spazii contenuti in un* S_m *e non in uno spazio minore* $(m \lesseqgtr r)$, *essi hanno a comune un* $S_{k+k'-m}$.

E quindi si ha pure:

Se s *spazii* S_k, $S_{k'}$, $S_{k''}, \ldots$ *sono contenuti in un* S_m *e non in uno spazio minore* $(m \lesseqgtr r)$, *essi devono avere a comune solo un* $S_{\Sigma k-(s-1)r}$. E come casi particolari:

Due S_{k-1} *se non coincidono hanno a comune un* S_{r-2}.

Un numero h *di* S_{r-1} *devono almeno avere a comune un* S_{r-h}*; ed* r S_{r-1} *devono almeno avere un punto comune.*

Digitized by Google

12. — *Proiettare* da un S_k (ente di *proiezione*) una figura (un insieme di enti dello S_r) composta di $S_0, S_1 \ldots S_{r-k-2}$, vuol dire costruire tutti gli $S_{k+1}, S_{k+2} \ldots, S_{r-1}$ (enti proiettanti) che congiungono il dato S_k rispettivamente agli $S_0, S_1 \ldots, S_{r-k-2}$ della figura. In particolare la figura che si ottiene col proiettare un numero finito o infinito di punti di un S_1 (punteggiata) da un S_k che non sega l'S_1 si dirà *fascio* di S_{k+1}, e l'S_k di proiezione si dirà sostegno del fascio. Pel teorema 2° del n. 9, il fascio di S_{k+1} è contenuto insieme all'S_1 che proietta in uno S_{k+2}.

Segare con un S_k (ente di *sezione*) una figura, formata di $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-k}$, vuol dire costruire tutti gli $S_{k-1}, S_{k-2}, \ldots, S_0$, comuni rispettivamente all'S_k di sezione ed agli $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-k}$ della figura data. In particolare un fascio di S_{k+1} si può segare con una retta che non sega il sostegno del fascio, e che è contenuto nell'S_{k+2} costituito dai punti degli S_{k+1} del fascio, e si otterrà per sezione una punteggiata su quello S_1.

Le *punteggiate* ed i *fasci* li diremo con una frase solo *forme semplici*.

§ 2.

Corrispondenza univoca continua fra i punti di una retta e la variabile numerica reale.

13. — Per stabilire una corrispondenza univoca continua fra i punti di una retta e la variabile numerica, non basta aver supposto che i punti della retta fossero in numero infinito, bisogna ammettere alcune altre proprietà che ci possono far pervenire a stabilire il concetto della continuità della retta. A tal fine ammetteremo che (1):

Post. $(r+3)$.^mo^ *I punti della retta sono disposti in modo che ogni punto di essa può, solamente in due direzioni (o versi), opposte l'una all'altra, passare dalla sua posizione a*

(1) Molti autorevoli matematici pervengono a stabilire il continuo rettilineo e le direzioni della retta, poggiandosi sul concetto delle grandezze; noi in questo punto non possiamo far ciò, essendo che pel momento per noi non ha significato la grandezza, ma perverremo fra poco al concetto di distanza fra due punti della retta.

Digitized by Google

quella di un altro punto della retta; e, in ciascuna di queste direzioni, può ogni punto della retta passare successivamente sopra tutte le posizioni dei punti della retta (descrivere la retta) *e ritornare alla primitiva posizione, senza passare due volte sopra alcun punto della retta.*

Diremo *segmento* o *parte* della retta, quell'insieme dei suoi punti che sono percorsi da un punto che, in un'assegnata direzione, passa da una posizione **a** ad una diversa posizione **b**; i punti **a**, **b** si diranno *estremi* del segmento, e più precisamente il punto **a** si dirà *origine* e **b** il termine del segmento. Tutti i punti del segmento si possono dire *compresi* nel segmento, o *interni*, e tutti gli altri punti della retta si diranno *esterni* al segmento. Se il punto **a** dopo aver percorso il segmento **ab**, continua a descrivere la retta nella stessa direzione, percorrerà le posizioni dei punti esterni al segmento **ab**, il loro insieme costituisce altro segmento che dicesi *complementare* del primo. Una coppia di punti **a**, **b** non basta ad individuare un segmento, bisogna inoltre assegnare la direzione colla quale il segmento è percorso, e la sua origine, oppure bisogna assegnare un punto compreso nel segmento che si vuole individuare.

Una coppia di punti **a**, **b** di una retta si dice *separata* da un'altra coppia di punti **c**, **d** della stessa retta, quando per andare da **a** a **b** si debba passare sopra l'una o sopra l'altra posizione dei punti **c**, **d**. In tal caso anche **cd** è separata da **ab**. Se **ab**, **cd** sono due coppie separate, il punto **d** è esterno al segmento **acb**.

Due punti interni o due punti esterni ad un segmento non sono separati dagli estremi del segmento.

Quattro punti **a**, **b**, **c**, **d** *di una retta non possono separarsi che in un modo solo.*

Mentre un punto **a** descrive nelle due direzioni possibili una data retta *R*, il raggio che lo congiunge ad un punto fisso **o** fuori della retta descrive nel piano *R***o** *tutte* le rette del fascio (**o**), e quando il punto **a** sarà tornato alla primitiva posizione, la retta **oa**, senza mai ripassare sopra alcuna retta del fascio (chè altrimenti un raggio del fascio avrebbe due punti comuni colla retta), avrà descritto il fascio; nè si può dire che il fascio potrebbe essere descritto dal suo raggio in più di due modi, perchè passando, con una sezione, dal fascio alla punteggiata, sarebbe anche questa percorsa in un altro modo diverso da

Digitized by Google

quello supposto. Se il punto **a** per passare da **a** in **b** deve coincidere con **c** o con **d**, anche il raggio **oa** per passare da **oa** in **ob** deve coincidere o con **oc** o con **od** ; quindi, come quattro punti si separano sulla retta, così i quattro raggi che proiettano quella punteggiata da **o** si separano nel fascio. E analogamente, se si sega il fascio con un'altra retta del piano che non passa per **o** i quattro raggi saranno segati in punti **a'**, **b'**, **c'**, **d'** che si separano allo stesso modo. Estendendo questo concetto a qualunque altro fascio di S_{k+1} che si ottenga per proiezione dalla retta, si ha che la separazione delle coppie è proprietà che non si altera per qualunque operazione proiettiva (insieme di proiezioni e sezioni).

14. — Quattro punti **a**, **b**, **c**, **d** di una retta disposti nell'ordine considerato si dicono *armonici*, se in un piano che passa per la retta si possa costruire un quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per **a**, due altri lati opposti passino per **b**, uno per **c** e l'altro per **d**.

Dati tre punti **a**, **b**, **c**, *considerati nell'ordine in cui sono scritti*, *si può sempre trovare un altro punto* **d** *tale che il gruppo* **abcd** *sia armonico*, *e questo punto è unico*. La dimostrazione di questo teorema si può condurre come nello *Staudt* (*Geometrie der Lage*, tradotta in italiano da M. Pieri, 1889), astraendo come qui facciamo dal concetto di parallelismo.

Se **abcd** *sono quattro punti armonici di una retta, la coppia* **ab** *è separata necessariamente dalla coppia* **cd**. Infatti la tetrade armonica **abcd** è proiezione in due modi diversi di una medesima *tetrade* armonica **a'b'c'd**, e quindi se **ac** separasse **bd**, ovvero **ad** separasse **bc**, si cadrebbe nell'assurdo che quattro punti di una retta si potrebbero separare in due modi diversi. Diremo, come al solito, elementi coniugati gli elementi di ciascuna coppia.

Se di quattro punti armonici di una retta due coincidono, uno degli altri due deve coincidere con essi.

Diremo *proiettive fra loro* due forme semplici quando sono *riferite fra loro* in modo tale che ad ogni forma armonica nell'una corrisponde una forma armonica nell'altra.

15. — Assegniamo sulla retta tre punti arbitrari **a**, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, e costruiamo i gruppi armonici $\mathbf{ab}_1\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2$, $\mathbf{ab}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3$, $\mathbf{ab}_3\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4$ ..., $\mathbf{ab}_\nu\mathbf{b}_{\nu-1}\mathbf{b}_{\nu+1}$ ...; il punto $\mathbf{b}_2$ sarà separato da $\mathbf{b}_0$ mediante $\mathbf{ab}_1$,

Digitized by Google

e si trova quindi fuori del segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$; il punto $\mathbf{b}_3$ è separato da $\mathbf{b}_1$, mediante $\mathbf{a}\mathbf{b}_2$, e si trova fuori di $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2$, ecc., ecc. In tal modo avremo assegnate sulla retta le posizioni di un numero illimitato di punti $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3 .. \mathbf{b}_{\nu-1}\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}...$, che si succedono l'uno all'altro in modo che ciascuno, p. es. $\mathbf{b}_{\mu+1}$, è esterno al segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_\mu$ che contiene i precedenti; e intanto tutti devono essere contenuti nel segmento $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$, e di essi nessuno potrà coincidere con $\mathbf{a}$. Ma si potrebbe dubitare che la serie di punti possa esser contenuta in un segmento $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{p}$ compreso nel segmento $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$, quindi abbiam bisogno di ammettere che:

Post. $(r+4)$.^{mo} *Se* $\mathbf{p}$ *è un punto del segmento* $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$, *assegnato arbitrariamente fra* $\mathbf{b}_1$ *ed* $\mathbf{a}$, *fra i punti della serie* $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3...\mathbf{b}_4$ *ve ne è sempre uno che è compreso fra* $\mathbf{p}$ *ed* $\mathbf{a}$, *nel segmento* $\mathbf{b}_0\mathbf{p}\mathbf{a}$, *anche se il punto* $\mathbf{p}$ *non faccia parte della serie stessa* (1).

E quindi si deduce che fra $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{a}$ vi è sempre un numero infinito di elementi della suddetta serie, e ciò esprimeremo con frase semplice dicendo che gli elementi di questa serie *si avvicinano indefinitamente ad* $\mathbf{a}$ nella direzione $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3...$, che chiameremo *direzione positiva* della retta.

Con i medesimi tre punti $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, costruiamo i gruppi armonici $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_{-1}$; $\mathbf{a}\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2$; $\mathbf{a}\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3$ .. $\mathbf{a}\mathbf{b}_{-\nu}\mathbf{b}_{-\nu+1}\mathbf{b}_{-\nu-1}$, sarà il punto $\mathbf{b}_{-1}$ esterno al segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_0$, il punto $\mathbf{b}_{-2}$ esterno al segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_{-1}$, e quindi al segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_{-1}$, e così di seguito; quindi i punti $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_{-3}...\mathbf{b}_{-\nu}\mathbf{b}_{-\nu-1}...$ si succedono l'uno all'altro sulla retta in modo che ciascuno, p. es. $\mathbf{b}_{-\upsilon-1}$, è esterno al segmento

(1) È precisamente in questo postulato che si ripercuote la differenza fra il nostro metodo e quello del Pasch. Lo stesso Pasch, riferendosi al modo come egli ricava questa proposizione dal postulato di Archimede, dice (V. l. c. p. 126): Das Axiom, durch welches Herrn F. Klein die Lücke in Staudt's Begründung der Projectivität ausfüllt, kommt auf den eben formulirten Satz hinaus. Diesen als Grundsatz anzunehmen, würde mit den hier festgehaltenen Anschauungen nicht in Einklang stehen. Diesen abgesehen davon, dass eine Beobachtung sich überhaupt nicht auf unendlich viele Dinge beziehen kann, ist die Aufstellung jenes Satzes von unserem Standpunkte aus auch deshalb noch nicht zulässig, weil wir (vgl. seite 18) in einer Strecke nicht unendlich viele Punkte annehmen dürfen, ohne dem Sinne des Wortes Punkt eine weitere als die bisherige Ausdehnung zu geben und uns mithin von seiner ursprünglichen Bedeutung noch mehr zu entfernen. Eine solche Ausdehnung wird erforderlich, wenn man die Punkte der Geraden in vollständige Analogie mit den Gliedern der aus den rationalen und irrationalen reellen Zahlen bestehenden Reihe bringen will; ...

Digitized by Google

$\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_{-\nu}$ che contiene i precedenti; tutti questi punti sono contenuti nel segmento $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_{-1}\mathbf{a}$, e di essi nessuno potrà coincidere con $\mathbf{a}$.

Se $\mathbf{q}$ *è un punto preso ad arbitrio nel segmento* $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_{-1}\mathbf{a}$ *fra* $\mathbf{b}_{-1}$ *ed* $\mathbf{a}$, *anche se esso non coincide con nessun punto della serie* $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_{-2}\ldots\mathbf{b}_{-\nu}\ldots$ *vi sono infiniti punti di questa serie compresi fra* $\mathbf{q}$ *ed* $\mathbf{a}$ *nel segmento* $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{q}\mathbf{a}$. Difatti, si proietti la forma $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_{-1}\mathbf{a}$ nella forma $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$, ogni punto della serie $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_{-2}\ldots\mathbf{b}_{-\nu}$ si proietterà nel punto della serie $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_\nu$ di indice eguale, il punto $\mathbf{q}$ si proietterà in un punto $\mathbf{q}'$ compreso fra $\mathbf{b}_1$ ed $\mathbf{a}$ nel segmento $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$; ma fra $\mathbf{q}'$ ed $\mathbf{a}$ vi saranno infiniti punti della serie $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3\ldots$, quindi infiniti punti della serie $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_{-3}\ldots$ sono compresi fra $\mathbf{q}$ ed $\mathbf{a}$ nel segmento $\mathbf{b}_{-1}\mathbf{q}\mathbf{a}$. E quindi possiam dire che anche i punti della serie $\mathbf{b}_{-2}\mathbf{b}_{-3}\ldots\mathbf{b}_{-\nu}\ldots$ si avvicinano, ma nella *direzione negativa*, indefinitamente al punto $\mathbf{a}$.

Abbiam così, mediante i tre punti $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, determinata sulla retta una doppia serie di punti, che si succedono nelle due opposte direzioni nell'ordine dei loro indici, e si avvicinano in direzione contraria al punto $\mathbf{a}$ (hanno per *limite* il punto $\mathbf{a}$).

Conveniamo ora di far corrispondere ad ognuno dei punti di queste due serie, che diremo ora costituire una serie unica, il valore numerico reale intero, positivo o negativo, rappresentato dal suo indice e di far corrispondere al punto $\mathbf{a}$ il valore ∞ della variabile numerica; avremo così stabilita una corrispondenza univoca fra i punti della retta e i valori reali interi positivi e negativi della variabile numerica; e tale che se la differenza tra due valori della variabile va diminuendo, va pure diminuendo il numero dei punti della serie compresi fra i punti da quelli rappresentati (i punti si vanno avvicinando), e fra essi non vi sarà alcun punto della serie quando la differenza fra i due valori numerici distinti è minima, cioè eguale ad uno.

Abbiamo in tal modo distesa sulla retta la variabile numerica reale ed intera.

16. — Si tenga fisso il punto $\mathbf{a}$, e si trasporti la coppia $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, sulla coppia $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$, o sulla coppia $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$, o sopra una qualunque altra coppia $\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$ di elementi consecutivi e della stessa direzione; la serie non si altera, ma solo si diminuisce l'indice di ciascun punto di tante unità per quante ne contiene l'indice del punto col quale si è fatto coincidere il punto $\mathbf{b}_0$; solo l'indice del punto $\mathbf{a}$ resta inalterato.

Digitized by Google

Per tal motivo noi diremo che tutti i segmenti della retta compresi fra due punti consecutivi della serie sono *eguali* nella serie costruita, oppure sono eguali per rispetto al punto **a**. E quindi il segmento 012 (qui e qualche volta in seguito indichiamo i punti della serie coi soli indici) è doppio del segmento 01, il segmento 01μ è μ-plo del segmento 01. Con ciò l'indice λ di ciascun punto della serie indica, non solo il posto che esso occupa nella serie costruita sulla retta, ma indica pure che *rapporto* havvi tra il segmento 0λ ed il segmento 01; per tal motivo diremo pure che il segmento 01, considerato nella direzione positiva, è il segmento *unità* della retta, e che λ è la *distanza* fra il punto b_λ ed il punto b_0.

Ne segue quindi che *la distanza fra due punti qualunque della retta è eguale alla differenza degli indici di questi due punti.*

La distanza fra due punti della retta è funzione non solo della posizione dei due punti, ma anche dei tre punti fondamentali ab_0b_1 assegnati sulla retta stessa.

Segue pure da un teorema delle forme armoniche, che *la proiezione da un* S_k $(k<r-1)$ *dello* S_r *di una serie dei valori interi della variabile così costruita produce nel fascio* (S_k) *una serie analoga*; o più in generale: *la distanza fra due elementi di una forma semplice rimane inalterata per qualunque trasformazione proiettiva non degenere.*

Si noti che tenendo fisso il punto **a** ed il punto b_0, se si scambiano fra loro il punto b_1 ed il punto b_{-1}, la serie dei punti rimane inalterata, ma cambia il segno dell'indice di ogni punto (si scambia la direzione positiva colla direzione negativa).

17. — *Se tenendo fisso il punto* ∞ *ed il punto* 0, *il punto* 1 *passa al posto del punto* 2, *la serie perde tutti i punti di indici dispari positivi e negativi, e i rimanenti risulteranno numerati nell'ordine in cui si succedono.*

E più in generale: *se il punto* 1 *passa al posto del punto* μ, *la serie resterà costituita dei punti* $\ldots, -2\mu, -\mu, 0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots$, *che prenderanno rispettivamente gl'indici* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Questo teorema è della massima importanza per quanto dobbiamo esporre in seguito, e noi lo dimostreremo per $\mu=2$; la dimostrazione per $\mu=3, 4, \ldots$ che si deduce facilmente da quella di $\mu=2$, la ometteremo per amor di brevità.

Digitized by Google

Sia **lmpq** il quadrangolo costruttore del gruppo armonico $ab_1b_0b_2$, e siano cioè **lm**, **pq** i lati che passano per **a**, **pm** quello che passa per b_0, **lp**, **mq** quelli che passano per b_1, **lq** quello che passa per b_2. Se, rimanendo fissi i lati che passano per **a**, conduciamo per b_0 la trasversale b_0q, che seghi **lm** in **n**, e chiamiamo **r** l'intersezione di nb_1 e **pq**, sarà **mnqr** un quadrangolo costruttore dello stesso gruppo, e quindi **mr** passerà per b_2. Se si assume **lmqr** per quadrangolo costruttore del gruppo armonico $ab_2b_1b_3$, si trova che **lr** passa per b_3; e se chiamiamo **s** l'intersezione di b_2n e **pq** ed assumiamo **mnrs** per quadrangolo costruttore del gruppo $ab_2b_1b_3$, si trova che **ms** passa per b_3; infine assumendo **lmrs** per quadrangolo costruttore del gruppo $ab_3b_2b_4$, si trova che **ls** passa per b_4. Considerando ora il quadrangolo **lqsn**, si trova che esso è quadrangolo costruttore del gruppo $ab_2b_0b_4$, dunque questo gruppo è armonico (1).

Con ciò resta pure dimostrato che:

Se tre punti b_λ, b_ν, b_ρ *della serie costruita, sono tali che la somma degli indici dei due punti estremi è eguale al doppio dell'indice del punto medio, il gruppo* $ab_\nu b_\lambda b_\rho$ *è armonico.*

Viceversa: *se* $ab_\nu b_\lambda b_\rho$ *è un gruppo armonico, deve essere* $\lambda+\rho=2\nu$.

18. — Abbiam visto come, dati i punti ab_0b_1, si costruisce un punto qualsiasi di indice λ, vogliamo ora vedere come si possa *costruire il punto* b_1, *quando si conoscano i punti di* ab_0b_λ.

Pel punto b_0 si tiri una retta qualsiasi e sopra di essa si prendano due punti arbitrarii a', b'_1, e mediante i punti $a'b_0b'_1$, come terna fondamentale, si costruisca il punto b'_λ di indice λ, come nel n. 15. Sia quindi **m** il punto comune alle rette aa', $b_\lambda b_\lambda'$, la proiezione del punto b_1' da **m** sulla retta data, sarà il punto cercato b_1.

Evidentemente il punto b_1 è unico; poichè ogni altra analoga costruzione può ricondursi per proiezione alla precedente.

---

(1) Quantunque questa dimostrazione possa sembrare artifiziosa, è però molto più elementare di quelle riportate dal DE PAOLIS, e dal LINDEMANN nelle opere citate. Il DE PAOLIS per dimostrare questo teorema ricorre alle involuzioni, ed il LINDEMANN per dimostrare il solo caso di $\mu=2$, a cui si limita, ricorre ai sistemi piani prospettivi.

Digitized by Google

Se inoltre sulla retta $\mathbf{a}'\mathbf{b}'_1$ si costruiscono tutti i punti dei valori interi delle variabili, ed in particolare $\mathbf{b}'_{2\lambda}$, $\mathbf{b}'_{3\lambda}\ldots$, e sulla retta data si costruisce il punto coniugato armonico di $\mathbf{b}_0$ rispetto ad $\mathbf{ab}_\lambda$, in esso si proietterà $\mathbf{b}'_{2\lambda}$, ecc.

Premessa questa costruzione, se ora vogliamo che restando fissi i punti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0$ il punto $\mathbf{b}_1$ diventi il μ^{mo} punto della serie, non dobbiamo fare altro che costruire un punto $\mathbf{c}_1$ adeguato, ed allora i punti $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ della serie primitiva diventeranno i punti $\mathbf{c}_{2\mu}$, $\mathbf{c}_{3\mu},\ldots$, e perciò ogni segmento compreso fra due punti consecutivi della nuova serie che si costruirà, sarà la μ^{ma} parte del segmento unità della prima serie. Se invece al punto $\mathbf{b}_1$ si conserva il suo primitivo indice 1, ai punti $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, .. $\mathbf{c}_{\mu-1}$ si dovrà dare un indice μ^{mo} di quello che essi hanno per non alterare il concetto già stabilito della distanza, e quindi essi diventano i punti $\mathbf{b}_{\frac{1}{\mu}}$, $\mathbf{b}_{\frac{2}{\mu}}$, $\mathbf{b}_{\frac{\mu-1}{\mu}}$ della serie primitiva.

La nuova serie che così abbiamo costruita ha i suoi punti riferiti univocamente a tutti i valori frazionarii della variabile numerica di denominatore μ, da $-\infty$ a $+\infty$, e tale che se la differenza fra due valori distinti della variabile va diminuendo, e diventa minima, cioè $\frac{1}{\mu}$, i punti della serie costruita vanno avvicinandosi, cioè va diminuendo fra essi il numero dei punti interposti fino a che fra essi non vi sarà alcun altro punto della serie.

Dato un numero frazionario $\frac{\nu}{\mu}$, *si voglia costruire il punto che gli corrisponde nella serie data* $\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1$.

Per far ciò basta dividere il segmento unità $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ in μ parti eguali e costruire il ν^{mo} punto della nuova serie che si ottiene quando restando fissi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0$, si prende per segmento unità la μ^{ma} parte del segmento unità primitivo.

Potendo estendere queste costruzioni a qualunque valore frazionario, possiamo affermare di aver distesa sulla retta la variabile numerica razionale, cioè di aver stabilita una corrispondenza univoca fra i punti della retta, e i valori interi e frazionarii, positivi e negativi, compreso l' ∞, della variabile numerica: e con la restrizione che, se la differenza fra due valori della variabile va diminuendo indefinitamente, i punti della retta si vanno

Digitized by Google

avvicinando indefinitamente (1); oppure con frase più comune, che, se la differenza tra due valori della variabile diventa indefinitamente piccola, la distanza fra i punti della retta diventerà pure indefinitamente piccola, ed i punti della retta si avvicineranno indefinitamente l'uno all'altro.

19. — Vogliamo ora vedere *che cambiamento subiscono gli indici della serie quando si tenga fisso il punto* $\mathbf{b}_1$ *e si scambino fra loro i punti* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}_0$.

Basterà osservare che indice prenderà un qualunque punto, il quale nella serie $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ abbia un determinato indice λ, che per ora supporremo intero.

Si dimostra nella teoria delle forme proiettive *semplici* coi soli concetti di proiezioni e sezioni che il gruppo $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_\lambda$ è proiettivo al gruppo $\mathbf{b}_0\mathbf{a}\mathbf{b}_\lambda\mathbf{b}_1$. Ciò significa che nello stesso modo con cui nel primo gruppo si costruisce $\mathbf{b}_\lambda$ coi punti fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, nel secondo gruppo si costruisce $\mathbf{b}_1$ mediante i punti fondamentali $\mathbf{b}_0\mathbf{a}\mathbf{b}_\lambda$; cioè nella serie che abbia $\mathbf{b}_0$ per punto infinito, $\mathbf{a}$ per punto zero, è il segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_\lambda$ la λ^{ma} parte del segmento $\mathbf{a}\mathbf{b}_1$; quindi se in questa serie si prende per punto unità anche il punto $\mathbf{b}_1$ il punto $\mathbf{b}_\lambda$ acquisterà l'indice $\frac{1}{\lambda}$.

Si supponga ora che il punto preso ad arbitrio nella prima serie abbia un indice frazionario $\frac{\lambda}{\mu}$; si trasporti il punto 1 da $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_{\frac{1}{\mu}}$, e lo si chiami $\mathbf{c}_1$; con questo i punti $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_{\frac{\lambda}{\mu}}$, saranno nella serie $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{c}_1$ rispettivamente indicati con $\mathbf{c}_\mu$ e $\mathbf{c}_\lambda$. Si scambi ora $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}_0$ rimanendo inalterato $\mathbf{c}_1$, i punti $\mathbf{c}_\mu$, $\mathbf{c}_\lambda$ acquisteranno gl'indici $\mathbf{c}_{\frac{1}{\mu}}$, $\mathbf{c}_{\frac{1}{\lambda}}$: e se infine si trasporta il punto 1 in $\mathbf{c}_{\frac{1}{\mu}}$, cioè in $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_{\frac{1}{\lambda}}$ acquisteranno rispettivamente gl'indici $\mathbf{c}_\mu$, $\mathbf{c}_{\frac{\mu}{\lambda}}$. Dunque:

---

(1) Intendiamo con questa frase di dire che, per ogni valore che si dà al denominatore della variabile frazionaria, sempre che la differenza fra i due valori è divenuta minima, fra i punti non vi è compreso altro punto della serie costruita con quel dato denominatore.

Digitized by Google

Se si scambia, nella serie costruita mediante i punti fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, *il punto* $\mathbf{b}_0$ *col punto* $\mathbf{a}$, *e si rimane inalterato il punto* $\mathbf{b}_1$, *gli elementi della serie rimarranno gli stessi, ma ognuno acquisterà l'indice inverso di quello che aveva prima.*

20. — In questa nuova serie $\mathbf{b}_0\mathbf{a}\mathbf{b}_1$ siano $\mathbf{c}_\nu, \mathbf{c}_\pi, \mathbf{c}_\rho$ tre punti tali che fra i loro indici esista la relazione $\nu + \rho = 2\pi$ (gl'indici possono supporsi anche frazionarii), cioè siano $\mathbf{c}_\nu$, $\mathbf{c}_\rho$ simmetrici rispetto al punto $\mathbf{c}_\pi$; il gruppo $\mathbf{b}_0\mathbf{c}_\pi\mathbf{c}_\nu\mathbf{c}_\rho$ sarà (v. n. 17) armonico; e poichè i punti $\mathbf{c}_\nu\mathbf{c}_\pi\mathbf{c}_\rho$ sono rispettivamente i punti $\mathbf{b}_{\frac{1}{\nu}}\ \mathbf{b}_{\frac{1}{\pi}}\ \mathbf{b}_{\frac{1}{\rho}}$ della serie $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, si ha che pure il gruppo $\mathbf{b}_0\ \mathbf{b}_{\frac{1}{\pi}}\ \mathbf{b}_{\frac{1}{\nu}}\ \mathbf{b}_{\frac{1}{\rho}}$ è armonico; e siccome la reciproca è vera, ed il trasporto della coppia 01 non altera le distanze fra il punto $\mathbf{b}_0$ ed i punti della serie, possiamo enunciare il teorema:

Se quattro punti $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}\mathbf{b}_{\lambda_4}$ *della serie* $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ *sono armonici, fra i loro indici esiste la relazione* $\dfrac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_4 - \lambda_1}$;

e, viceversa, *se fra gli indici di quattro punti della serie* $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, *esiste la relazione suddetta, i quattro punti nell'ordine considerato sono armonici.*

21. — Finora abbiamo costruiti dei punti nella serie quando di essi conoscevamo l'indice intero o frazionario; ora vogliamo esaminare la questione inversa:

Dato sulla retta un punto $\mathbf{p}$, *ed assegnati i tre punti fondamentali* $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, *vogliamo sapere quale indice ad esso corrisponde.*

Se il punto dato $\mathbf{p}$ non coincide con nessuno dei punti di indice intero costruiti mediante i punti $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, sia esso compreso nel segmento $\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$, allora supposta trasportata la coppia $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ (tenendo fisso il punto $\mathbf{a}$) nella coppia $\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$, si divida il segmento di questa coppia in α_1 parti eguali; se il punto $\mathbf{p}$ coincide con la β_1^{ma} divisione del segmento sarà $\nu + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ il suo indice nella serie data. Ma se $\mathbf{p}$ è compreso fra la β_1^{ma} e la $(\beta_1+1)^{ma}$ divisione, si divida ancora questo segmento in α_2 parti eguali; se $\mathbf{p}$ coincide con la β_2^{ma} divisione, sarà $\nu + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} + \dfrac{\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}$ il suo

Digitized by Google

indice, altrimenti si proseguirà allo stesso modo l'operazione. Ciò facendo se una volta si raggiungerà la posizione del punto **p**, il punto avrà per suo indice un numero frazionario, e sarà uno dei punti della serie che si era costruita nel n. 18; ma se però non avverrà mai che si raggiunga la posizione del punto, avremo intanto segnati sulla retta una serie di punti che si vanno avvicinando indefinitamente al punto stesso e quindi nella variabile numerica avremo corrispondentemente una serie di valori frazionarii che soddisfà alle condizioni che abbisognano per avere un limite. In tal caso converremo di assegnare al punto **p** come indice il limite di quella serie di valori frazionarii.

Però la ricerca dell'indice del punto **p** con questo metodo ha troppo dell'arbitrio nella scelta del numero delle parti in cui bisogna dividere il segmento sempre più piccolo in cui si va racchiudendo il punto **p**; in ciò si ha un inconveniente lieve che vogliamo evitare. Ci proponiamo di trovare l'indice del punto **p** sotto forma di frazione continua finita o infinita secondo che il punto **p** appartenga o non alla serie dei punti corrispondenti alla variabile frazionaria, cercando di costruire sulla retta una serie di punti nelle vicinanze del punto **p** che rappresentino le successive ridotte di queste frazioni continue.

Supponiamo dapprima che il punto **p** sia un punto appartenente alla serie della variabile frazionaria, e sia esso compreso nel segmento $\mathbf{b}_\nu \mathbf{b}_{\nu+1}$; il suo indice incognito che noi rappresenteremo con x, possiamo porlo eguale a $\nu + \frac{1}{x_1}$, e con ciò $\frac{1}{x_1}$ rappresenterà la distanza $\mathbf{b}_\nu \mathbf{p}$ riferita al segmento unità $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$ ed al punto infinito **a**. Se si trasporta la coppia $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_\nu \mathbf{b}_{\nu+1}$, nella serie $\mathbf{a b}_\nu \mathbf{b}_{\nu+1}$ il punto **p** avrà per indice $\frac{1}{x_1}$ e se si scambia il punto **a** col punto $\mathbf{b}_\nu$ e si lascia invariato il punto $\mathbf{b}_{\nu+1}$, nella serie $\mathbf{b}_\nu \mathbf{a b}_{\nu+1}$ il punto **p** avrà per indice x_1 (v. n. 19). Si costruiscano i successivi quarti armonici di questa serie e siano $\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \ldots \mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{c}^{\nu}_{1+1}$; e supponiamo che **p** sia compreso fra $\mathbf{c}_{\nu_1}$ e $\mathbf{c}_{\nu_1+1}$; si potrà porre $x_1 = \nu_1 + \frac{1}{x_2}$, e quindi $\frac{1}{x_2}$ indicherà la distanza $\mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{p}$ rispetto al segmento unità $\mathbf{a b}_{\nu+1}$ ed al punto infinito $\mathbf{b}_\nu$. Se si trasporta la coppia $\mathbf{a b}_{\nu+1}$ in $\mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{c}_{\nu_1+1}$, sarà $\frac{1}{x_2}$ l'indice del

Digitized by Google

punto $\mathbf{p}$ nella serie $\mathbf{b}_\nu \mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{c}_{\nu_1+1}$, e quindi sarà x_2 l'indice di $\mathbf{p}$ nella serie $\mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{b}_\nu \mathbf{c}_{\nu_1+1}$. Si costruiscano i quarti armonici successivi di questa serie e siano $\mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 \dots \mathbf{d}_{\nu_2} \mathbf{d}_{\nu_2+1}$, e supponiamo che $\mathbf{p}$ sia compreso fra $\mathbf{d}_{\nu_2} \mathbf{d}_{\nu_2+1}$, si potrà porre il suo indice $x_2 = \nu_2 + \dfrac{1}{x_3}$ ecc., ecc. I punti $\mathbf{b}_\nu, \mathbf{c}_{\nu_1}, \mathbf{d}_{\nu_2}, \mathbf{e}_{\nu_3} \dots$, che si costruiscono successivamente hanno per indici, nella serie $\mathbf{a} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$, rispettivamente i numeri

$$\nu\,, \quad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1}\,, \qquad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2}\,, \qquad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2} \dot{+} \frac{1}{\nu_3}\,, \dots .$$

Con questa costruzione per l'ipotesi fatta, si deve raggiungere il punto $\mathbf{p}$ dopo un numero finito μ di tali operazioni, e quindi il punto $\mathbf{p}$ avrà per indice il valore della frazione continua

$$\nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2} \dot{+} \frac{1}{\nu_3} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{1}{\nu_\mu}\,.$$

Ora questa stessa operazione geometrica (indipendentemente dal suo significato analitico) può farsi per un punto qualunque $\mathbf{p}$ della retta, anche non appartenente alla serie costruita degli indici razionali; in questo caso non si raggiungerà mai il punto $\mathbf{p}$, ma i punti $\mathbf{b}_\nu$, $\mathbf{c}_{\nu_1}$ $\mathbf{d}_{\nu_2}$, $\mathbf{c}_{\nu_3} \dots$ alternandosi da una parte e dall'altra del punto $\mathbf{p}$, si andranno indefinitamente [nota (1) a p. 21], avvicinando ad esso, e quindi il punto $\mathbf{p}$ resta come posizione limite della classe di punti $\mathbf{b}_\nu \mathbf{c}_{\nu_1} \mathbf{d}_{\nu_2} \dots$, allo stesso modo come il valore irrazionale della frazione continua infinita è il limite dei valori delle successive ridotte, onde possiamo assumere come indice del punto $\mathbf{p}$ il valore di questa frazione continua infinita. E quindi deduciamo:

Ogni punto della retta, quando sopra di essa sono fissati i punti $\mathbf{a} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$, *o è un punto della serie* $\mathbf{a} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$ *ed allora il suo indice è un numero frazionario, o è un punto limite di una classe determinata di punti della serie* $\mathbf{a} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$ *ed allora il suo indice è un numero irrazionale rappresentato univocamente da una frazione continua infinita coi numeratori eguali ad uno* (1).

(1) Abbiamo voluto insistere a cercare di mettere l'indice irrazionale sotto forma di frazione continua, oltre che per il vantaggio in se stesso di avere una forma unica sempre possibile a ricercare, anche per dare un' effettiva

Digitized by Google

22. — Viceversa, dato un numero irrazionale qualunque, vi è sulla retta un punto che lo rappresenta?

Post. $(r+5)$.[mo] *Ad ogni numero irrazionale corrisponde sempre sulla retta un punto determinato ed unico*; o in altre parole: *dato un numero irrazionale, sia sotto forma di frazione continua infinita coi numeratori eguali ad uno, sia come limite di due classi di numeri convergenti, e costruiti sulla retta i punti della serie* $\mathbf{ab_0b_1}$ *corrispondenti alle successive ridotte della frazione continua, o ai numeri di quelle classi, esiste sulla retta un punto, ed uno solo, a cui quei punti si avvicinano indefinitamente.*

Il modo stesso col quale si perviene a costruire questo punto mostra che l'indice irrazionale del punto rappresenta pur esso la distanza del punto stesso dal punto $\mathbf{b}_1$ relativamente al segmento unità $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ ed al punto infinito $\mathbf{a}$.

In tal modo è distesa sulla retta tutta la variabile numerica reale, si è cioè stabilita fra i punti della retta e la variabile numerica reale una corrispondenza *univoca* e *continua*, nel senso che se la differenza fra due valori reali razionali o irrazionali della variabile diventa indefinitamente piccola, i punti della retta che a quelli corrispondono si avvicinano indefinitamente fra loro.

Ciò posto indichiamo con $\nu, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma \ldots$ le ridotte successive della frazione continua infinita che rappresenta il numero $\mathbf{p}$, e costruiamo sulla retta i punti che hanno per indici rispettivamente $2\nu_1\ 2\rho_1, 2\rho_2, \ldots 2\rho_\sigma, \ldots$, essi sono coniugati armonici del punto $\mathbf{b}_0$ ordinatamente rispetto alle coppie $\mathbf{ab}_\nu$, $\mathbf{ab}_{\rho_1}$, $\mathbf{ab}_{\rho_2}, \ldots, \mathbf{ab}_{\rho_\sigma}$, o in altre parole, se del gruppo armonico $ab_\nu b_0 b_{2\nu}$ si tengono fissi i due punti non coniugati $\mathbf{ab}_0$, e si fa passare il terzo punto successivamente nelle posizioni $\mathbf{b}_{\rho_1}, \mathbf{b}_{\rho_2}, \ldots, \mathbf{b}_{\rho_\sigma}$ il quarto punto passerà rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{b}_{2\rho_1}, \mathbf{b}_{2\rho_2}, \ldots \mathbf{b}_{2\rho_\sigma}$, e poichè le classi di numeri

$$\nu,\ 2\rho_2,\ 2\rho_4,\ 2\rho_6 \ldots, \qquad 2\rho_1,\ 2\rho_3,\ 2\rho_5 \ldots$$

rappresentano il punto $\mathbf{p}_1$ di indice irrazionale doppio di quello del punto $\mathbf{p}$, anche il gruppo $\mathbf{apb_0p_1}$ è armonico.

costruzione a molte proposizioni contenute nei noti lavori di G. CANTOR (v. *Acta Math.*, vol. II). Ed è evidente che in tal modo noi possiamo rappresentare sulla retta tutte le grandezze numeriche di 2ª, 3ª .. νª specie, di cui fa parola il CANTOR (v. p. 337).

Digitized by Google

Così continuando si ritrova che i teoremi dei n[i]. 18, 19 e 20 dimostrati per punti d'indici frazionarii della serie $\mathbf{ab_0b_1}$ valgono pure per i punti di indici irrazionali, e ciò permette di conchiudere:

Se due forme proiettive semplici sovrapposte hanno tre elementi omologhi uniti, tutti i rimanenti elementi sono uniti.

§ 3.

Birapporto, elementi immaginarii ed equazioni.

23. — Chiameremo *birapporto* di quattro punti $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}\mathbf{b}_{\lambda_4}$ (dove λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono valori qualunque della variabile numerica razionale ed irrazionale) l'espressione numerica

$$\lambda' = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} : \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}$$

formata mediante gli indici dei quattro punti dati, e che indicheremo al solito col simbolo $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$.

Se i punti presi sulla retta sono $\mathbf{ab_0b_1b_\lambda}$, il birapporto di essi è eguale a λ; cosicchè l'indice che noi abbiamo assegnato ad ogni punto rappresenta pure il birapporto di questo punto in ordine ai tre punti fondamentali $\mathbf{ab_0b_1}$, e per tal motivo d'ora in poi chiameremo *birapporto* o *parametro* l'indice numerico del punto.

Il punto della retta che abbiamo come quarto armonico in ordine ai punti $\mathbf{ab_0b_1}$ è il punto $\mathbf{b}_{-1}$, quindi il birapporto di questi quattro punti armonici è -1; e quindi anche eguale a -1 è il birapporto di ogni gruppo armonico del tipo $\mathbf{ab}_{n-r}\mathbf{b}_n\mathbf{b}_{n+r}$. Ma l'importante è che *se mediante tre punti* $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}$ *si costruisce il quarto armonico* $\mathbf{b}_{\lambda_4}$ *il birapporto dei punti* $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}\mathbf{b}_{\lambda_4}$ *è sempre eguale a* -1. Difatti, trasportando il punto zero in $\mathbf{b}_{\lambda_1}$ ed il punto $\mathbf{b}_1$ nel punto $\mathbf{b}_{\lambda_1+1}$, i parametri degli altri tre punti saranno rispettivamente $\lambda_2-\lambda_1$, $\lambda_3-\lambda_1$, $\lambda_4-\lambda_1$; se ora si scambia il punto 0 col punto ∞, e si lascia invariato il punto 1, i parametri di quei tre punti diventano $\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}$. Ma

Digitized by Google

essi sono armonici in ordine a $\mathbf{b}_\lambda$, che ora è il punto infinito, dunque, pel teorema 20, deve avverarsi la relazione:

$$\frac{2}{\lambda_3-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}, \text{ ovvero } \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}=-1.$$

Viceversa, *se quattro punti presi ad arbitrio nella serie* $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ *hanno per birapporto* -1 *essi sono armonici in quell'ordine considerato.*

24. — Questo teorema rientra nell'altro più generale: *Il birapporto di quattro punti della retta rimane inalterato qualunque sia la terna di punti della retta che si assume come terna fondamentale.* Infatti, il cambiamento di uno o due dei punti fondamentali fa subire ai parametri dei punti le trasformazioni $\lambda+h$, $h\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$; quindi il cambiamento della terna fondamentale fa subire ai parametri di ciascun punto la più generale trasformazione lineare e perciò il *birapporto di quattro punti è invariantivo.*

Oppure, supposto che in una data retta siano assegnate due terne di elementi fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ ed $\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1$ ed un elemento qualunque $\mathbf{m}$ abbia il parametro λ rispetto alla terna fondamentale $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, e λ' rispetto alla terna $\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1$, si dimostrerebbe al modo solito che $\lambda\lambda'$ sono legati dalla relazione

$$\lambda\lambda'-(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}')\lambda'-(\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1\mathbf{a})\lambda-(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}'_0)(\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1\mathbf{a})=0$$

che si riduce all'altra

$$\lambda'=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}, \tag{1}$$

e quindi se $\mathbf{mnpq}$ sono quattro punti della retta, sarà il loro birapporto rispetto ai punti fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ uguale al birapporto degli stessi punti rispetto ai punti fondamentali $\mathbf{a}'\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_1'$.

Se invece i valori λ e λ' rappresentano i parametri di due punti, in generale distinti, riferiti alla medesima terna fondamentale $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, la relazione precedente stabilisce una corrispondenza univoca fra i punti della retta, tale che il birapporto di quattro punti arbitrarii $\mathbf{mnpq}$ è eguale al birapporto dei quattro punti

Digitized by Google

m'n'p'q' che ad essi corrispondono, ed in particolare che a quattro punti armonici corrispondono quattro punti armonici; quindi la corrispondenza rappresentata dalla relazione (1 è *proiettiva*.

25. — Possiamo ora introdurre per rappresentare i punti della retta le coordinate omogenee, porre cioè $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$; ed allora ogni punto invece di essere rappresentato da un solo parametro sarà rappresentato dai valori proporzionali alle due coordinate x_1, x_2, le quali per mezzo della relazione $(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{c}\mathbf{m})}{(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{c}\mathbf{b}_1)}$ possono anche essere interpretate come birapporto dei punti **m**, $\mathbf{b}_1$ rispetto ad una terna fondamentale che ha lo stesso zero, e lo stesso infinito, ed ha un altro arbitrario punto unità.

Le coordinate dei punti fondamentali **a**, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$ potranno essere in tal caso (1,0) (0,1), (1,1); ogni punto della retta sarà rappresentato da una equazione omogenea di 1° grado $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e la relazione di proiettività si trasformerà nel sistema di equazioni

$$\rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

con la condizione che il determinante del sistema debba essere diverso da zero.

È quasi inutile avvertire che tutto ciò che abbiamo detto per la retta vale anche per qualunque forma semplice, e che la proiettività che si è stabilita per due forme sovrapposte vale anche per due forme distinte.

26. — Resterebbe a far vedere come si possano rappresentare sulla retta i punti che hanno per indici i valori immaginarii della variabile numerica; ma non crediamo opportuno di fermarci su questo punto; basterà far notare che tali punti li consideriamo *come punti uniti di infinite proiettività di un fascio* (v. *Omografie binarie*, 2ª ed., Napoli, 1889) *e quindi di una sola involuzione ellittica*.

E con questo abbiamo distesa sulla retta e quindi sopra ogni forma semplice (v. n. 16) tutta la variabile numerica reale ed immaginaria.

Digitized by Google

27. — Chiameremo *piramide* di un S_r la figura formata da $r+1$ punti indipendenti (*vertici*) e da tutti gli $\binom{r+1}{2} S_1$, $\binom{r+1}{3} S_2$ $\binom{r+1}{4} S_4, \ldots, \binom{r+1}{r} S_{r-1}$ che congiungono questi punti a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4,... ad r ad r; gli S_{r-1} si diranno *facce* della piramide; un vertice ed una faccia della piramide si diranno *opposti* quando essi non si appartengono.

Siano dati, nello S_r, $r+1$ punti indipendenti $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, che diremo *fondamentali*, un punto $\mathbf{u}$, che non appartenga a nessuna delle facce della piramide costituita dai punti fondamentali, ed un punto arbitrario $\mathbf{m}$. Se indichiamo con $\mathbf{0}', \mathbf{1}', \mathbf{2}', \ldots \mathbf{r}'$ le facce della piramide, opposte rispettivamente ai punti fondamentali $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, e con $\mathbf{0}'\mathbf{1}'$, $\mathbf{1}'\mathbf{2}'$, ecc., gli S_{r-2} secondo i quali si segano gli S_{r-1} $\mathbf{0}'$ e $\mathbf{1}'$, $\mathbf{1}'$ e $\mathbf{2}'$, ecc., sarà $\mathbf{1}'\mathbf{0}'$ l'S_{r-2} individuato da tutti i vertici della piramide esclusi i vertici $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, cioè dai vertici $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \ldots \mathbf{a}_r$; ecc.

Proiettando dall'S_{r-2} $\mathbf{1}'\mathbf{0}'$ i punti $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}$ si determina un fascio di S_{r-1}, nel quale i quattro S_{r-1} proiettanti individuano un birapporto, che non varia qualunque sia la terna fondamentale del fascio a cui ci vogliamo riferire, e che si potrà ottenere, p. es., prendendo come S_{r-1} ∞, 0, 1 rispettivamente quelli che passano per $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{u}$. Indicando questo birapporto in coordinate omogenee con $\frac{x_1}{x_0}$ avremo

$$\mathbf{0}'\mathbf{1}'(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_1}{x_0},$$

ed analogamente

$$\mathbf{0}'\mathbf{2}'(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_2}{x_0}, \quad \mathbf{0}'\mathbf{3}'(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_3}{x_0}, \ldots, \quad \mathbf{0}'\mathbf{r}'(\mathbf{a}_r\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_r}{x_0}.$$

Mediante questi r birapporti restano determinati tutti gli altri birapporti che si otterrebbero se da ogni altro S_{r-2} $\mathbf{i}'\mathbf{k}'$ si proiettano i rimanenti vertici $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_i$ ed i punti $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$. Difatti, se con la retta $\mathbf{u}\mathbf{m}$ si sezionano i tre fasci $\mathbf{0}'\mathbf{i}'(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m})$, $\mathbf{0}'\mathbf{k}'(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m})$, $\mathbf{i}'\mathbf{k}'(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_k\mathbf{u}\mathbf{m})$, si otterranno sulla retta tre tetradi di punti, che possiamo indicare con $\mathbf{i}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, $\mathbf{k}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, $\mathbf{i}_1\mathbf{k}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, e si ha

$$(\mathbf{i}_1\mathbf{k}_1\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{i}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m})}{(\mathbf{k}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m})} = \frac{x_i}{x_k}.$$

Digitized by Google

Di modo che, dato il punto **m** restano individuati gli $\binom{r+1}{2}$ birapporti, dei quali però **r** solamente sono indipendenti, e gli altri $\binom{r}{2}$ si ottengono da essi facendo i rapporti di questi a 2 a 2. Viceversa, dati gli r birapporti indipendenti sono individuati r S_{r-1} indipendenti, che individuano nella loro intersezione il punto **m**.

Siccome dato il punto sono individuati gli r birapporti, cioè è univocamente individuato un gruppo di r valori della variabile numerica, e dati gli r birapporti resta individuato un unico punto dello S_r, resta stabilita fra i punti dello S_r e i gruppi di r valori della variabile numerica una corrispondenza univoca.

Se gli r birapporti indipendenti sono dati sotto forma omogenea, si determinano, a meno di un fattore di proporzionalità, $r+1$ valori x_0, x_1, $x_2 \dots x_r$ tutti finiti, e che non possono essere tutti nulli, che si possono assumere come coordinate omogenee dei punti dello S_r.

In particolare, se il punto **m** coincide col punto **u**, tutte le coordinate sono eguali fra loro, e quindi possono prendersi tutte eguali ad uno, per cui **u** si chiama *punto unità* dello S_r; se il punto **m** coincide con uno dei vertici della piramide fondamentale, saranno nulle tutte le coordinate omogenee, eccetto quella di indice eguale all'indice del punto, che si può assumere eguale ad uno; ed infine tutti i punti che stanno in una faccia della piramide fondamentale sono caratterizzati dall'avere eguale a zero la coordinata di indice eguale a quello della faccia stessa. Inoltre ogni raggio $\mathbf{a}_r\mathbf{m}$ che congiunge il punto fondamentale $\mathbf{a}_r$ al punto **m**, considerato nella stella di centro $\mathbf{a}_r$, è determinato da r coordinate x_0, $x_1, \dots x_i$, $x_{i+1}, \dots x_{r-1}$, che sono le stesse coordinate che individuano il punto **m** nello S_{r-1} $\mathbf{r}'$.

28. — È facile dalle cose precedenti ricavare l'equazione della retta nel piano, e le equazioni della proiettività fra due piani, e così di seguito. Noi ora supporremo di aver dimostrato diggià che in una varietà ad $r-1$ dimensioni un S_{r-2} sia rappresentato da una equazione lineare

$$\Sigma a_i x_i = 0 \qquad (i=0,\ 1,\ \dots,\ r-1)$$

Digitized by Google

e che la proiettività fra due varietà lineari ad $r-1$ dimensioni sia rappresentata da un sistema di equazioni del tipo

$$\rho x'_i = \Sigma a_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r-1)$$

e dimostreremo che anche nella varietà lineare S_r un S_{r-1} è rappresentato da una equazione omogenea lineare fra le coordinate $x_0, x_1, \ldots x_r$, ed allora essendo il teorema dimostrato per l'S_1 e per l'S_2, vale per l'$S_3 \ldots$, quindi vale sempre.

Sia **P** un S_{r-1} contenuto nello S_r; se consideriamo come omologhi, nelle stelle che hanno per vertici fondamentali i punti $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{1}_1$, i raggi che proiettano uno stesso S_0 di **P**, si avranno due stelle fra loro prospettive. I raggi della prima stella hanno per coordinate $x_1 x_2 \ldots x_r$, quelli della seconda hanno per coordinate $x_0, x_2, \ldots x_r$, qualora si prendano in ciascuna di esse per raggi fondamentali e per raggio unità quelli che proiettano i rimanenti punti fondamentali ed il punto unità dello S_r.

Per la proiettività esistente fra le due rette si avranno le equazioni

$$\begin{aligned}
\rho x_0 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r \\
\rho x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2r} x_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\rho x_r &= a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rr} x_r
\end{aligned}$$

ma esse hanno per elementi uniti il raggio $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, e tutti gli $S_2 \ldots S_{r-1}$ che passano per esso; dunque le precedenti equazioni si riducono alla forma:

$$\begin{aligned}
\rho x_0 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r \\
\rho x_2 &= a_{22} x_2 \\
&\ldots\ldots \\
\rho x_r &= a_{rr} x_r .
\end{aligned}$$

Di modo che le coordinate di ogni punto dello S_{r-1} **P** soddisfanno ad una equazione lineare del tipo

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r = 0 .$$

Viceversa, ogni equazione lineare omogenea fra le coordi-

Digitized by Google

nate x_0, x_1, .., x_r di un punto dello S_r determina nelle stelle di centro $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ una omografia rappresentata dalle equazioni

$$a_0 x_0 = -(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r)$$
$$a_0 x_2 = a_0 x_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_0 x_r = a_0 x_r$$

e quindi è una prospettività, e perciò i punti che soddisfanno a quella equazione appartengono ad uno S_{r-1}.

Torino, Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Giugno 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, Vice Presidente, FLECHIA, Direttore, PEYRON f. f. di Segretario, CLARETTA, PEZZI, FERRERO, CARLE, NANI, COGNETTI DE MARTIIS, BOSELLI e CIPOLLA.

Il Socio PEYRON legge l'atto verbale dell'adunanza antecedente, il quale è approvato.

Alle parole di rimpianto per la morte del Segretario perpetuo, Senatore GORRESIO, pronunciate dal Presidente nell'adunanza delle Classi Unite del 24 maggio, altre ne aggiunge il Socio PEYRON, che per lunghi anni fu in relazione amichevole con l'illustre estinto, e per un tempo pure non breve fu addetto alla Biblioteca Nazionale, di cui il Gorresio tenne l'ufficio di prefetto.

Il Presidente comunica quindi una lettera del Maggiore Cav. Gaspare Galliano, nipote del Socio Gorresio, con la quale fa dono all'Accademia di un busto dell'illustre suo zio. La Classe accoglie con vivo gradimento la gentile offerta.

Il Presidente, a nome dell'Autore, S. E. il Conte Costantino NIGRA, Socio corrispondente dell'Accademia, offre il volume: « *La chioma di Berenice col testo latino di Catullo riscontrato sui codici*; *Traduzione e commento* (Milano. 1891) ».

Digitized by Google

Il Socio Claretta legge una sua Nota: « *Gli Alfieri di Asti ed il vescovo Baldracco di Malabaila* (1349-1355) ».

Il Socio Cipolla legge una sua Nota: « *Sull'itinerario di Corrado II nella sua discesa in Italia nell'anno* 1026 ».

Questi lavori dei Soci Claretta e Cipolla sono inseriti negli *Atti*.

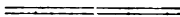
Lo stesso Socio Cipolla dà lettura di un altro suo lavoro intitolato: « *Di Rozone vescovo di Asti e di alcuni documenti inediti che lo concernono* ».

Essendo questo lavoro destinato ai volumi delle *Memorie*, la Classe procede alla votazione per la stampa, approvata all'unanimità.

Il Socio Fabretti legge la Relazione della Commissione, di cui è stato chiamato a far parte coi Soci Flechia e Pezzi, con l'incarico di esaminare il lavoro presentato dal Socio corrispondente, Professore Elia Lattes, per l'inserzione nelle *Memorie*, che ha per titolo: « *La grande epigrafe etrusca del cippo di Perugia tradotta ed illustrata* ».

La Relazione (che è stampata negli *Atti*) conchiude per la lettura del lavoro alla Classe, la quale accoglie tale conclusione, e udita la lettura del lavoro, ne approva la pubblicazione nelle *Memorie*.

La Classe procede all'elezione del proprio Segretario, e riesce eletto, salvo l'approvazione Sovrana, il Socio Ferrero.

Digitized by Google

LETTURE

Gli Alfieri e il vescovo d'Asti Baldracco Malabaila 1349-1354;

Nota storica del Socio GAUDENZIO CLARETTA

Se vi è stirpe la quale dal nome suo stesso marziale possa avere redato forza e vigoria, certo si è quella degli Alfieri astigiani. È noto come nelle repubbliche italiane il portare lo stendardo del Comune, del pari che lo appartenere a quei pochi, ai quali era affidato il geloso incarico di custodire quel palladio di libertà chiamato il Carroccio, tenevansi ufficio di singolare onoranza. E come i Confalonieri e i Carrocci, gli Alfieri verosimilmente trasmisero ai loro discendenti il nome dell'ambito uffizio di *signifer* avuto sino da età remota.

Già sin dal secolo duodecimo essi appartenevano alla società d'Ospizio, e negli archivi della famiglia si accenna come uomo prestante un Guala Alfieri che fiorì intorno al 1178, nome che vedremo fra poco corrottamente adoperato da un suo discendente.

Alla guisa delle altre famiglie astigiane degli Scarampi, Solari, Asinari, Guttuari, Roero, ecc., tennero pure gli Alfieri le casane de' cambi, e cogli altri compaesani migrarono qua e là in parecchie regioni oltramontane dove furono confusi nella denominazione generale conosciuta di Lombardi. È saputo come fu intorno al 1226 che gli Astigiani cominciarono a prestare *et facere usuras in Francia et ultramontanis partibus ubi multam pecuniam lucrati sunt;* locchè ci lasciò appunto il loro cronista Ogerio Alfieri.

Ma a differenza delle anzidette famiglie ch'ebbero signoria su moltissimi feudi, quella degli Alfieri fu limitata a tre o quattro al più, ma un di questi da loro denominossi Castellalfero. Anche però senza aver avuti molti feudi cessò la famiglia di essere meno potente; e al pari di quelle altre case diede alla patria magistrati, condottieri, ambasciatori e specchiati consiglieri.

Digitized by Google

Se non che, non trattandosi qui di lusingare alcuna vanità dinastica, ci asteniamo dall'addentrarci in codesti particolari, e ne basterà per il nostro tema accennare ad uno dei feudi avuti dagli Alfieri, qual si è Magliano, ridente castello che s'innalza su di ameno poggio a manca del Tanaro, or nel circondario d'Alba, ma nel secolo XIII feudo semovente dal vescovado d'Asti. Il qual vescovado, uno dei più doviziosi, se non aveva propriamente il contado d'Asti, dominava su molte castella nell'Astigiano e nelle regioni finitime, e godeva di ambiti privilegi concessigli da papi, imperatori e regi. Quindi, e possessi allodiali, e possedimenti feudali, diritti, giurisdizioni, decime, servi, livellari largamente appartenevano alla Mensa di Asti.

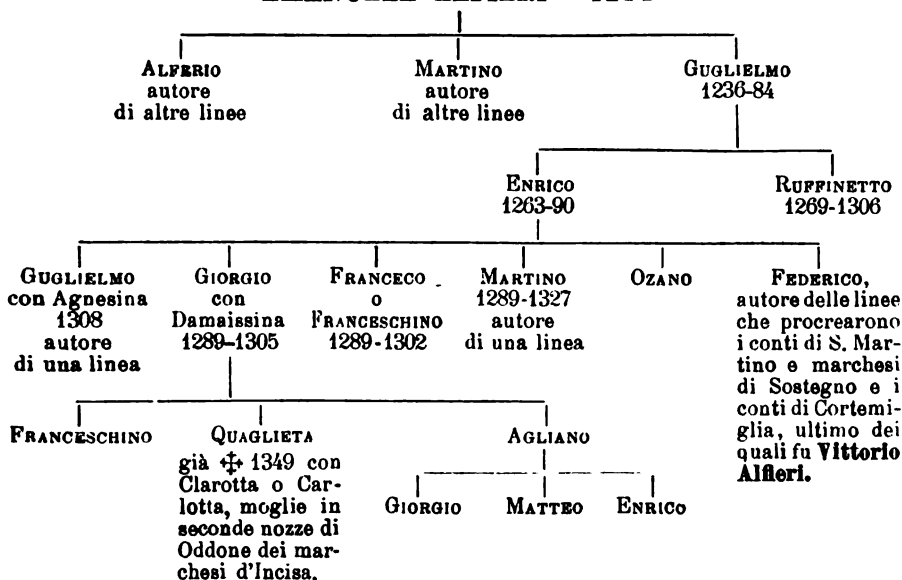
Gli Alfieri non furono però i primi feudatari di Magliano, ch'ebbe signori suoi propri, i quali all'esempio di molti altri, come i Piossasco, i Romagnano, i Morozzo, ecc. dal loro feudo tolsero il nome.

L'acquisto di tre parti di Magliano seguì il 9 marzo del 1240 *in palacio Govoni* nella persona di Guglielmo e di Alferio degli Alfieri suo fratello, ch'ebbelo in feudo gentile e retto: cosichè il fratello dovesse succedere al fratello, pel prezzo di 750 lire astesi, e che acquistò da Oberto, figlio di Jacopo Rossi da Rocha, ricevendone tosto investitura dal signore diretto, ch'era il vescovo.

Quell'acquisto veniva accresciuto da altri parziali, che furono poi confermati con Bolla del papa Innocenzo IV.

Ma lasciamo i successori di questi primi acquisitori godersi per lo spazio quasi di un secolo, il loro feudo, più o meno pacificamente, siccome poteva consentirlo la condizione di quei *beati* tempi, così battaglieri ed insidiosi, in cui il vicino guardava in cagnesco il vicino, ed aspettava sempre il bel destro o la menoma occasione che se gli porgesse per nuocergli e vantaggiarsene. Veniamo adunque alla metà del secolo XIV, epoca alla quale si riferiscono i documenti che or vedranno la luce. Premettiamo solamente pochi cenni genealogici a maggior intelligenza della narrazione. Da un Guglielmo Alfieri, che può essere benissimo l'accennato acquisitore di Magliano, conciliandosi ogni data cronologica a riguardo di lui, sarebbe nato un Enrico, ch'ebbe cinque figli. Un di costoro, di nome Giorgio, fu padre di Franceschino, Agliano e Gualleta, o come ripetutamente dicono i documenti, Quaglieta, corruzione a quanto pare del Guala o Gualeta di cui sovra. E

Digitized by Google

meglio ancora se ne vede la discendenza da questo specchietto genealogico.

Sebbene ammogliato con una tale Clarotta o Carlotta, il Quaglieta morto senza discendenti, aveva tuttavia istituito erede delle sue sostanze il vescovo d'Asti Arnaldo di Roseto, il quale già giudizialmente aveva fatto convenire gli eredi Alfieri ritentori di quei beni, a dismetterli, ma a quanto pare senza resultamento di sorta. Morto quel vescovo, succedevagli Baldracco, dell'illustre prosapia dei Malabaila, e figlio di Franceschino o Francescotto signore di Castellinaldo, Pocapaglia e Monticelli, di cui l'imparziale monsignore della Chiesa scrisse che .... *se totum ad dominia iuraque episcopalia conservanda convertens omnes subditos et vassallos ad praediorum functionumque clientelarium professionem adegit.* Imparziale però nella sua missione, come tolse a molti feudatari le loro terre illegittimamente acquistate, così vuolsi abbia levato allo stesso suo padre il feudo anzi accennato di Monticelli. Fu parte, grazie a codesta sua propensione, che, come tosto soggiunge l'or citato autore, *codicem investiturarum qui vulgo viridi appellatur et in archivio episcopali asservatur conscribi fecit.* I lettori sanno che trattasi qui del famoso libro

Digitized by Google

verde d'Asti, che originale si conserva presso l'archivio di Stato, e di cui qua e là si hanno alcune copie.

Se adunque il vescovo Baldracco Malabaila dimostrossi zelante nell'accrescere il temporale della sua diocesi, tanto più non doveva lasciare pregiudicata a suo danno la quistione del retaggio dell'Alfieri, al quale in sostanza aveva diritto in forza di una speciale disposizione del defunto. Quindi zenz'altro egli fece sapere agli eredi Alfieri, Agliano e Guglielmo, quegli fratello, questi padre del Quaglieta, la risoluzione presa di voler adire l'eredità legatagli. A tal uopo con lettere date dal Castello di Bene il ventisette settembre del 1349 (1) avvisavali della missione di un

(1) In nomine Domini amen anno a nativitate eiusdem millesimo trecentesimo quadragesimo nono indictione secunda die tercio mensis octobris in mei notarii presencia et testium subscriptorum vocatorum et rogatorum accedentibus personaliter in loco Maglani episcopatus Astensis ante portas castri ipsius loci Obertino de Cella procuratore reverendi in Xrispo patris et domini domini Baudrachi Dei et apostolice sedis gratia episcopi Astensis una cum notario et testibus infrascriptis ac Iacobo Conzia filio Guillelmi Conzia quondam nuncio curie episcopalis astensis litteris dicti domini episcopi secum habente, quarum inicio tenor talis est. Baudrachus Dei et apostolicae sedis gratia episcopus Astensis nobilibus viris Aliano Alferio nec non Georgio eius filio et fratribus suis salutem in Domino. Dudum bone memorie reverendus in Xrispo pater dominus Arnaldus Dei et apostolicae sedis gratia episcopus astensis predecessor noster secutus formam testamenti Quaglete Alferii condam ipsius hereditatem cum omnibus iuribus et pertinentiis suis tam feudalibus quam non feudalibus post resignationem agnatorum dicto Quaglete factam in iudicio de dicta hereditate acceptauerit et possessionem predicte hereditatis per quemdam nuncium fuerit adepta etc. et sequitur in eisdem. Et ideo cum nostrum procuratorem constituerimus nobilem virum Obertinum de Cella de Parma ad possessionem per predecessorem nostrum apreheusam gubernandam et tuendam etc vos et quemlibet vestrorum tenore presencium requirimus et monemus uno fratribus et peremptorie ac sub pena excomunicationis et privationis feudi vobis et cuilibet vestrorum districte percipiendo mandamus quatenus dictum Obertinum procuratorem nostrum non turbetis inquietetis uel molestetis in posterum et iuribus dicte hereditatis, sed ipsum sinatis nostro nomine et Astensis ecclesie pacifica possessione gaudere, et eidem procuratori nostro etc. Et circa finem sic Alias si mandatorum nostrorum fueritis contemptores quod absit, quatenus vos et quemlibet vestrorum procedemus iustitia mediante has autem litteras in actis nostre curie fecimus registrari. Date in castro nostro Baennarum die vicesima septima septembris secunde indictionis prout in dictis actis plenius continetur. Et dictus nunc ex parte dicti domini episcopi ipsis litteras presentasset et tradidisset dicto Aliano Alferio presente et recipiente ipsis prius lectis et vulgarizatis per me notarium infrascriptum ad ipsius Aliani intelligenciam

Digitized by Google

suo rappresentante, nominato nella persona del parmigiano Obertino di Cella, a prendere quel possesso, colla minaccia ben inteso della scomunica nel caso essi eredi vi facessero opposizione

Il legato Obertino di Cella senz'indugio accingevasi a compiere la sua malagevole missione presso i luoghi dove erano posti i possedimenti del Quaglieta Alfieri, cioè a Magliano e nella città d'Asti.

Cominciamo da Magliano, dove recavasi il tre del successivo ottobre, accompagnato dal messo della Curia d'Asti; e vedremo tosto che il povero legato, anzichè aver seco un inerme nunzio curiale avrebbe dovuto associarsi a quella semplice impresa, tutt'altro che piana e facile a quei giorni, dei bravi e buoni scherani. Quindi è che, allorquando dopo la faticosa salita dell'erto colle su cui s'aderge Magliano, fu presso il ponte levatoio a la porta di quel castello, trovò bensì l'Agliano Alfieri, fratello del defunto della cui eredità si trattava, ed al quale spiegò in volgare il contenuto del precetto vescovile, tuttoche scritto in latino notariale, ma ben poco disposto a' suoi cenni; imperocchè per quanto fos-

ibidem et in presenti et dicto et preposito ipsi Aliano per dictum Iacobum Conzia nuncium et me notarium infrascriptum quod obtemperari curaret mandatis dicti domini episcopi et sibi de pena ipsis inclusa litteris precauere dictus Alianus Alferius demum recedens versus castrum contra dictum Obertinum de Cella procuratoris nomine dicti domini episcopi ab ipso Aliano tunc postulantem et querentem si volebat seu intendebat ipsum Obertinum ut procuratorem dicti domini episcopi sinere possessione pacifica gaudere, et eam attingere bonorum et iurium hereditatis dicti quondam Quaglete Alferii se opposuit dicens quod si dictus Obertinus intraret castrum dicti loci ubi erat quedam domina asserta dicti quondam Quaglete quod erat contra eius voluntatem et quod iam non attingeret possessionem dominii nec bonorum assertorum fuisse quondam dicti Quaglete, que se dicebat dictus Alianus tenere et possidere faciens inde demum quemdam actum illicitum in predictis. Que quidem sic dicta et facta per dictum Alianum dictus Obertinus procuratoris nomine dicti domini episcopi reputavit et inopportunum et contrarium tenute et possessioni pacifice rerum et bonorum dicti quondam Quaglete precipiens inde nomine dicti domini episcopi fieri per me notarium publicum instrumentum. Actum in loco Maglani iuxta pontem et ante portas castri dicti loci presentibus testibus in principio domino Leone Alferio iurisperito Iacobino de Mercenasco Iacobo Guischa notario de Castagnolis filio Raymondi Guischae et Omnibono de Ferraria dicto conestabile.

Ego Andreas Pilius clericus astensis imperiali auctoritate notarius prefatis omnibus interfui et sic illa precepi a partibus ea dicentibus et facientibus sic traddam et scripsi sicut opus fuerit de iure sapientis dictamine emendanda et ideo signum meum apposui consuetum et me subscripsi (*Archivio di Stato* - Carte della provincia d'Asti.

Digitized by Google

sevi la minaccia della pena della scomunica ove non avesse voluto ottemperarvi, l'Agliano senz'altro risposegli, che se mai per caso egli si fosse preso l'arbitrio di mettere piè in quel castello, ove stava *quaedam domina asserta dicti quondam Quaglete*, vi si sarebbe a tutta forza opposto, essendo ciò contra il suo volere, epperciò l'avrebbe assolutamente impedito.

Non c'era a ridire al cospetto di chi con torvo sguardo e con poche, tronche, ma decisive parole cominciava a braveggiare, come indirettamente si può scorgere dal documento stesso, *faciens inde demum quemdam actum illicitum in predictis*: parole velate da mistero, e che ci fanno supporre qualche violenza od almeno una minaccia. Quindi il legato guardandosi attorno, e scorgendo l'erta su cui egli stava, e così affatto in potere altrui, pensò essere più prudente di astenersi da ulteriore azione, e limitarsi alla protesta, stesa dal notaio Andrea Pilio d'Asti alla presenza di parecchi testimoni.

Rifacendo quindi su magri ronzini e per le pessime strade di quei tempi il cammino fatto poche ore prima, l'Obertino da Cella ritornava in Asti per compiere il quattordici di quel mese la seconda parte della sua scabrosa missione.

Con quel battito di cuore facile ad immaginarsi, il nostro parmigiano recavasi in quel giorno alla temuta soglia della magione degli Alfieri, dove dimorava il Giorgio padre dell'Agliano Alfieri, che come abbiamo or veduto, l'aveva così poco garbatamente ricevuto al suo maniero. Ma peggio ancora fu qui, poichè tostochè ebbe udita la spiegazione in volgare di quella lettera vescovile, il Giorgio, inalberatosi, disse senz'altro « Ser gentiluomo *Ego non habeo facere aliquid vobiscum: si dominus episcopus habet mihi petere aliquid, petat, quia iuris stabo et faciam que debebo de iure.* Il dabben legato cominciò qui ad inarcar le ciglia, e fattosi piccino provò a replicare sommessamente *Ego sum procurator domini episcopi, et sicut procurator domini episcopi hoc a te peto.*

Credereste voi che a codeste parole, le quali facendo cadere tutta la malleveria, e se vuoi anche, odiosità dell'atto sulla persona del vescovo, e che sempre più tendevano a far rilevare l'oratore come semplice mandatario, siasi mitigato il fiero sire? Ohibò! Anzi rivoltosi tostamente all'Obertino, con maggior rudezza e senza tante cerimonie dissegli minacciosamente « *Vultis dicam vobis Obertine de Cella? Si accederitis, seu intraveritis possessionem*

Digitized by Google

seu supra possessionem quam ego teneam vel provideam et non eritis ibi forciores mei vos reddire faciam cum capite fracto seu insanguinato vel ego quidem » (1).

---

(1) In nomine Domini amen anno natiuitate eiusdem millesimo trecentesimo quadragesimo nono indictione secunda die decimaquarta mensis octobris in presencia mei notarii et testium subscriptorum. Quoniam accessi ad presenciam Georgii Alferii apud domum habitationis ipsius ubi erat ipse Georgius et Obertinus de Cella procurator reverendi in Xrispi patri domini Baudrachi dei et apostolice sedis gracia episcopi Astensis et ipsi Georgio lectis per exemplum litteris dicti domini episcopi sibi et patri ac fratribus suis directis quarum data est in castro Baennarum die vigesima septima septembris secunde indictionis, et quarum tenor incipit sic. Baudrachus Dei et apostolice sedis gratia episcopus astensis nobilibus viris Aliano Alferio necnon Georgio eius filio et fratribus suis salutem in domino. Dudum memorie etc. et finiunt. At si mandatorum nostrorum fueritis contemptores, quod absit, quatenus vos et quemlibet vestrorum precedentium iustitia mediante, has autem etc. dictarum litterarum et ipsis talibus litteris et mandamento ac eciam requisicione dicti Obertini de Cella procuratoris nomine dicti domini episcopi semel et plus responso per dictum Georgium Alferium prout et sicut in instrumento inde per me notarium suprascriptnm abreuiato statim eodem anno indictione die et hora plenius continetur. Ecce statim continue post dictum instrumentum in predictum Georgium de sua censione primo precepto quod dictus Obertinus de Cella procurator dicti domini episcopi de ipsa prima bensione nundum contentus iterum dixit et queriit in instanti a dicto Georgio Alferii presente et audiente si intendebat et volebat sinere ipsum Obertinum procuratoris nomine dicti domini episcopi pacifice possessione gaudere et attingere bonorum que tenebat et possidebat. Quagleta Alferius tempore seu die mortis sue et dictus Georgius tunc semel respondit et dixit ipsi Obertino « *Ser gentilhuomo* Ego non habeo facere ali- « quid vobiscum: si dominus episcopus habet mihi petere aliquid petat « quia iuris stabo, et faciam que debebo de iure » et dictus Obertinus tunc dixit eidem: Georgio. « Ego sum procurator domini episcopi, et sicut pro- « curator domini episcopi hoc a te peto » Deinde dictus Georgius dixit una vice sic... « vultis dicam vobis Obertine de Cella si ascenderitis seu intraue- « ritis possessionem seu super possessionem quam ego teneam vel provideam « ut dicebas et non eritis ibi forciores mei, vos reddire faciam cum capite « fracto seu sanguinato vel ego quoque reddibo » ut ita mihi videtur quod dixerit: que quidem sic per dictum Georgium semel dicta reputavit tunc semel dictus Obertinus proximus sibi factus per ipsum Georgium in postulando ius et possessionem dicti domini episcopi, precipiens inde dictus Obertinus ut mihi videtur per me notarium fieri publicum instrumentum.

Actum Aste in strata publica contracta Alferiorum ante hostium parvum ad latus portas magnas domus habitationis Georgii Alferii presentibus testibus Iacobo Conzia filio Guillelmi Conzia quondam nuncio curie episcopalis Astensis et Bellone Galorsa de Valarnio filio quondam Iacobi Galorse,

Digitized by Google

Se l'Obertino di Cella poco prima aveva cominciato a meravigliarsi, a questa seconda intimata gli si gelò il sangue nelle vene; e come a Magliano erasi commesso un atto genericamente detto illecito, così qui in Asti la minaccia di sfida doveva obbligarlo a cedere alla violenza.

L'uomo che maneggiava penna e calamaio s'accorse subito che non era prudente tentar oltre chi vestiva lorica e cingeva ai fianchi spada, e che si rideva e metteva in non cale i fulmini minacciati dal vescovo d'Asti, per quanto i vescovi d'allora da una mano tenessero il pastorale, dall'altra la spada. E forse se l'Obertino non fosse stato gentiluomo nel vero significato della parola, e non in quello che se gli dà oggigiorno, e come rimane provato e dall'epiteto di nobile datogli nel documento, e dallo stesso Giorgio Alfieri, e non avesse avuto qualche grado di parentela, forse cogli Alfieri stessi e coi Garetti (poichè altro documento ci rivela che nel 1350 egli era marito d'Isabellina, che sembra sorella della Carlotta d'Incisa vedova del Quaglieta Alfieri), l'intimazione di cui sovra, non sarebbesi forse nemanco limitata a quelle parole, già ben provocanti.

Quella scena poco edificante poi era bensì seguìta, come dicemmo, nella città d'Asti, di pieno giorno *in strata publica, contracta, Alferiorum ante hostium parvum ad latus portae magnae domus habitationis Georgii Alferii.* Ma questo poco monta, nè serviva a meglio garantire il mal capitato dalla minaccia fattagli. Basta considerare la condizione delle città medievali, ed in uno Stato fresco di repubblica. Le case de' magnati erano vere fortezze guarnite di torri, con piani elevati, difesi da inferriate robuste, e di quando a quando da feritoie, come se ne vedono ancora tante in parecchie città italiane. Asti e Chieri fra noi appunto ci forniscono un'idea delle case delle società d'ospizio, che se servivano talora a fermezza di libertà ed indipendenza, erano pur esca ed aiuto alle guerre civili.

Notisi che l'Obertino di Cella si trovava *in contrata Alferiorum,* dove questa potente famiglia ghibellina aveva, come al-

---

Ego Andreas Pilus clericus astensis imperiali auctoritate notarius predicta omnia prout a dictis partibus proferri audivi semel rogatus in hanc publicam formam traddidi et scripsi sicut opus de iure fecit, sapientis dictamine corrigenda. Et ideo signum meum apposui consuetum et me subscripsi prout supra. *Archivio di Stato* luogo citato.

Digitized by Google

trove esprime il documento, torri, palazzi, case; dove eravi il consorzio *Alferiorum*, secondo dalla stessa carta si rileva. Era la via a cui accennava pure ai suoi dì il cronista Guglielmo Ventura; e che si estendeva dal palazzo attuale del Comune al Campo di Marte, cioè presso l'imboccatura della via che dal palazzo civico ora accenna al teatro ed alla piazza Alfieri.

Era un palazzo storico, poichè il 12 aprile del 1312 ivi stipulavasi la dedizione di Asti a Re Roberto di Napoli. *Actum in civitate Astensi in domibus Alferiorum in quibus moratur potestas.* Ma tutti codesti pregi avevano poco valore per l'agente vescovile. Anzi in mezzo a tutto quell'apparato l'Obertino di Cella si poteva ritenere in piena balia dell'avversario, poichè si sa che quelle strade erano deserte, prive di officine, abitate da una sola consorteria: ed avrebbe bastato un segno, un fischio di chi si pretendeva offeso, per far accorrere a riparare il vero o supposto torto tutti quei dell'ospizio Alferiano, e farla così pagar cara al temerario rappresentante del vescovo. Egli è bensì vero che della violenza usatagli l'Obertino avrebbe potuto farsi rendere stretta ragione innanzi all'autorità, ma avrebbe anche potuto succedere che prima di ciò egli potesse correr rischio della vita o di qualche grave sfregio.

Non mancava al vescovo d'Asti bensì tal qual potere in forza della doppia sua qualità di prelato e di feudatario, ma sopra di lui stava chi godeva della sovranità astese. Costui era Luchino Visconti, del quale fu erede il noto arcivescovo Giovanni suo fratello; nomi che basta accennare per vederli associati a finezza politica, sì, ma a scelleraggini ed a violenze di ogni specie. Infatti erano pur quei Visconti, dei quali Bernabò nel 1361 a quei due abati benedettini incontrati presso il Lambro e che gli portavano lettere poco gradite del papa Innocenzo VI, aveva fatto il dilemma, o di trangugiare quelle cartapecore coi piombi ond'erano munite, o decidersi a bere nel sottoposto fiume. Erano facezie proprie de' potenti di quei giorni; vent'anni prima Guido de' Guidi ne aveva fatto una simile agli ambasciatori fiorentini.

Ed ammessa la distanza degli or accennati prepotenti dagli Alfieri, per quanto cittadini prestanti di uno stato italiano, lacerato dalle fazioni, non è improbabile che qualche simile violenza avessero essi potuto commettere a danno dell'Obertino di Cella, di cui ned il vescovo, ned altri l'avrebbero poi potuto risarcire. E tant'è che quel piato si trascinò ancor ben cinque lunghi anni prima di

Digitized by Google

essere ridotto a componimento; il perchè soltanto nel 1354 il vescovo Baldracco Malabaila poteva rinfacciare agli Alfieri la sentenza, tolta dalla stessa loro impresa gentilizia: *tort ne dure.*

Una prima sentenza arbitramentale veniva pronunziata dai giureconsulti astigiani Oddenino Scarampi, Guglielmo Laiolo e Luca Pelletta, in forza della quale erano stati aggiudicati a quel vescovo beni allodiali del Quaglieta Alfieri, che al tempo della sua morte si trovavano presso di lui.

Ma nel più bello spuntavano i soliti cavilli giuridici fra il procuratore vescovile, anche questi interessato per ragione della consorte, e Macino de' Garretti, in riguardo dell'aggiudicazione e delle pretese su certi beni. C'erano anche le ragioni di quella *asserta domina dicti quondam Quagliete,* come leggiamo nel documento, cioè la Carlotta, allora passata a seconde nozze con Oddone dei marchesi d'Incisa. Quindi per comporre codeste nuove spinose ed imbrogliate differenze, le parti dovevano invocare nuovo arbitramento.

E questo finalmente seguiva nel castello di Bene il venticinque febbraio del 1354 *in camera dicti episcopi* (1) anzi alla

---

(1) In nomine Domini amen anno natiuitatis eiusdem millesimo trecentesimo quinquagesimo quarto indictione septima die vigesima quinta mensis februarii cum inter reverendum in Christo patrem et dominum dominum Baldracum Dei et apostolicae sedis gratia episcopum astensem seu Obertinum de Cella eius procuratorem nomine ipsius ex una parte et Georgium Henricum et Matheum fratres de Alferio eorum nominibus ex altera de bonis et hereditate quondam Quaglete Alferii ipsorum Georgii et fratrum patris dudum questio suborta fuerit materia questionis et discordia et inter ipsas partes iamdiu lata fuerit per sapientes viros dominos Oddeninum de Scarampis (*a*) Guillelmum Layolium (*b*) et Lucam de Pellectis (*c*) legum doctores quaedam sententia arbitralis per quam ipsi domino episcopo sive dicto Ubertino procuratori suo adiudicata fuerunt bona allodialia quae quondam fuerunt dicti Quaglete sive quae tempore mortis sue tenebat et possidebat, et quae ad ipsum Quagletam spectabant et spectare debebant ex hereditate domini Georgii patris ipsius Quaglette et Aliani fratrum: et deinde inter dictum procuratorem nomine predicti domini episcopi ex una parte et Mancinum Garretum ex altera orta fuerit quaestio occaxione certarum terrarum et possessionum vinearum pratorum nemorum et gerborum et querumdam

(*a*) Oddone f. di Antonio, signore di Vinchio, Montaldo e Mombercelli fu dottore in leggi e poi vicario della curia del Marchese di Monferrato. Il sette febbraio del 1337 dal Marchese Manfredo di Saluzzo aveva avuto unitamente a suo fratello Giacomo, ed a nome anche degli altri fratelli Matteo, Gioannone e Tomaino i castelli di Cortemiglia, Vernetta, S. Martino, Perletto, Torre di Uzzone, Saleggio, Cairo, Rocchetta di Cairo, Carcare, Altare, Bubbio, S. Giulia. *et generaliter omnia quae dictus D. Marchio habuisset seu acquisivisset ultra Belbum a domino Manfredino de Carretto quondam, et domino Bonifacio de Rocca...* col mero e misto impero ecc. e ciò per il prezzo di 110000 fiorini d'oro di Firenze! Si vede già qual fosse la potenza e la ricchezza degli Scarampi di quei giorni.

(*b*) Fu uno dei savi che compilarono i nuovi statuti della società dei militi.

(*c*) Luca Pelletta giureconsulto pure, nel 1350 era vicario del vescovo Baldracco.

Digitized by Google

sua presenza. L'arbitro eletto fu il giureconsulto Guglielmo de' Brusati canonico d'Isola.

---

aliarum possessionum sitarum et sitorum in territoriis Vallegiarum, Antegnani et Revigliaschi dicto procuratore asserente dictas terras et possessiones in dictis locis situatas nomine dicti domini episcopi ad se spectare, et contrario asserente dicto Mucino se fore in possessionem ipsarum et esse suas et ad se spectare prout haec et alia plenius patent et dicuntur continere in quodam instrumento sententiae arbitralis latae per prefatos dominos Lucam Oddoninum et Guillelmum et in actis habitis inter dictum Ubertinum procuratorem et dictum Mucinum, et etiam in dubium revocareur de quibusdam iuribus acquisitis et quae dicebantur esse acquisita vel etiam cessa per dominam Clarotam uxorem quondam dicti domini Quaglete et nunc domini Oddonis de Ancisia nec non spectantem ad ipsam et Isabellam uxorem dicti Ubertini et per prefatas partes sive per prefatum reverendum in Christo patrem et dominum dominum Baldraccum Dei et apostolice Sedis gratia episcopum astensem ex una parte et Georgium Alferium filium Aliani emancipatum a dicto patre suo proprio ac procuratorem et procuratoris nomine Mathei et Henrici predictorum fratrum suorum et emancipatorum a predicto Alliano prout de procura patet publico instrumento scripto manu Petri Schefoni notarii publici de anno presente die quarta huius mensis februarii ut de instrumento emancipationis patet alio instrumento scripto manu Petrini Carenzani notarii ac anno millesimo trecentesimo vicesimo quinto die prima octobris et procurator et procuratorio nomine dicti domini Mucini, prout de procura patet publico instrumento scripto per Loysonum de Rocha notarium hoc eodem anno et indictione die undecima huius mensis februarii ex alia parte et predictum Ubertinum procuratorem et procuratoris nomine dictarum dominarum Clarotae et Isabellinae prout de procura dictae dominae Clarotae patet publico instrumento scripto manu Henrici de Rocha de Ancisia notarii de anno domini millesimo trecentesimo quinquagesimo die undecima mensis septembris de instrumento vero procure praedicte Isabellae patet alio instrumento scripto manu Antonii de Bozolasco notarii de anno domini millesimo trecentesimo quadragesimo secundo die vigesima sexta mensis iulii compromissum factum fuerit in venerabilem virum dominum Guillelmum de Bruxatis utriusque iuris peritum necnon canonicum insulanum ut de compromisso patet instrumento facto scripto et recepto per me Guillelmum Cunibertum notarium infrascriptum millesimo trecentesimo quinquagesimo quarto indictione septima die duodecima mensis februarii. Ecce quod dictus dominus Guillelmus arbiter et arbitrator ut supra visis omnibus et singulis quos dictas partes coram ipso producere et allegare voluerent tam verbitenus quam in scriptis super predictis discordiis et controversiis et omnibus et singulis diligenter examinatis; Christi nomine invocato dixit pronunciavit sententiavit, declaravit arbitratus fuit et mandavit per predictas partes debere observari ut infra sequitur. Et primo quod fiat et sit bona pax caritas et amor inter ipsas partes perpetuo duratura. Item adiudicavit et per sententiam arbitralem pronunciavit legitime et pleno iure pertinere cum effectu et integraliter et perpetue dicto

Digitized by Google

La lunghissima sentenza, che dal suo testo riproduciamo, è distinta in varii capitoli: ed è documento pregevole per le

---

domino episcopo dictoque Ubertino procuratore nomine ipsius domini episcopi omnia et singula bona allodialia ubicumque constituta cuiuscumque conditionis qualitatis et quantitatis existant et sub quibuscumque coherentiis esse noscantur in civitate Ast posse et districtu et alibi ubicumque que quondam fuerunt Quaglete Alferii quondam et ad eumdem perventa et spectantia et eidem debite vigore successionis et hereditatis domini Georgii Alferii quondam ac dominae Damiscinae iugalium et alia quacumque occasione iure vel causa, et quas et quae etiam tempore mortis suae dictus Quagleta noscitur possedisse et tenebat et per dictos Georgium et fratres et Mucinum pronunciavit et arbitratus fuit ipsa bona allodialia debere libere et expedite relaxari verbo et facto infra quindecim dies dicto domino episcopo sive dicto Ubertino procuratore nomine ipsius domini episcopi sine aliqua contraditione iuris vel facti contra quae quidem bona et res praecipue sunt res et bona suprascripta primo octava pars turris et palatii et domorum bassarum iacentium in civitate Ast in consortio Alferiorum indivisa cum heredibus quondam domini Georgii Alferii quibus turri, palatio et domibus cohaerent via a duabus partibus et heredes domini Ogerii Alferii. Item medietas domus quae fuit domini Georgii Alferii quondam in dicta contrata cui medietati coheret Secundinus filius domini Fredelici Alferii quondam et via. Item medietas domorum in quibus stant Iacobus Paratus et Pontonus de Ultramontibus quibus coherent haeredes domini Thomae Alferii quondam strata publica et via vicinalis a latere et sunt dictae domus in contrata Alferiorum. Item sexagesima pars unius apothechae quae est in mercato astensi quae vocatur apotheca linguae passerae: cohearent mercatum et Daniel Cacayranus et Bertoldus Cacayranus. Item in posse Revigliaschi medietas unius petiae gerbi pro indiviso cum heredibus Micheleti Garreti quondam: cohaerent haeredes Rollandoni de Antegnano Benentinus Alferius et via. Item in posse Antegnani ubi dicitur in valle Antegnani medietas unius petiae terrae prati et vineae pro indiviso cum praedictis heredibus dicti Micheleti Garreti quondam: cohaeret Benentinus de Alferiis hac inde Guizardini Gutturii quondam (a) pro rebus que fuerunt Andreoni Malabaila et via, et est modiorum triginta vel circa. Item in dicto posse ubi dicitur in valle Antegnani prope pontem Baudyni medietas unius petiae terrae pro indiviso cum predictis heredibus: coherent rivus et via a duabus partibus, et est circa modia tria. Item in posse Roviglaschi ubi dicitur in parere medietas unius petiae boschi pro indiviso cum predictis haeredibus: cohaerent Belcardonus de Antignano, Benentinus de Alferiis et rivus de subtus. Item in valle Antignani medietas unius petiae terrae prati zerbi et boschi simultenentis pro indiviso cum predictis heredibus: cohaerent via rivus et illi de Solario et est tota modiorum duodecim. Item in posse Vallegiarum in valle doeuca medietas unius petiae terrae et prati vineae et boschi et gerbi cum medietate domus

(a) Della potente famiglia astigiana ghibellina, della quale alcuni discendenti ebbero signoria su Agliano, Belvedere, Castelnuovo, Calcea, Neviglie, ecc.

molte notizie relative alla topografia astigiana ed a parecchi nomi di famiglie di quella città. Ma per darne qui un sunto basterà dire

simultenentis pro indiviso cum heredibus predicti domini Micheleti de Garretis: coaherent haeredes Guillelmi Cacayrani quondam et via. Item petia terrae in dicta contrata: cohaerent haeredes Petri Bordini quondam, via, illi de Cathena (a) et Girardus Corteslius. Item petia una prati in plano Tanagri: cohaerent domina Sarraxina de Cacayranis a duabus partibus et Benentinus et Thebaudus Caso. Item petia una terrae ad Consortium Vallegiarum: cohaerent via a duabus partibus et Manuel Rex. Item in Salabertrano petia una terrae: cohaerent Antonius Guttuerius clericus de Serra et via. Item sexagesima pars unius alterius apothecae quae est in mercato de Sancto pro indiviso cum aliis de Alferiis et illis de Solario: cohaerent praedicti de Solario et mercatum de Sancto. Item sexta pars unius domus que est in Ast prope domum Rufini Guizii pro indiviso cum heredibus domini franceschini Alferii quondam et Georgio Alferio et pratibus: cohaerent Castellinus Pallidus (b) et fratres et via ante et post, et si quid plus in dictis domibus, apothecis, turri et palatio ac etiam pratis, terris vineis nemoribus et gerbis reperiatur spectare ad dictum Quaglietam ullo modo, et generaliter omnia et singula bona alladialia dicto Quagletae quondam ubicumque constituta, ita tamen quod dicta generaliter specialitate non deroget nec e converso. Item condemnavit, et per hanc suam sententiam arbitralem praecepit quod dictus dominus Mucinus Garretus Georgiusque Alferius et fratres debeant et teneantur facere et curare totaliter cum effectu quod dictus dominus episcopus dictusque Ubertinus eius procurator nomine ipsius habeant et teneant pacifice et habere et tenere integre et ad plenum iure proprio et in perpetuum possit et valeant cum effectu ipsa omnia et singula bona infrascripta nominata et innominata ubicumque constituta libera et expedita ab omni persona et personis communi collegio et universitate quantum est et esse potest et poterit ex facto et pro facto obligationis translationis seu contractus et alia qualibet occasione facto vel causa dictorum Alliani Georgii et filiorum et causam habentium ab eisdem et non aliter nec alio modo vel causa eisdem de Alferiis dictoque domino Mucino et filiis super ipsis bonis allodialibus supra nominatis et innominatis silentium perpetuum imponendo salva tamen limitatione quae infra sequitur de terris de Vallegiis. Item dixit et pronunciavit et arbitratus et arbitramentatus fuit quod dictus dominus Mucinus pro fructibus perceptis per eum de terris de Vallegiis Antegnano et Revigliasco dat et dare debeat dicto domino episcopo sive dicto Ubertino procuratore nomine ipsius domini episcopi florenos centum auri infra unum mensem omni remoto deposito, habeat ipse dominus Mucinus Item quod solutis dictis florenis dicto Ubertino procuratore per ipsum dominum Mucinum quartam partem predictarum terrarum vallegiarum et aliter non nec alio modo, et quod tunc et eo casu dictus dominus episcopus et dictus procu-

(a) Famiglia che aveva il confalonerato d'Asti, ed alla quale spettava di portare lo stendardo del Comune innanzi ai podestà ed ai vescovi nel primo loro ingresso.

(b) Apparteneva ad una delle più nobili famiglie astigiane.

Digitized by Google

che i possedimenti alferiani già molto estesi e controversi consistevano nell'ottava parte della torre e del palazzo delle case

---

rator nomine dicti domini episcopi illam quartam partem dimittant et relaxent prefato domino Mucino libere expeditam. Item quod illam quartam partem dictus Ubertinus tamquam ipse et procurator et procuratoris nomine dominarum Clarotae et Isabellinae uxoris ipsius Obertini et non aliter faciant cum effectu quod dictus Ubertinus Mucinus illam quartam partem habeat teneat et possideat pacifice et quiete sine contradictione alicuius personae collegio vel universitatis et faciat finem et quitacionem dicto Mucino de omni iure competente dictae dominae Clarotae et Isabellinae uxori suae in praedicta quarta parte ita et taliter quod de caetero non inquietetur per eas et praecipue occasione quorumdam iurium sive contractuum quae dicuntur esse cassa et celebrata cum Thebaldono Peletta et eidem Thebaldono et hac solutione facta ut supra de dictis centum florenis per ipsum Mucinum. Item quod dictus dominus episcopus soluta prius ut supra predicta quantitate centum florenorum per ipsum dominum Mucinum faciat ipsi domino Mucino finem et pactum de non petendo de omni iure sibi competente in dictam quartam partem occasione heredidatis et iurium sibi competentium predicta hereditate dicti Quagletae in dicta quarta parte. Item condemnavit dictum Georgium Alferium ad dandum et solvendum et reddendum in pecunia numerata omni remoto deposito dicto domino episcopo seu dicto Ubertino eius procuratori nomine ipsius semel tantum pro satisfactione fructuum fictuum et godiarum receptorum de dictis bonis allodialibus per dictos Georgium et fratres de Alferiis hactenus perceptorum florenos centum quinquaginta auri omni excusatione remota. Item adiudicavit dicto domino episcopo dictoque Ubertino eius procuratore nomine ipsius spectare et provenire debere integre cum effectu medietatem omnium et singulorum debitorum et novium debitorum domini quondam Georgii Alferii predicti seu dimidiam dicto quondam Quagletae eius filio in partem obventam in divisionibus inter quondam Quaglietam et Alianum fratres factis millesimo trecentesimo trigesimo tertio indictione prima die vigesima octava februarii ut patet publicis instrumentis. Item dixit et pronunciavit quod dicte partes scilicet Ubertinus procurator ut supra dicti domini episcopi et Georgius et fratres de Alferiis debeant cum effectu comunibus expensis exigere et excutere omnia et singula debita et quantitates et nomine debitorum obventorum eisdem ex hereditate dicti quondam domini Georgii communium et indivisorum inter ipsum Quagletam quondam et dictum Alianum et simili modo vindicare et recuperare omnes possessiones res et bona allodialia indivisa quondam dicti domini Georgii Alferii et ad ipsos eius filios quondam spectantia a quibuscumque detentoribus eorumdem et ad invicem ipsae partes ad ipsam exactionem et recuperationem teneantur facere suum posse et praestare cum effectu per instrumenta cartas et iura quam alio quolibet modo ad exactionem efficacem ipsorum debitorum recuperationem bonorum communium omne quod sciverint et poterint auxilium, patrocinium consilium et favorem et idem de divisis faciunt si de utriusque partis processerit libito voluntatis et quaelibet partium de Alferiis et domini episcopi tantum dumtaxat inde semper habendo et percipiendo integraliter suam di-

Digitized by Google

basse poste nell'accennata strada degli Alfieri: alle quali erano coerenti la casa degli eredi dell'Ogerio Alfieri, l'illustre cronista

---

midiam portionem dicto domino Mucino et filios penitus hinc exclusis. Item etiam pronunciavit ut supra quod dictus Georgius Alferius et fratres teneantur et debeant cum effectu infra duos menses facere et reddere bonum computum bonamque rationem et reddere et constituere omne id et de omni et toto eo quod suprascripti de Alferiis seu alter ipsorum per se et alios habuerunt et exigerunt seu receperunt de debitis praedictis tam communibus quam divisis dicto quondam Quagletae spectantibus, dictoque domino episcopo pertinentibus successive et ad id et circa facienda compelli valeant totaliter cum effectu et converso dictus dominus episcopus sive dictus Ubertinus procurator nomine ipsius teneantur ad computum rationem et restitutionem si quid per eos vel alterum eorum receptum fuit de bonis communibus dicti quondam domini Georgii Alferii. Insuper praecepit et arbitratus fuit quod dictus Georgius et fratres et Mucinus liberent et quitationem et etiam pactum de alio non petendo faciant infra quindecim dies dicto domino episcopo de omnibus expensis fodris taleis et impositionibus quibuscumque solutis per ipsos occasione dictorum bonorum hereditariorum prefati quondam Quagletae per ipsos detentorum nec ab ipsis domino episcopo vel Ubertino aliquid exigere vel petere possint ullo modo occasione predicta Insuper etiam dixit et pronuntiavit ac decrevit et arbitratus fuit quod praesens seu sententia laudi et arbitramenti ex nunc pro vera sententia et legitime omologata habeatur omnino, ita quod executioni in totum modis omnibus quibus potest mandari debeat et possit ipso facto nulla munitione vel requisitione partium vel iuris solemnitate praemissis iniungendo ac interdicendo et prohibendo nec circa huiusmodi arbitramenti execucionem contra alterutram partium facienda altera pars aliquid opponet aut opponere possit per se vel per alium aliquam exceptionem iuris vel facti, nec cognitorum petere nec etiam possit postulare reduci ad arbitrium boni viri, sed praedicte omnino cessent et de ipsis omnibus utrique parti silentium imposuit, ita et eo modo praesertim, quod dictus Obertinus procurator nomine dicti domini episcopi per se et alios intrare ingredi et accipere valeat de dictis bonis allodialibus quondam Quagletae nominatis et innominatis dicto domine episcopo adiudicatis ut supra possessionem corporalem libere cum effectu dictis Georgio Alferio et fratribus dictoque Mucino et filiis vel causam habentibus ab eis nullatenus citatis monitis vel requisitis et sine licencia alicuius iudicis vel magistratus et ipsorum omnium contradictione et absentia penitus non obstante. Item dixit, sententiavit et arbitratus fuit quod dictus Ubertinus procurator et procuratorio nomine praedicti domini episcopi Clarotae et Isabellinae restituant dicto Georgio et fratribus omnia instrumenta quae si qua habent penes se sive tangentes ipsos fratres tantum quae quidem instrumenta tangant tantum ipsos fratres ex hereditate quondam domini Georgii Alferii quondam. Item quod si quid seminatum est in terris supradictis per ipsum adiudicatis dicto domino episcopo sive dicto Ubertino procuratoris nomine ipsius domini episcopi per ipsum Georgium et fratres

Digitized by Google

anzi accennato, la quale era appunto in quella via omonima, quella di un Secondino, figlio di Federico pur degli Alfieri, l'altra

---

vel Mucinum vel alium pro eis dicti Georgius et fratres et Mucinus de ipsis fructibus nihil habeant nisi portionem quae colono debet et consuevit assignari. Et praedicta omnia et singula sic dixit pronuntiavit sententiavit definivit declaravit condempnavit decrevit adiudicavit arbitratus fuit et arbitramentavit et amicaliter composuit inter dictas partes sicut de iure et concordia melius potuit ex potestate sibi a dictis partibus attributa et per partes ipsas et inter eas fieri attendi et observari exequi et adimpleri praecepit et mandavit sub pena in compromisso apposita et adiecta toties committenda et exigenda totaliter cum effectu per partem observantem in singulis et pro singulis capitulis huius laudi ac sententiae compromissi quoties per aliquam dictarum partium in aliquo contrafactum fuerit sive ventum et paena exacta vel non semel et pluries nihilominus praedicta omnia et singula suprascripta prout iacent, rata et stabilia maneant et in suo robore perseverent, reservata sibi potestate declarandi, interpretandi et iterum pronunciandi si opus sibi videbitur per totam diem hodiernam: de quibus omnibus praecepit per me Guillermum Cunibertum notarium infrascriptum fieri publicum infrascriptum publicum instrumentum unum et plura. Lecta lata et publicata ac sententialiter divulgata fuit suprascripta arbitralis sententia per dictum dominum Guillermum de Bruxatis arbitrum et arbitratorem predictum pro tribunali sedentem in Castro Baennarum dicti domini episcopi et astensis ecclesiae videlicet in camera dicti domini episcopi sub anno nativitatis Domini millesimo trecentesimo quinquagesimo quarto indictione septima die vigesima quinta mensis februarii presentibus dicto domino episcopo dictam sententiam omologante si et in quantum dicta sententia suo nomine et astensis ecclesiae facit et eo modo et aliter non et dicto Ubertino procuratore et procuratoris nomine dictarum dominarum Clarotae et Isabellae omologantes etiam ipsam sententiam si et in quantum pro ipsis dominibus faci et aliter non ac etiam praesente dicto Georgio suo et nominibus quibus supra nec non praesentibus venerabilibus viris dominis Iohane de Provanis de Cargnano praeposito Pinerolii Andreono de Sancta Victoria canonico Ianuense praesbytero Iacobo Machario canonico ecclesiae Baennarum Astensis dioecesis et Andreone Pilo de Aste archipresbytero Venearum dictae dioecesis et pluribus aliis testibus vocatis et rogatis. De quibus omnibus etiam dicti dominus episcopus et Ubertinus procurator ut supra si et in quantum dicta sententia pro eis et ipsorum quemlibet facit et eo modo et aliter non preceperunt per me iamdictum notarium infrascriptum fieri unum et plura publica instrumenta eiusdem tenoris.

Et ego Guillelmus Cunibertus de Baennis dioecesis astensis publicus imperiali auctoritate notarius et nunc dicti domini episcopi scriba una cum dictis testibus vocatis et rogatis publicationi et pronunciationi et probationi dictae arbitralis sententiae et omnibus et singulis praedictis praesens interfui et de mandato dictorum domini episcopi domini Guillelmi arbitri et arbitratoris praedicti et dicti Ubertini procuratoris ut supra hanc cartam scripsi et signo meo consueto signavi in testimonium omnium praemissorum et veritatis. *Archivio di Stato, l. c.*

Digitized by Google

degli eredi di Giorgio e Tommaso, pur degli Alfieri, e le case di Jacopo Parato, forse agnato della famiglia che partecipò anche alla giurisdizione su Magliano (1).

Il documento accenna pure alla sessagesima parte *unius apotechae quae est in mercato astensi quae vocatur apothcca linguae passerae,* (lingua di passero, allusione forse alla sua figura), alle coerenze di Daniele e Bertoldo Cacherano, altri nobilissimi astesi, ai quali un distico del carme sulle famiglie astigiane accenna con questi encomii: *Ut sol clara viget fulgens Cacherana propago;* e ad altra bottega *quae est in mercato de Sancto pro indivisa cum aliis de Alferiis et de Solariis.*

E codesti fondaci, indicati nel documento, possono benissimo riferirsi alla professione anticamente cogli altri compaesani esercitata dagli Alfieri. Il *mercato astense* poi di quella carta vuol dire la piazza del Santo, cioè di S. Secondo, dove trovavansi i mercati ed eranvi i banchi dei principali commercianti: e tale indicazione si collega con quella che si riscontra in altri documenti coevi, ove si ricordano case degli Alfieri su quella piazza, che è nel cuore della città.

Ed in via di breve digressione aggiungeremo che più tardi gli Alfieri ebbero il loro palazzo altrove, cioè dove sorse il convento di S. Agostino a non molta distanza di quello dei Francescani cònventuali, ove questa famiglia ebbe le sue sepolture e dove pure giace il padre del grande tragico (2).

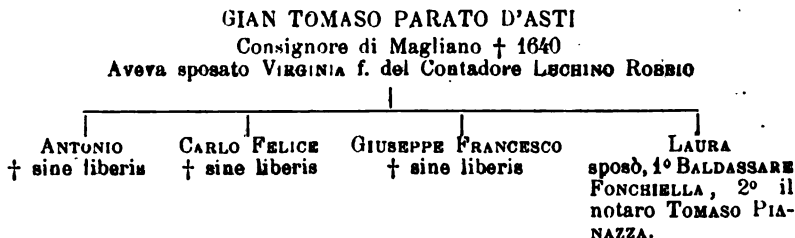
La sentenza in discorso ci fa anche conoscere possessioni degli Alfieri a Reviglìasco, Antignano e Salbertrand, ecc.

Non sappiamo se gli Alfieri abbiano poi ricorso ad un appello per riparazione di quel lodo; ma è certo che in tutte le

---

(1) Famiglia estinta da circa ducento anni, come n'è prova questo brano genealogico autentico

GIAN TOMASO PARATO D'ASTI
Consignore di Magliano † 1640
Avera sposato VIRGINIA f. del Contadore LECHINO ROBBIO

ANTONIO † sine liberis	CARLO FELICE † sine liberis	GIUSEPPE FRANCESCO † sine liberis	LAURA sposò, 1° BALDASSARE FONCHIELLA, 2° il notaro TOMASO PIANAZZA.

(2) VASSALLO, *Il beato Enrico Alfieri,* Asti 1890.

fasi di quel travaglioso conflitto, essi diedero prova di persistente pertinacia, manifestata coll'acerbità propria di quei tempi rozzi e poco miti.

E chi poi nel conflitto col vescovo Malabaila non iscorge lo sprazzo di quel ghibellinismo, sempre professato dagli Alfieri; e di cui in altri tempi, e con forme naturalmente diverse, e per ben altro obbiettivo seppe essere così ardente attore il sommo tragico, che solo basterà a tramandare alla più longeva posterità il nome di quella cospicua famiglia, e della città

Dove Pompeo piantò sua nobil asta?

Nuovi studi sull' itinerario di Corrado II nel 1026;

Nota del Socio CARLO CIPOLLA

I.

Ho inserito nell'*Archivio stor. Lombardo* (1) un articolo, nel quale discorrendo *di un luogo controverso dello storico Wipone*, parlai di un punto importante e molto oscuro della spedizione italica di Corrado II nel 1026; trattai allora dei *loca montana*, nei quali quell'imperatore passò l'estate, ospitato da Ariberto, arcivescovo di Milano. Adesso riprendo l'argomento, per discutere intorno a qualche altra quistione sulla quale la luce non è ancora fatta. Non so di certo se le mie parole siano tali da illuminare convenientemente i dubbi di cui dovremo occuparci. Voglio sperare tuttavia che esse non abbiano ad essere del tutto inutili.

L'itinerario dell'imperatore Corrado II nel 1026 offerse materia a molteplici studi, essendo scarse molto le fonti che lo possono chiarire. Lo stato della quistione viene riassunto, con

(1) Fascicolo del 31 marzo 1891; t. XVIII, pag. 157 e segg.

Digitized by Google

mirabile perspicacia, dall'illustre prof. dott. Enrico Bresslau, dell'Università di Strassburgo, in una delle eruditissime e veramente preziose appendici aggiunte al primo volume del suo *Konrad II* (1).

Tra i punti che il Bresslau discute in quel luogo, c'è anche quello che riguarda il luogo da cui furono segnati i diplomi Stumpf 1910-1912. Lo Stumpf li credette segnati da Peschiera, e gli attribuì al mese di marzo, supponendo che Corrado gli abbia concessi nel viaggio da lui intrapreso per recarsi da Verona a Vercelli, viaggio succintamente descritto da Wipone. Il professor Bresslau è invece di ben altra opinione; egli ammette bensì che in quella occasione Corrado sia andato a Bergamo, ma senza toccare Peschiera, o almeno senza fermarvisi, e sopratutto senza segnarvi i tre diplomi suddetti. Egli crede che i tre diplomi siano datati non da Peschiera, ma da Pescara; e quindi suppone che siano posteriori al soggiorno di Corrado a Ravenna. Wipone che parla di tale soggiorno, e dei fatti che ad esso si raggruppano, non fa parola della venuta di Corrado a Pescara; ma il Bresslau non crede che abbia valore il silenzio di quel biografo, il quale, per verità, è abbastanza lacunoso nelle sue indicazioni. Suppone quindi che Corrado, nell'intendimento di recarsi a Roma, sia avanzato sino a Pescara, dove fu sorpreso dal caldo eccessivo, per il qual motivo pensò di retrocedere, cercando un asilo sotto la protezione dell'arcivescovo di Milano. La venuta di Corrado a Pescara, se bene accertata, potrebbe modificar di molto le opinioni comunemente accettate su questa spedizione imperiale, poichè la distanza assai lunga che c'è tra Ravenna e Pescara, fa di necessità pensare ad un notevolissimo consumo di tempo, per andare e ritornare di là. Siccome siamo in mezzo a questioni ardue di tempi e di luoghi, così un tanto spostamento nella meta ultima raggiunta da Corrado, non può restare senza conseguenze anche sulle nostre opinioni circa alle altre tappe di quell'imperatore.

Ma è proprio accertata la venuta di Corrado a Pescara?

Tutto consiste nel determinare se la parola *Piscaria*, adoperata nei diplomi di Corrado, sia Pescara o Peschiera.

E, anzi tutto, è proprio vero che tutti e tre i ricordati diplomi siano stati segnati nella enigmatica Piscaria?

Nel diploma Stumpf 1910, in favore della Chiesa di Bergamo,

(1) Lipsia, 1879, pp. 452 segg.

Digitized by Google

l'escatocollo termina così: « Dat. anno dominicae Incarnationis M. XXVI. Ind. VI (*correggasi:* VIIII). regni vero domni Chuonradi secundi II. Actum Piscariae feliciter » (1).

Anche il diploma 1911 riguarda la Chiesa di Bergamo, ma l'intonazione è affatto diversa dal diploma precedente. In primo luogo ne è affatto differente l'oggetto: nel diploma Stumpf 1910 si tratta di una corte speciale, quella di *Iemini*, con due castelli aggiunti, mentre il secondo riguarda la Canonica di S. Vincenzo di Bergamo. Questo significherebbe nulla o ben poco. La diversità consiste nell'intonazione. Giacchè nel primo caso, Corrado si ricorda della chiesa episcopale di Bergamo, perchè gliene fecero petizione Gisla sua moglie, Aribone arcivescovo di Magonza e Piligrino arcivescovo di Colonia. Invece nel diploma Stumpf 1911 ci troviamo trasportati in ben altra atmosfera. Corrado si ricorda di una preghiera fattagli da Ambrogio vescovo di Bergamo, quando egli ebbe occasione di visitare quella città (2). Il diploma 1911 comincia così: « ...omnibus fidelibus nostris praesentibus et absentibus notum esse volumus quia dum quodam tempore Pergameam civitatem et beati Vincentii Martiris eclesiam fuissemus ingressi, venerabilis pontifex Ambrosius, qui illis diebus eiusdem presulatus cathedram obtinebat, supplex nostram adiit maiestatem, obnixe videlicet obsecrans et exposcens ut...» (3). Non vedo dunque alcun motivo per avvicinare tra loro i due diplomi, i quali possono essere stati dati in luoghi e tempi diversi. Anzi pare che

---

(1) FRA CELESTINO DA BERGAMO, *Historia di Bergamo*, parte II, p. 417 (Brescia, 1618).

(2) CELESTINO DA BERGAMO, op. cit., II, 418; UGHELLI, IV, 442-3; LUPO, *Cod. Dipl. Berg.*, II, 527-9. Quest'ultimo, diligentissimo e dottissimo editore di documenti, professa di ricavare il suo testo direttamente dall' originale; la sua edizione merita quindi la miglior fede. Noi lo riproduciamo in calce a questa Nota, seguendo la copia che ce ne trasmise l'illustre storico bergamasco, Angelo Mazzi, il quale ce lo trascrisse dall' originale esistente nella biblioteca civica di Bergamo. Siccome al prof. BRESSLAU (*Konrad II*, I, 45) sembra che le edizioni che finora abbiamo di quel diploma non siano tali da renderci del tutto tranquilli sulla loro esattezza, così mi parve opportuno assecondare il desiderio espresso dall'illustre critico tedesco, e dare qui una nuova edizione di quell'importante documento.

(3) Il modo con cui qui si parla del vescovo Ambrogio non ci deve far credere ch'egli fosse morto o avesse lasciato la cattedra episcopale quando Corrado rilasciava quel documento. Egli anzi sopravvisse a Corrado, e nel 1043 era ancora vescovo di Bergamo (UGHELLI, IV, 1069).

Digitized by Google

il diploma 1911 accenni a lungo tempo trascorso dopo la visita a Bergamo; del che invece non è menzione alcuna nel diploma 1910, il quale può benissimo essere stato rilasciato prima della visita stessa.

L'escatocollo del diploma 1911 si chiude così, secondo l'edizione del Lupo: « Datum anno Dominice Incarnationis MXXVI, Indict. VIIII. Regni vero domni Chuonradi secundi reg. II. Actum in Episcoparico ». Le due edizioni precedenti non hanno valore di fronte a questa. Non è inutile tuttavia rammentare che frà Celestino legge: « Actum in... Episcoparuo », e F. Ughelli: « in ... Episcopatu ». La lacuna può essere stata supposta dai due editori, trattandosi di un nome., che sembrava significare *vescovado* in senso generico, e pareva presupponesse quindi la mancanza di un nome proprio di città.

Fra' Celestino si sbaglia anche qui, come nell'altro diploma, in riguardo all'indizione, segnando: indict. VI. Ma lo stesso Ughelli corresse l'errore, e scrisse: Ind. 9.

Il lettore troverà di qui a poco il testo esatto del documento, e vedrà che il Lupo aveva ragione.

Dove sia l'*Episcoparico* non lo si sa. Lupo (1) giudiziosamente scrisse; « ubinam, et quisnam fuerit locus iste, fateor me prorsus ignorare ». Lo Stumpf implicitamente propose che si abbia da leggere *in Piscaria*, e lo seguì Bresslau, il quale ultimo tuttavia si mostrò in qualche maniera esitante, poichè disse, che egli opinava non ci dovessimo scostare da questa supposizione, fino a che si fosse avuta una migliore edizione del documento. La ragione che viene addotta, è quella solamente che da *Piscaria* è datato un altro diploma in favore di Bergamo; ma è una ragione assai debole, specialmente se si abbia riguardo alla diversità intima e profonda che separa i due diplomi. Il vero è che noi siamo molto all'oscuro su di tale argomento; questo tuttavia possiamo dire, che niun motivo avevasi, anche prima della nuova trascrizione, per mutare la lezione tramandataci da un critico così valente, come fu il Lupo; tanto più che essa si trovava in qualche modo raffermata dalle precedenti, quantunque imperfette, edizioni.

Il terzo diploma è quello che lo Stumpf segna col numero 1912, e fu pubblicato dal p. Fr. Ant. Zaccaria (2). Questo

(1) Op. cit., p. 532.
(2) *Dell'antichissima badia di Leno*, Venezia, 1767, p. 96-8.

Digitized by Google

diploma, che fu concesso in favore della celebre abbazia di Leno, situata a non molta distanza da Brescia, tiene una sentita somiglianza col diploma St. 1910. Infatti anch'esso venne concesso ad istanza dell'arcivescovo Aribone: « per domnum Aribonem Magunciensem archiepiscopum et archicancellarium ». L'escatocollo si chiude, in maniera identica all'altro, fatta eccezione per il numero dell'indizione, che nel diploma 1910 è manifestamente errato, per colpa dell'editore.

Ecco dunque il passo che a noi interessa: « Anno (1) dominicae incarnationis millesimo vigesimo sexto indictione nona, anno domini Conradi secundi regnantis primo. Actum Piscaria (2) feliciter, amen ».

La conformità di 1910 con 1912 fa tanto più risaltare la difformità di 1911.

Il Bresslau per staccarsi dall'opinione comune (3), che in *Piscaria* vedeva Peschiera, sul lago di Garda, ed identificare invece quel luogo con Pescara, si appoggia specialmente sul diploma 1911, e sul ricordo che Corrado vi fa della sua andata a Bergamo. Egli osserva, che, ammettendo l'identificazione topografica volgata, converrebbe supporre, che Corrado venendo da Verona, siasi recato dapprima a Bergamo; sia poscia ritornato sopra i suoi passi, per raggiungere Peschiera, e quindi riprendere il suo viaggio attraverso alla Lombardia. Un giro e rigiro di tal fatta non essendo ammissibile, dovrassi escludere Peschiera, e cercare altrove, e in sito molto discosto da quella terra, la città in cui Corrado concesse i diplomi Stumpf 1910-1912. Ma avendo noi veduto che il diploma 1911 non ha a che fare nè con *Piscaria*, nè coi diplomi 1910-1912, l'argomento, se non mi inganno, sfuma.

---

(1) Prima di *anno* nel dipl. 1910 c'è: *Dat.*

(2) Nel dipl. 1911 fra' Celestino legge al luogo corrispondente: *Piscariae.*

(3) Cfr. Zaccaria, op. cit., p. 98 nota 2.

Digitized by Google

Ed ora finalmente ecco il diploma:

1026; ind. 9; a. r. 2; « in-episcoparico ». *Corrado II re ricordandosi della preghiera fattagli, alla sua venuta in Bergamo, da Ambrogio vescovo di quella città, conferma i beni della chiesa di S. Vincenzo Martire pure di Bergamo.* (Stumpf 1911).

In nomine domini dei eterni. Conradus gracia (1) dei rex: omnibus fidelibus nostris presentibus et absentibus notum esse uolumus quia dum quodam | tempore pergameam civitatem et beati uincentii martiris ęclesiam (2) fuissemus ingressi uenerabilis pontifex ambrosius qui illis diebus eiusdem prę|sulatus cathedram obtinebat. supplex nostram adiit maiestatem obnixe uidelicet obsecrans et exposcens ut de omnibus territoriis rebus et fun|dis ad ipsius ęcclesię canonicam attinentibus nominatiue de oppido calcinate cum capella infra castrum fundata et cum omni pertinentia | sua intrinsecus et forinsecus sicut olim diuę memorię azo (3) eiusdem sanctę pergamensis ęcclesiaę (4) episcopus eidem ęcclesię sancti uincentii per | testamentum contulerat et districtione arimanorum (5) ibidem adiacentium scilicet in balbiaco et saxaco habitantium quatinus ad | partem publicam nulla conditione responderent neque ad partem comitatus placitum custodirent neque toleneum neque precariam darent | neque ullam facerent angariam ad partem publicam, insuper et de aliis omnibus prediis et rebus quascumque (6) uel idem prefatus bonę memorię pontifex | uel cęteri ipsius loci pręsules et rectores seu etiam cęteri sęculares ibidem pro animarum suarum remediis contulerunt (7) ut sicut hæc | omnia nostri pręcessores reges et imperatores ad usum et stipendium ibi seruientium sub suę protectionis munimine defenderunt ita | et nos sub nostre pietatis umbraculo tueremur. Cuius petitioni ut iustum est misericorditer annuentes per hanc nostri precepti

(1) *gratia,* legge il LUPO.
(2) Nella pergamena questa voce fu aggiunta interlinearmente.
(3) *Azzo,* LUPO.
(4) Quì l'originale ha la sigla æ colla cediglia.
(5) *arimannorum,* LUPO.
(6) *quascunque,* LUPO.
(7) *consulerint,* LUPO.

Digitized by Google

paginam | confirmamus et corroboramus omnes res et facultates prędicte canonice et prędictos arimanos (1) sicut superius compręhensę sunt eo | uidelicet ordine ut amodo inantea ad usum et utilitatem sanctę ęcclesię seruientium tam ipsi quam et successores eorum habeant teneant | firmiterque possideant omnium hominum contradictione et repetitione remota precipientes itaque sancimus ut nullus dux archiepiscopus | episcopus marchio comes uicecomes gastaldio nec ullus rei publicę exactor seu aliqua regni nostri magna paruaque persona predictos | Canonicos uel (2) successores eorum qui protempore ad prefatum uenerabilem locum deo seruituri sunt de suprascriptis arimannis et rebus dis|uestire molestare uel inquietare presumat. Si quis uero quod futurum non credimus huius nostrę pręceptionis uiolator extiterit | sciat se libras centum auri optimi compositurum medietatem camerę nostrę et memoratis canonicis uel eorum successoribus alteram. | Quod ut uerius credatur diligentiusque ab omnibus obseruetur, hoc praeceptum inde conscriptum manu propria confirmantes sigilli nostri | impressione iussimus insigniri.

Signum domni Conradi regis (MF) inuictissimi.

Hugo Cancellarius uice domni aribonis archicancellarii recognoui.

(*L. S. deperditi*).

Dactum (3) anno dominicę incarnationis M°XXVI. Indictione VIIII. Regni uero domni chuonradi secundi regn. (4) II. actum inepiscoparico (5).

Conservasi l'originale nella Biblioteca Civica di Bergamo, Pergamene Lupo, n. 19.

Rendo nuovamente grazie al ch. sig. Angelo Mazzi per la trascrizione del presente documento.

---

(1) *arimannos*, Lupo.
(2) *et*, Lupo.
(3) *Datum*, Lupo.
(4) *reg.*, Lupo.
(5) *in Episcoparico*, Lupo.

Digitized by Google

Di Rozone vescovo di Asti e di alcuni documenti inediti che lo riguardano;

Sunto del lavoro del Socio CARLO CIPOLLA

In questo scritto l'autore discorre di quel vescovo, vissuto nella seconda metà del secolo x. Cerca di stabilire la data precisa del suo presulato, che pare sia durato dal 967 circa al 990 incirca. Studia i documenti che lo riguardano, e specialmente le conferme dei diritti episcopali concesse da Ottone I e da Ottone III, e si serve di questi documenti per chiarire lo svolgersi dell'autorità civile del vescovo, in un tempo in cui l'autorità dei conti era ormai estinta, e la loro serie finita. Sopratutto insiste sulla unione del vescovato di Alba a quello di Asti, la quale ebbe luogo nel 985. L'unione di questi due vescovadi era conosciuta, ma solo in modo indeterminato. Alla presente Memoria si uniscono i documenti finora inediti che vi si riferiscono, e che riguardano gli anni 969-985; tra questi documenti si hanno, oltre ad una epistola di Giovanni XIII, anche due diplomi di Ottone I ed uno di Ottone II. Sicchè c'è da fare una addizione alla raccolta dei diplomi di quegli imperatori, che il Sickel pubblicò nei volumi dei *Monumenta Germaniae historica*. L'unione dei due episcopati non ha soltanto importanza locale, poichè da essa restano chiariti alcuni fatti dell'oscuro periodo delle invasioni saracene in Piemonte. Infatti l'unione del vescovato di Alba a quello di Asti fu suggerita dalla miserrima condizione, in cui esso era ridotto in causa delle irruzioni dei Saraceni. L'ultimo vescovo di Alba, prima di detta unione, fu Fulcardo, accennato, ma in modo poco chiaro, dalla Cronaca Novaliciense. Sicchè i nuovi documenti spiegano anche le parole dell'antico cronista.

Digitized by Google

RELAZIONE sul lavoro del Prof. Elia LATTES: *La grande epigrafe etrusca del cippo di Perugia tradotta ed illustrata*

La Memoria del socio corrispondente di questa Accademia, prof. Elia Lattes, presentata alla Classe in una delle precedenti adunanze, venne presa in esame dai sottoscritti. L'Autore si propose di *tradurre* e *illustrare* la grande epigrafe del cippo di Perugia, che è sempre il maggiore tra i monumenti scritti dei quali si compone il *Corpus inscriptionum etruscarum*. Nè l'abbondanza delle parole, nè la chiarezza delle forme grafiche, nè la sicurezza della lezione facilitarono, come parrebbe a prima giunta, la intelligenza di così insigne monumento; anzi tra le maggiori iscrizioni rimase sempre la più difficile e la meno trattabile. Dopo i molteplici tentativi d'intendere, non che le singole parole e gl'incisi, il concetto fondamentale della leggenda, prima con metodi meno scientifici che empirici, poi con metodo rigorosamente scientifico, gli espositori giunsero sempre a conclusioni diverse e contraddittorie.

Ai sottoscritti, come a molti, è nota la competenza del prof. Lattes negli studi linguistici, e in special modo nella illustrazione di varie iscrizioni etrusche, corredate di appunti ed analisi grammaticali, che leggonsi nelle pubblicazioni dell' Istituto Lombardo. Tuttavia non sembra loro, che con questa nuova illustrazione sia compiutamente sollevato il velo, che nasconde il significato di tale iscrizione, e che molte dubbiezze non perdurino nello interpretarle. Lo che deriva, almeno in parte, dalle incertezze non ancora allontanate sulla indole del linguaggio etrusco, pur sempre controverso, dopo aver chiesto, spesso inutilmente, i sussidi di tutte le lingue conosciute. Ed abbiam visto in questi ultimi anni uomini egregi percorrere a briglia sciolta il campo greco-latino, abbandonarlo e rientrarvi, dopo avere spaziato nelle

Digitized by Google

più lontane regioni dell' Asia. In tanta dubbiezza di propositi alla Commissione è sembrato che si abbia ad accogliere ogni lavoro, che trattato con vero metodo scientifico, ci conduca con sicuro passo alla ricerca del vero; ed è tale il lavoro commendevolissimo del Lattes, lungo, minuzioso, faticoso. Ogni sprazzo di luce, che i cultori della linguistica gettano sulle iscrizioni finora incomprese, è un tanto di ricuperato alla conoscenza degli antichi linguaggi italici.

Nella grande copia di confronti epigrafici e nelle minute ricerche e analisi grammaticali del Lattes c'è qualche cosa che non si possa accettare senza riserva e ad occhi chiusi: alcuni rileveranno qualche inesattezza, ed altri terranno men vere talune affermazioni. Parve ad uno della Commissione, che la iscrizione incisa nel panneggiamento della statua di bronzo del Museo Fiorentino, detta dell'Arringatore perugino, la quale suona:

auleśi . meteliś . ve . vesial . clenśi
cen . flereś . tece . sanśl . tenine
tuthineś . chisvlicś

si potesse tradurre:

Aulo Metello Velii filio Vesiâ nato
hanc statuam posuit — decuria
civitatis clusinae.

Al Lattes pare addirittura mostruoso riconoscere un dativo in *auleśi* e *clenśi*, non disdegnato da altri, pur da lui lodati scrittori. Egli vede un *Aulesius* in *auleśi*, e conforta il suo nominativo con la enunciazione di un canone, che esprime così: *tutte le antiche epigrafi onorarie in lingua latina sono stilate al nominativo*; e cita ad esempio gli elogi degli Scipioni ed i trentaquattro elogi dell'arco Fabiano ed augustei. Ma le iscrizioni degli Scipioni, anzi che onorarie, sono vere iscrizioni sepolcrali, scolpite in sarcofagi, dettate in famiglia; e non voglion andare confusi coi monumenti onorari gli elogi storici. Del resto la iscrizione, ugualmente dell'arco Fabiano, che si leggeva nella statua in onore di un Fabio, quale ci fu tramandata dallo Smezio, era stilata nella forma *L. Fabio Allobrocigino Maximo*. La leggenda etrusca dell'Arringatore non reca parole di elogio, tranne forse la voce *sansl* incompresa, probabilmente quasi *ob merita* od *honoris causa:* l'elogio racchiudevasi nel fatto della dedicazione di una statua in suo onore.

Digitized by Google

Comunque si consideri il carattere della Memoria presentata, la Commissione crede, che contribuire all'apprezzamento delle nuove indagini del Lattes per la migliore interpretazione delle principali iscrizioni etrusche, sia negli intenti della nostra Accademia, tanto più che l'Autore aggiunge buoni e validissimi argomenti a confermare un'antica opinione, che accomunava il linguaggio degli Etruschi con le altre favelle italiche.

La Commissione propone unanime alla Classe, che la Memoria del Lattes sia ammessa alla lettura con l'intenzione che possa essere ammessa alla stampa nei volumi accademici.

G. Flechia
D. Pezzi
A. Fabretti, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Ermanno Ferrero.

Digitized by Google

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 10 al 31 Maggio 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

	Donatori
* Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; ser. 4ª, t. X, fasc. 3, 4. Bologna, 1890; in-4°.	Accad. delle Sc di Bologna.
— Indici generali dei dieci tomi componenti la serie 3ª delle Memorie della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1880-1889. Bologna, 1890; 1 fasc. in-4°.	Id.
Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna; anno accademico 1889-90. Bologna, 1890; 1 fasc. in-8°.	Id.
— Exposé des raisons appuyant la transaction proposée par l'Académie des Sciences de Bologne au sujet du méridien initial et de l'heure universelle (Rapport présenté à l'Académie le 24 nov. 1889 et communiqué aux Universités et Corps savants représentés aux fêtes du VIII centénaire de l'Université de Bologne). Rome, 1890; 1 fasc. in-8°.	Id.
* Bulletin de la Société belge de Microscopie; t. XVII, n. 6. Bruxelles, 1891; in-8°.	Società belga di Microscopia (Bruxelles).
* Mittheilungen aus dem Jahrbuche der k. Ungarischen geologischen Anstalt; IX Band, 3, 4, 5 Heft. Budapest, 1891; in-8° gr.	R. Ist. geologico ungarese (Budapest).

Digitized by Google

R. Ist. geologico ungarese (Budapest). - Földtani Közlony, etc.; XXI Kötet, 1-3 Füzet. Budapest, 1891; in-8° gr.

Id. — Jahresbericht der k. Ung. geologischen Anstalt für 1885. Budapest, 1891; in-8° gr.

Museo Zool. compar. (Cambridge). * Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College; vol. XXI, n. 1. — Contributions to the Morphology of the Turbellaria: I. On structure *Phagocata gracilis*, LEYDY. Cambridge, U. S. A., 1891; in-8°.

Società Olandese delle Scienze (Harlem). * Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem, etc.; t. XXV, 1e livrais. Harlem, 1891; in-8°.

J. V Carus. (Lipsia). * Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. J. Victor CARUS in Leipzig.; XIV Jahrg., n. 362, 363. Leipzig, 1891; in-8°.

R. Soc. delle Sc. di Lisbona. * Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes, publicado sob auspicios da Academia R. das Sciencias de Lisboa; 2a ser., t. I, n. 1-4; t. II, n. 5. Lisboa, 1890; in-8°.

Id. — A moderna Cirurgia polmonar — Contribuçao para o tratamento cirurgico das doenças nao traumaticas do pulmao; Memoria apresentada à Acad. R. das Sc. de Lisboa por Alfred Luiz LOPEZ. Lisboa, 1888; 1 fasc. in-4°.

Id. — Estudo elementare dos determinantes, seguido de una parte complementar relativa, principalmente, aos determinantes funccionaes; por F. P. HORTA. Lisboa, 1889; 175 pag. in-8°.

Id. — Coloquios dos simple e drogas da India; por Garcia da ORTA; ediçao publicada por delib. da Acad. R. das Sc., etc., dirigida e annotada pelo Conde de FICALHO. Lisboa, 1891; 1 vol. in-8°.

R. Soc. astron. di Londra. * Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 6. London, 1891; in-8°.

Museo del Coll. Owens in Manchester. Report of the Manchester Museum Owens College, etc., Manchester, 1889; 1 fasc. in-8°.

Società scientifica « Ant. Alzate » (Messico). * Memorias y Revista de la Sociedad cientifica « ANTONIO ALZATE »: t. IV, cuadernos n. 5 y 6. México, 1891; in-8°.

La Direzione (Nuova Orléans) * Comptes-rendus de l'Athénée Louisianais, etc.; 4e série, t. I, livrais. 3e. Nouvelle-Orléans, 1891; in-8°.

Società Veneto-Trentina (Padova). * Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali residente in Padova, anno 1890; vol. XII, fasc. 1. Padova, 1891; in-8°.

Università di Perugia. * Annali dell'Università libera di Perugia; anno III, 1887-88, vol. II; anno IV, 1888-89, vol. I — Facoltà chirurgica. Perugia, 1888-89; in-8° gr.

Digitized by Google

— Atti e Rendiconti dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, pubblicati a cura del Consiglio direttivo. Perugia, 1891; 1 fasc. in-8°. — Università di Perugia.

* Revista do Observatorio — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno VI, n. 3. Rio de Janeiro, 1891; in-8° gr. — Osservatorio di Rio Janeiro.

Memoria della Società degli Spettroscopisti Italiani, ecc.; vol. XX, disp. 8. Roma, 1891; in-4°. — Società degli Spettr. ital. (Roma).

* Rivista di Artiglieria e Genio; vol. II, aprile 1891. Roma; in-8°. — La Direzione (Roma).

* Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia; vol. VI — Osservazioni fatte alla Colonia eritrea da L. Baldacci. Roma, 1891; in-8° gr. — R. Uffizio geolog. (Roma).

Transactions of the twenty-second Meeting of the Kansas Academy of Science, 1889, etc.; vol. XII, part. 1. Topeka, 1890; in-8°. — Accad. Kansas delle Scienze (Topeka).

* Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien; 1891, n. 5-7. Wien, 1891; in-8° gr. — Istituto geologico di Vienna.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, etc., Jahrg. 1891, XLI Band, 1 Quartal. Wien, 1891; in-8°. — Vienna.

* Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; neue Folge, XXIV Band, n. 7; XXV Band, n. 1. Würzburg, 1891; in-8°. — Società Fisico-medica di Vürzburg.

— Sitzungs-Berichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; Jahrg. 1891; Würzburg, 1891; in-8°. — Id.

Variazioni di temperatura a diverse altezze; Nota del P. Francesco Denza, Bª. Roma, 1890; 1 fasc. in-4°. — L'Autore

— Piogge singolari; Nota del P. Francesco Denza, Bª. Roma, 1891; 1 fasc. in-4°. — Id.

— Le Stelle cadenti di Agosto e di Novembre; Nota del P. Francesco Denza, Bª. Roma, 1891; in-4°. — Id.

— Pioggia insolita nel 1890; Nota del P. Francesco Denza, Bª. Roma, 1891; 1 fasc. in-4°. — Id.

P. F. Denza — Sulle osservazioni della declinazione magnetica eseguite da Mons. Filippo Gilii alla Specola Vaticana, e sulla declinazione magnetica in Roma. Roma, 1891; 1 fasc. in-4°. — Id.

Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati: di Gino Loria (Estr. dalla *Bibliotheca Mathematica*, etc., di Gustavo Eneström; 1891, n. 1); 1 fasc. in-8°. — L'A.

Digitized by Google

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 24 Maggio al 14 Giugno 1891

Donatori	
Acc. di Sc. ed Arti degli Slavi merid. (Agram).	* Rad Jugoslavenske Akademije Znanosti i Umjetnosti; Knjiga CII (Razredi filolog.-hist. i filos.-jurid.); XXXI. U. Zagrebu, 1890; in-8°.
Id.	— Ljetopis Jugoslavenske Akademije Znanosti i Um. etc., za Godinu 1890, U. Zagrebu, 1890; 185 pag. in-8°.
Società di Studi scient. di Angers.	* Bulletin de la Société d'Etudes scientifiques d'Angers; nouvelle série, XVIII et XIX années, 1888-89. Angers, 1889-90; 2 vol. in-8°.
Università J. Hopkins (Baltimora).	* Johns Hopkins University Circulars, etc.; vol. X, n. 87, 88. Baltimore. 1891; in-4°.
Accademia di Scienze ed Arti di Batavia.	* Proeve van een Lampongsch-Hollandsche Woordenlijst, bepaaldelijk voor het dialect van Kroë, door O. L. Helfrich (Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen; Deel XLV, 3e Stuk). Batavia, 1891; in-8° gr.
Id.	— Verzameling Lampongsche Teksten, getranscribeerd onder toezicht van O. L. Helfrich (Verhandelingen van het Batav. etc., Deel XLV, 4e Stuk). Batavia, 1891; in-8° gr.
Id.	— Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap etc.; Deel XXVIII, 1890, Aflen. 3. Batavia, 1890; in-8°.
Società di Geogr. comm. di Bordeaux.	Bulletin de la Société de Géographie commerciale de Bordeaux; XIV année, 2e série, n. 9-10, 11. Bordeaux, 1891; in-8°.
Società Asiatica del Bengala (Calcutta).	* Bibliotheca Indica: a Collection of oriental woorks, published by the Asiatic Society of Bengal, old series, n. 62, 65: — new series, n. 728, 747, 773, 775-788, 790-792. Calcutta, 1888-91; in-8°.
Società Savoiarda di Storia d'Arch. (Chambéry).	* Mémoires et documents publiés par la Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie; t. XXVI: — Table des XXIV premiers vol. Chambéry 1890; in-8°.
Bibliot. nazionale di Firenze.	Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 130. Firenze, 1891; in-8° gr.
Id.	— Indice degli Atti parlamentari ecc.; pag. 113-128; in-8° gr.

Digitized by Google

Dr. A. Petermanns Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, herausg. von Prof. Dr. A Supan; XXXVII Band, n. 5. Gotha, 1891; in-4°. — Gotha.

* Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; XXXVI, 2, von den Jahren 1889 and 1890. Göttingen, 1890; in-4°. — Accad. delle Sc. di Gottinga.

— Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wiss. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen; aus dem Jahre 1890, n. 1-16. Göttingen, 1890; in-8° gr. — Id.

Bulletin de la Société d'Histoire Vaudoise; n. 8, Mai 1891. La Tour; in-8°. — Soc. di St. Vald. (La Tour).

* Boletin de la R. Academia de la Historia; t. XVIII, cuaderno 5. Madrid, 1891; in-8°. — R. Accademia di Storia (Madrid).

* Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften; XIX Band, 1 Abth. München, 1891; in-4°. — R. Acc. bavarese delle Scienze (Monaco).

— Die grossen Monarchien oder die Weltreiche in der Geschichte; Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzug der k. bay. Ak. etc., am 15 Nov. 1890; von Ferdinand Gregorovius. München, 1890; 1 fasc. in-4°. — Id.

* Sitzungsberichte der philos.-philologischen und historischen Classe der k. bay. Akademie der Wiss. zu München; 1890, Heft 2, 3; — Band II, Heft 1, 2. München, 1890; in-8°. — Id.

* Mémoires de l'Académie de Stanislas, 1889; CXL année, 5e série, t. VII. Nancy, 1890; in-8°. — Accademia Stanislao (Nancy).

Mémoires publiés par les Membres de la Mission archéologique française au Caire; t. VII, 1 fasc. Paris, 1890; in-4°. — Governo francese (Parigi).

Inventaire — Sommaire des Archives départementales antérieures à 1790 etc. — Côte-d'Or — Archives Civiles, série C; t. IV. Dijon, 1890; in-4°. — Id.

— Archives Judiciaires — Supplément à la série B; t. V. Le Mans, 1890; in-4°. — Id.

— Archives Communales etc.; Commune de Vidauban. Draguignan, 1890; 142 pag. in-4°. — Id.

— Archives Communales du Vigan etc. Nîmes, 1890; 1 vol. in-4°. — Id.

— Ville d'Agen - (Tables). Agen, 1890; 85 pag. in-4°. — Id.

— Ville D'Houplines etc. Lille, 1891; 50 pag. in-4°. — Id.

— Archives Ecclésiastiques, série G, I, t. VI, Eure-et-Loire. Chartres, 1890; in-4°. — Id.

Digitized by Google

Governo francese (Parigi). — Archives Ecclésiastiques, série G (n. 1452-3100); t. II, Lozère. Mende, 1890; in-4°.

Id. — — série H (n. 1-1920) - (Abbayes d'hommes); t. I, Orne. Alençon, 1891; in-4°.

Id. — Archives Hospitalières etc. — Hospices de Chartres. Chartres, 1890; 224 pag. in-4°.

Museo Gymet (Parigi). Revue de l'Histoire des Religions, publiée sous la direction de M. J. Réville, etc.; t. XX, n. 3; t. XXI, n. 1-3; t. XXII, n. 1-3. Paris, 1889-90; in-8°.

Società Indo-Chinese (Parigi). * Bulletin de la Société Académique Indo-Chinoise de France, etc.; 2e série, t. III. Paris, 1890; in-8° gr.

Soc. di Geografia (Parigi). * Bulletin de la Société de Géographie, etc.; 7e série, t. XII, 1er trim. 1891. Paris; in-8°.

Soc. degli Antiq di Francia (Parigi). * Bulletin et Mémoires de la Société nationale des Antiquaires de France; 5e série, t. IX: Mémoires, 1888. Paris, 1889; in-8°.

Id. — Bulletin de la Société nat. des Antiquaires de France, 1888 Paris, 1 vol. in-8°.

Ministero delle Finanze (Roma). Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale; anno VIII, marzo-aprile 1891, fasc. II. Roma, 1891; in-8° gr.

Id. Statistica del Commercio speciale di importazione e di esportazione dal gennaio al 30 aprile 1891. Roma, 1891; 1 fasc. in-8° gr.

Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma). Bollettino di Notizie sul Credito e la Previdenza; anno IX, n. 3, 4. Roma, 1891; in-8° gr.

Istituto internaz. di Statistica (Roma). Bulletin de l'Institut international de Statistique; t. II, 1e livrais., année 1890. Rome, 1890; in-8° gr.

R. Accademia dei Lincei (Roma). * Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ecc.; vol. VII, fasc. 9, 1° sem. 1891. Roma; in-8° gr.

R. Deputazione di Storia Patria (Torino). Biblioteca storica italiana pubblicata per cura della R. Deputazione di Storia patria, III — Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia compilata da Antonio Manno; vol. II, III. Torino, 1891; in-8° gr.

Id. — IV — Relazioni diplomatiche della Monarchia di Savoia dalla prima alla seconda restaurazione (1559-1814) pubblicate da Antonio Manno ed Ermanno Ferrero. Francia, periodo III, vol. III (1717-1719). Torino, 1891; in-8° gr.

Digitized by Google

— Indices chronologici ad Antiquit. Ital. M. Æ. et ad opera minora Lud. Ant. Muratorii: scripserunt Joannes Michaël Battaglino et Joseph Calligaris; operis moderamen sibi susceperunt Carolus Cipolla ed Antonius Manno, - fasc. IV (pag. 181-240). Augustae Taurinorum, M.D.CCC.XCI; in-fol. — R. Deputazione di Storia Patria (Torino).

* Bulletin d'Histoire ecclésiastique et d'Archéologie religieuse des Diocèses de Valence, Gap, Grenoble et Viviers; t. X, livraisons, 62, 63, 64, et 65 livraison supplémentaire, 66, 67, 68. Valence, 1890; in-8°. — Soc. di St. eccl. e d'Arch. relig. (Valenza).

Il Rosario e la Nuova Pompei, ecc.; anno VIII, quad. 4. Valle di Pompei, 1891; 1 fasc. in-8°. — La Direzione (Valle di Pompei)

De chori partibus et officio; — accedunt nonnullae animadversiones in *Epistolam ad Pisones*, ex Ciceronis mente potissimum conflatae, opera Stephani Martinii Crusini. In Castro Matuto, hoc est Sanremo; 1891; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Les progrès de l'anthropologie; par le M[is] de Nadaillac. Paris, 1891; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Il primo centenario della nascita di Ferrante Aporti; — Bollettino bimestrale diretto dal Prof. Pietro Nigra; anno II, n. 7. Mantova, 1891; in-8° gr. — Prof. P. Nigra.

Etimologia di alcuni nomi locali di Val di Susa, del Prof. Ugo Rosa. Alessandria; 1 fasc. in-8° picc. — L'A

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
779 (50 C 8) 30 VII-91.

Digitized by Google

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 15ª, 1890-91

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Giugno 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, CAMERANO e BASSO Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio COSSA presenta in dono un volume inviato dall'Accademia Reale di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio, col titolo: *Manifestation en l'honneur de Jean-Servais Stas à l'occasion du cinquantième anniversaire de sa nomination comme membre titulaire à la Classe des Sciences.*

Vengono lette ed accolte per le pubblicazioni negli *Atti* le Note seguenti;

1° « *Sull'epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano* » del dott. Luigi COLOMBA; lavoro presentato dal Socio SPEZIA.

2° « *Uno sfigmomanometro per misurare la pressione del sangue nell'uomo* », del Socio Prof. Angelo MOSSO ».

3° « *Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali o per la tensione di fili di nichel* », lavoro del Dott. Adolfo CAMPETTI, Assistente al Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino.

4° « *Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel* »; Studio sperimentale del signor Antonio GARBASSO, studente del secondo biennio nella Facoltà di Matematica della R. Università di Torino.

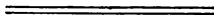
Questi due ultimi lavori sono presentati dal Socio NACCARI.

Lo stesso Socio NACCARI, condeputato col Socio FERRARIS, legge una sua Relazione sulla parte III^a^ dello studio che il Prof. Angelo BATTELLI, della R. Università di Cagliari, prosegue sulle *Proprietà termiche dei vapori*. Tale studio ha per oggetto l'esame del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac.

Il Socio GIBELLI, condeputato col Socio CAMERANO, legge una sua Relazione sopra un lavoro dei Dottori O. MATTIROLO e L. BUSCALIONI, il quale contiene *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti delle Papilionacee*.

La classe accoglie le conclusioni favorevoli delle due accennate Relazioni, e mediante votazioni distinte, ammette prima alla lettura e poscia approva unanimemente per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*, tanto il lavoro del Prof. BATTELLI, quanto quello dei Dottori MATTIROLO e BUSCALIONI.

Le Relazioni dei Soci NACCARI e GIBELLI saranno inserite negli *Atti*.

Digitized by Google

LETTURE

Sull'epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano;

Nota del Dott. LUIGI COLOMBA

Poche ed incerte sono anche ora le notizie che si hanno sui minerali dell'alta valle della Dora Riparia. Il Nicolis di Robilant (1), che pure si occupa abbastanza estesamente anche dei caratteri mineralogici delle nostre Alpi, limita le sue osservazioni sull'alta valle della Dora Riparia a pochi cenni su delle probabili cave abbandonate di minerali di argento e rame a Giaglione, Meana, Chiomonte ed al Seguret, oltre Salbertrand.

Il Barelli (2) cita un certo numero di campioni provenienti da queste località: gesso, calcare, calcopirite e malachite (Chiomonte), calcite e feldispati (Seguret), oro in pagliuzze (Oulx), antimoniuro di rame, malachite e calcite (Savoulx), galena argentifera (Beaulard), minerali di rame nei serpentini (Cesana) e della siderite a Giaglione.

Il Sismonda (3) non accenna che ai depositi di gesso che si trovano in vicinanza di Oulx e Cesana.

Il Gastaldi (4) accenna ad alcune specie mineralogiche esistenti nei terreni paleozoici della valle e precisamente all'ematite compatta del Melezet, a della limonite inclusa nelle dolomiti ed a certe miniere di argento abbandonate che sono probabilmente le medesime a cui accenna il Nicolis di Robilant.

In questi ultimi anni alcuni lavori del dott. Piolti hanno

(1) Nicolis di Robilant, *Essai géographique suivi d'une topographie sousteraine, mineralogique, etc.* Memorie dell'Accademia delle Scienze, anno 1786.

(2) Barelli, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.*

(3) Sismonda, *Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi piemontesi.* Mem. Acc. d. Scienze di Torino, serie II, vol. IX.

(4) Gastaldi, *Studi geologici sulle Alpi Occidentali.* Memorie del R. Comitato Geologico, vol. II.

Digitized by Google

dato qualche notizia più precisa sui minerali di queste località; oltre alla descrizione dello gneiss tormalinifero di Villar-Focchiardo (1) e dei minerali dello gneiss di Borgone (2), egli ha compiuto lo studio completo di una cossaite di Bousson (3) ed in altro luogo (4) dà l'elenco dei minerali trovati nei dintorni di Cesana: anfibolo, augite, calcite, diallagio, dolomite, ematite, epidoto, idocrasia, malachite, pirrotina, prehnite, quarzo, steatite e talco.

Avendo avuto occasione, nel corso di questi ultimi anni, di frequentare questa valle dimenticata, ebbi pure modo di trovare i minerali notati dal Piolti, ad eccezione della cossaite, idocrasia e della pirrotina, e di osservare come questi minerali ed altri ancora, come la magnetite (in ottaedri nei serpentini), l'axinite, la galena, l'albite ed il gesso siano piuttosto sparsi per tutta la valle e per la massima parte concentrati nelle roccie cristalline della zona delle pietre verdi, senza che si abbiano mai dei giacimenti dell'importanza di quelli delle vicine valli di Lanzo e del Delfinato.

In queste mie gite mi sono incontrato in un piccolo giacimento di minerali, che suppongo sia ignoto a tutti, ed è dei minerali in esso contenuti che voglio occuparmi nel presente studio.

Questo piccolo giacimento affiora, a mezz'ora di distanza da Oulx, sulle basi del contrafforte di N. Dame de Catalovie, sul versante della Bardonnèche, ad un'altezza di neppure cento metri sul fondo della valle; vi si può giungere facilmente seguendo un sentiero che addossato alla montagna corre lungo la ferrovia.

La roccia appartiene alla zona delle pietre verdi, zona che in quel punto presenta uno sviluppo assai considerevole, formando quasi completamente il contrafforte di N. Dame de Catalovie; affiorando questa roccia a poca distanza dal fondo della valle è all'intorno circondata da terreni coltivati che rendono difficile la determinazione delle roccie circostanti; però si hanno nei dintorni, qua e là, dei piccoli affioramenti di roccie dioritiche e di schisti calciferi ed argillosi assai ricchi in quarzo.

---

(1) Piolti, *Lo gneiss tormalinifero di Villar-Focchiardo*, Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 12 maggio 1889.

(2) Piolti, *I minerali dello gneiss di Borgone*. Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 17 aprile 1880.

(3) Piolti, *Cossaite di Bousson*. Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 5 febbraio 1888.

(4) Piolti, *I dintorni di Cesana*. Bollettino d. Club Alpino, 1886.

Digitized by Google

La roccia apparisce di color verde grigiastro con larghe venature ora bianche ora giallo-verdastre, venature che corrispondono a delle litoclasi della roccia. Le venature bianche sono essenzialmente costituite da albite, quelle giallo-verdi da epidoto. È in queste venature che trovansi disseminate, con non grande abbondanza, le geodi cristallizzate contenenti i minerali del giacimento; si hanno pure, in alcuni punti, delle sottili venature di quarzo, più abbondanti alla periferia che al centro dell'affioramento, nelle quali però mancano quasi completamente gli altri minerali, trovandovisi solamente rari prismetti di epidoto, generalmente inclusi nel quarzo, qualche fibra di anfibolo bianco grigiastro, ed alcuni minutissimi aghetti neri di tormalina. I minerali trovati nelle venature sono: *epidoto*, *anfibolo*, *albite*, *calcite*, *quarzo*, *ematite* e *pirite;* l'albite e l'epidoto sono sparsi, si può dire, con ugual proporzione dappertutto, invece l'anfibolo, la calcite, l'ematite e la pirite si trovano specialmente nelle venature a base di epidoto; il quarzo trovasi qua e là disseminato ma sempre scarso.

Epidoto. — Questo minerale è piuttosto comune nelle roccie anfiboliche, pirosseniche e serpentinose della valle, ove generalmente si presenta o sotto forma di sottilissime patine costituite da minutissimi cristalli di origine secondaria (nei serpentini), o sotto forma di cristalli allungati ed aggregati (nelle roccie anfiboliche e dioritiche). — Lo trovai nei dintorni di Cesana, dove lo nota pure il Piolti (1), specialmente nell'alto vallone di Clavières, ove trovasi associato con pirite, anfibolo ed un minerale che sembra essere ilmenite, nelle roccie dioritiche che formano la base del Chaberton, in quelle che costituiscono il massiccio della Rognosa di Sestrières, nei serpentini del monte Fraiteve e nelle varioliti del Gran Gimont ove costituisce molte delle sferoliti.

Quello da me studiato si presenta generalmente sotto forma di cristalli di dimensioni piuttosto piccole, varianti fra un centimetro e pochi millimetri di lunghezza; talvolta esso assume una speciale struttura fibroso-raggiata; trovai diffatti un nodulo di epidoto così disposto, nel quale oltre ad esso notai soltanto dei minuti cristalli, per lo più cubici, di pirite alterata.

Tra i cristalli osservati quelli a dimensioni un po' grandi

(1) Piolti, *Nei dintorni di Cesana*, loc. cit.

Digitized by Google

sono colorati in verde-oliva intenso ed hanno le faccie tutte rugose e profondamente solcate da striature prodotte da fibre di anfibolo, sono opachi od appena translucidi sui bordi e le loro forme di cristallizzazione non sono determinabili, sebbene per la loro forma generale sembrino analoghi a quelli più piccoli; i quali, al contrario, hanno delle tinte di minima intensità (giallo-oliva pallidissimo), sono trasparenti e le loro faccie, sebbene piccolissime ed appena discernibili ad occhio nudo, sono assai lucide e poterono servire per le determinazioni goniometriche.

Le forme trovate sono 100, 010, 001, 101, $\bar{1}01$, 012, 201, 111, 011, 110 e 103 (orientazione secondo il Miller) (1); fra queste le più comuni sono le 001, 010, 100, 101 e 102 che compariscono sempre anche nei cristalli più poveri di forme; nei cristalli più ricchi si trovano anche le altre forme che qui riporto in ordine di frequenza: 201, 103, 111, 110, $\bar{1}01$ e 011.

I cristalli sono allungati parallelamente all'asse di simmetria; le faccie 012, 101, 100 e specialmente le 010 sono molto sviluppate mentre le 001 lo sono poco e le altre generalmente sono pressochè lineari; questo speciale sviluppo dà ai cristalli un aspetto schiacciato, quasi laminare, e per di più li fa apparire meno ricchi di forme di quello che realmente siano, poichè ad un'osservazione superficiale le forme 103, 011, 110, 111, $\bar{1}01$ e 201 e talvolta anche le 001, non sono quasi discernibili.

Ho fatto due analisi di questo epidoto avendo cura di scegliere dei cristalli che non presentassero traccie visibili di alterazione e che non avessero aderenti delle fibre di anfibolo; di esse qui riporto i risultati:

	1ª	2ª	Media
SiO_2	37,41	37,56	37,48
Al_2O_3	20,56	20,23	20,39
Fe_2O_3	15,22	15,39	15,30
CaO	24,01	23,98	23,99
MgO	0,45	0,52	0,48
El. vol.	1,97	1,81	1,89
	99,62	99,49	99,53

(1) PHILIPS, *An elementary, introduction to Mineralogy*, 1852.

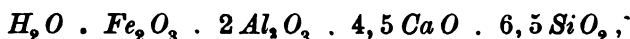
Digitized by Google

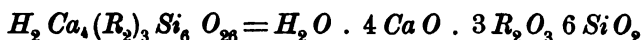
di più notai tracce indeterminate di MnO e di acido carbonico (negli elementi volatili); il protossido di ferro non diede reazione sensibile.

Queste analisi condurrebbero ai rapporti molecolari:

SiO_2	6,53	6,5
Al_2O_3	2,09	2,0
Fe_2O_3	1	1
CaO	4,48	4,5
El. vol.	1,09	1

d'onde si ricaverebbe come formola di quest'epidoto:

$$H_2O \, . \, Fe_2O_3 \, . \, 2Al_2O_3 \, . \, 4,5\,CaO \, . \, 6,5\,SiO_2 \,,$$

e se si assumesse come formola normale quella data dal Rammelsberg (1).

$$H_2Ca_4(R_2)_3Si_6O_{26} = H_2O \, . \, 4\,CaO \, . \, 3R_2O_3 \; 6\,SiO_2$$

si avrebbe in questo epidoto un'eccesso di una mezza molecola di silicato di calcio:

$$H_2O \, . \, 4\,CaO \, . \, Fe_2O_3 \, . \, 2Al_2O_3 \, . \, 6\,SiO_2 + {}^1/_2\,CaSiO_3 \, .$$

Ma noto che questo epidoto non è puro e che non si debbono considerare i risultati che come approssimativi; applicando ad esso l'ipotesi che l'epidoto comune sia il miscuglio, in proporzioni variabili, di due silicati, l'uno di allumina e calcio e l'altro di ferro e calcio (2) le quote centesimali ottenute per questo epidoto differiscono abbastanza di poco dai valori dati per la mescolanza di una molecola del silicato ferrico con due molecole di quello di allumina; posso quindi considerare questo epidoto come corrispondente ad un tal grado di mescolanza, come risulta dal confronto dei valori del Naumann con quelli trovati:

---

(1) RAMMELSBERG, *Handbuch der Mineralchemie.*
(2) NAUMANN, *Elemente der Mineralogie.*

Digitized by Google

	Valori dati dal Naumann.	Valori trovati medii
SiO_2	37,22	37,48
Al_2O_3	21,21	20,39
Fe_2O_3	16,54	15,30
CaO	23,16	23,98
H_2O	1,87	1,85
	100	99

Anfibolo. — Questo minerale comunissimo in tutte le roccie dell'alta valle, specialmente allo stato di tremolite e di attinoto, si presenta in questo caso sotto l'aspetto di aggregati a fibra finissima, di una colorazione raramente bianca, generalmente grigiastra e sempre mescolato in varia proporzione con un minerale, pure fibroso, di colore giallo bruno, del quale avrò occasione di parlare in seguito.

Quando esso è discretamente puro le fibre assumono una speciale lucentezza setacea.

La sua struttura è *asbestoide*; l'analisi chimica, che potei fare su una piccola porzione scelta possibilmente senza grandi impurità, lo qualifica per un'*attinolite* :

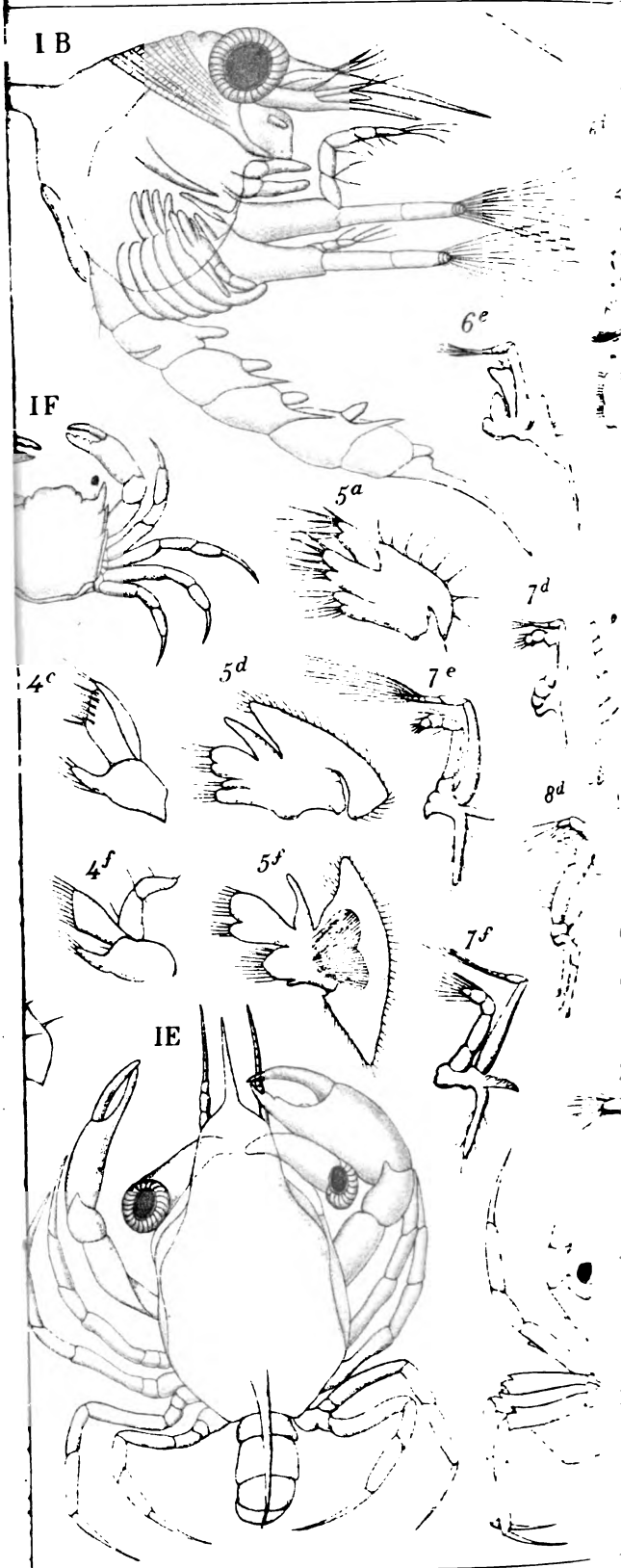
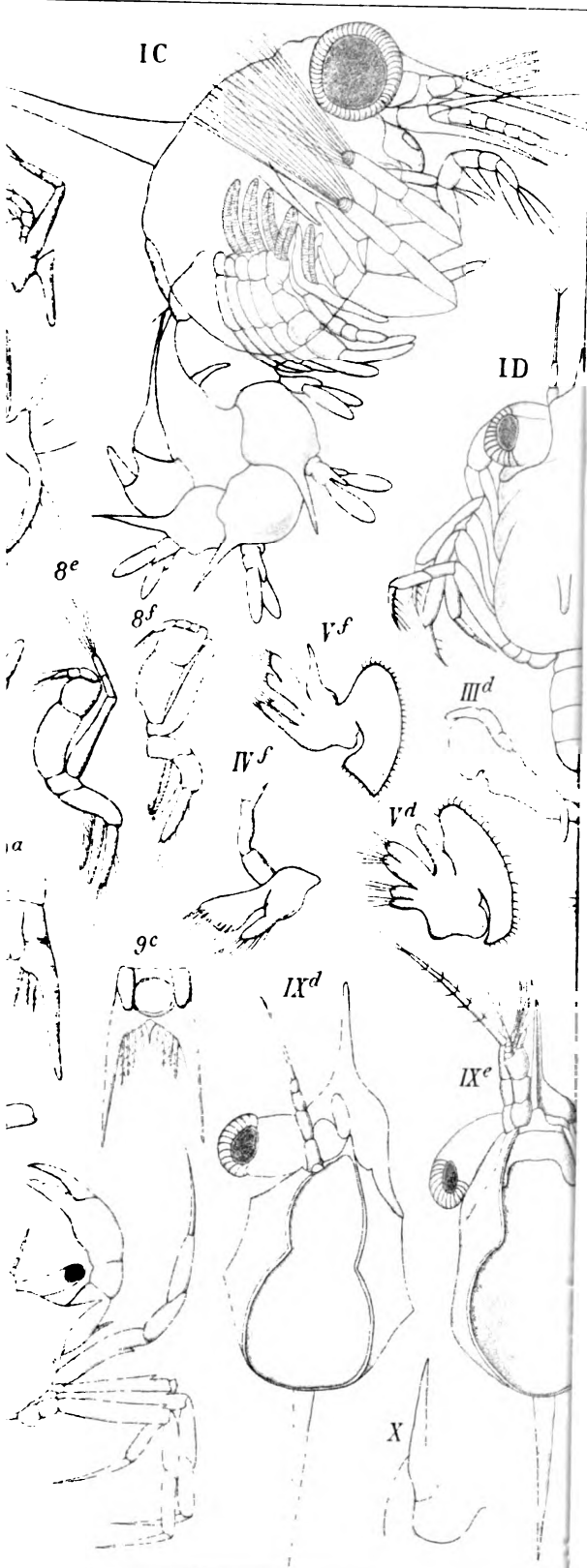
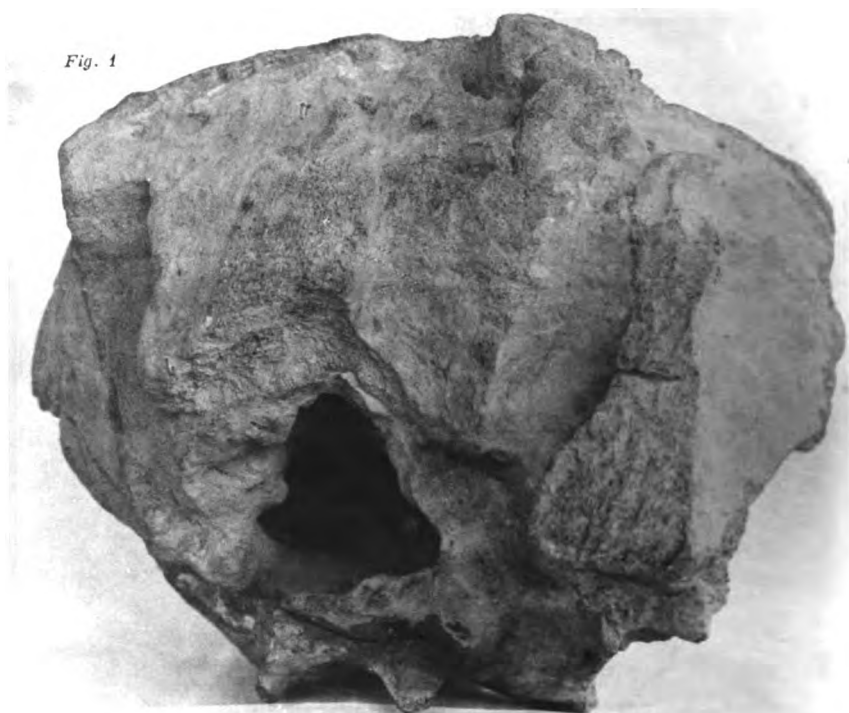
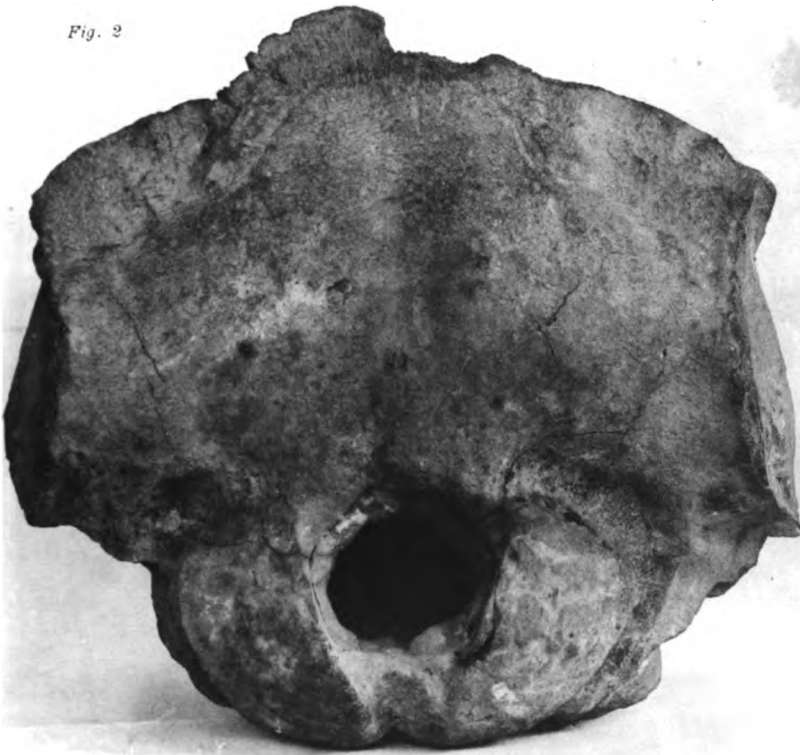
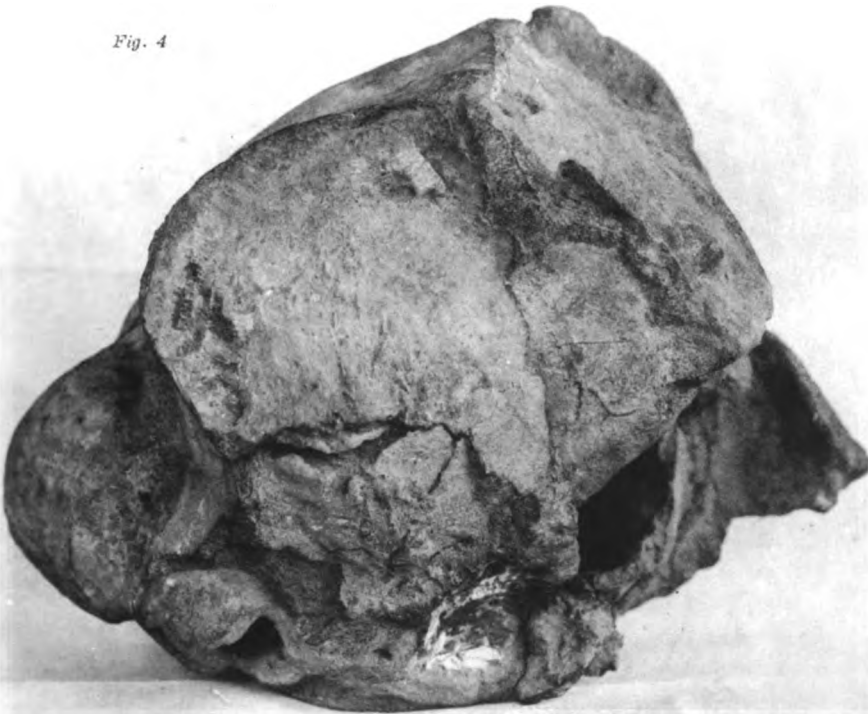
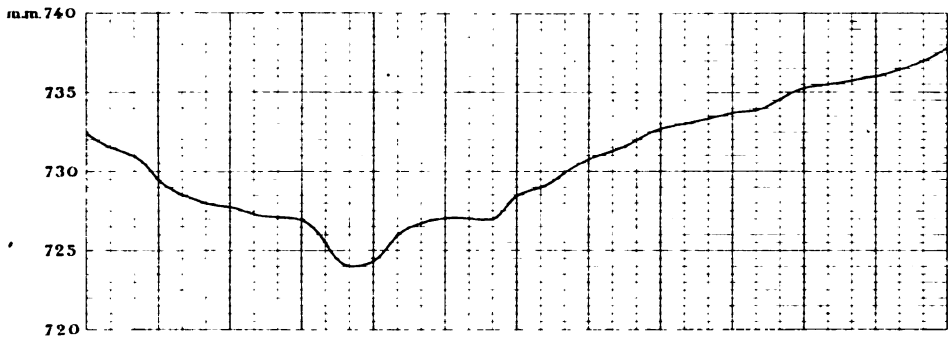
SiO_2	54,65
Al_2O_3	0,47
FeO	10,37
CaO	16,13
MgO	18,68
	100,30

da cui si ricavano come rapporti molecolari :

SiO_2	FeO	CaO	MgO
6,32	1	2	3,31

che condurrebbero alla formola approssimativa :

$$FeSiO_3 \;.\; 3\,MgSiO_3 \;.\; 2\,CaSiO_3$$

in cui il rapporto della magnesia alla calce, uguale a $\frac{3}{2}$, sarebbe

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

F. SACCO - Sopra un cranio di TURSIOPS CORTESII (Desm) Var astensis Sacc

Fig. 1

Fig. 3

DOTT M. PERACCA FOT.

Digitized by Google

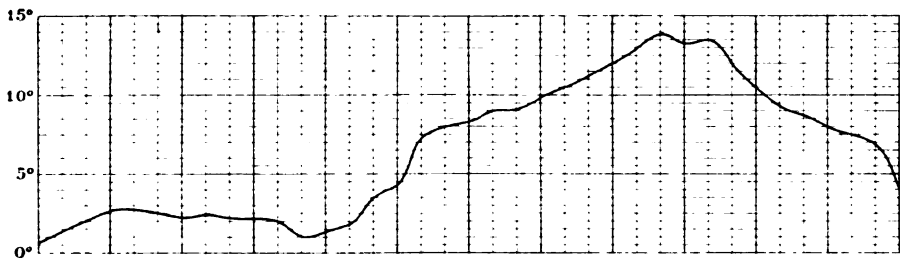
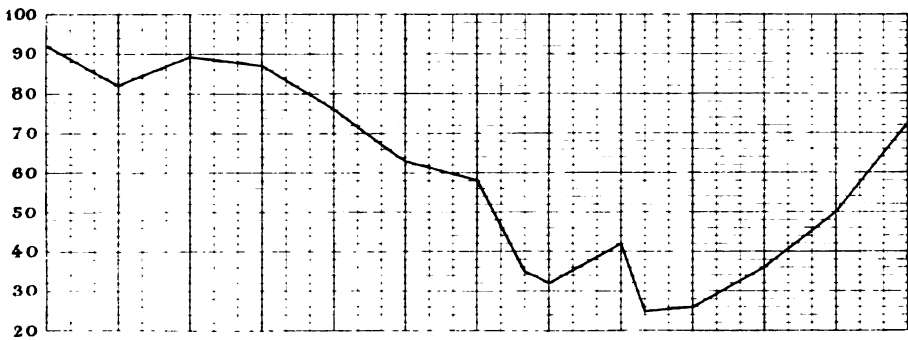
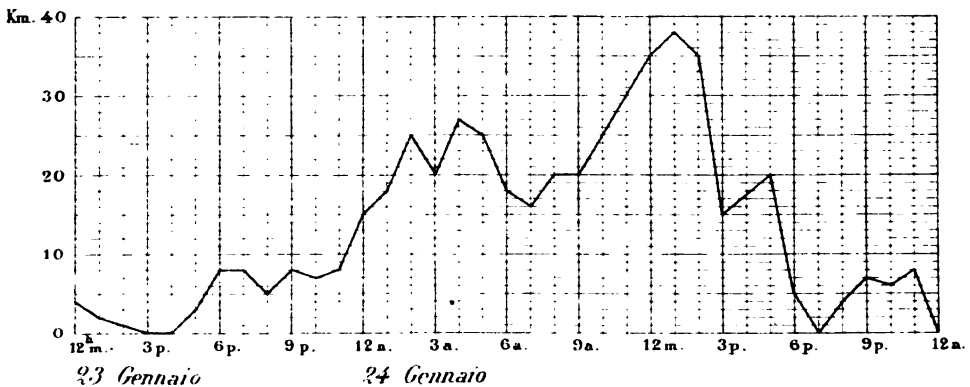
Fig. 2

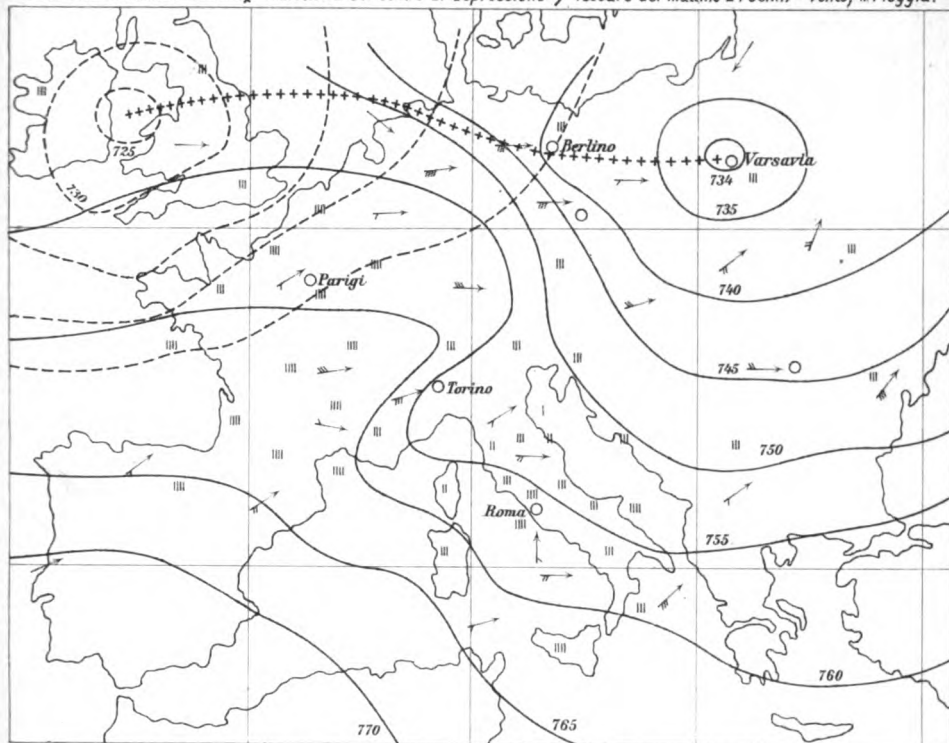
Fig. 4

ROMA FOTOTIPIA DANESI

Digitized by Google

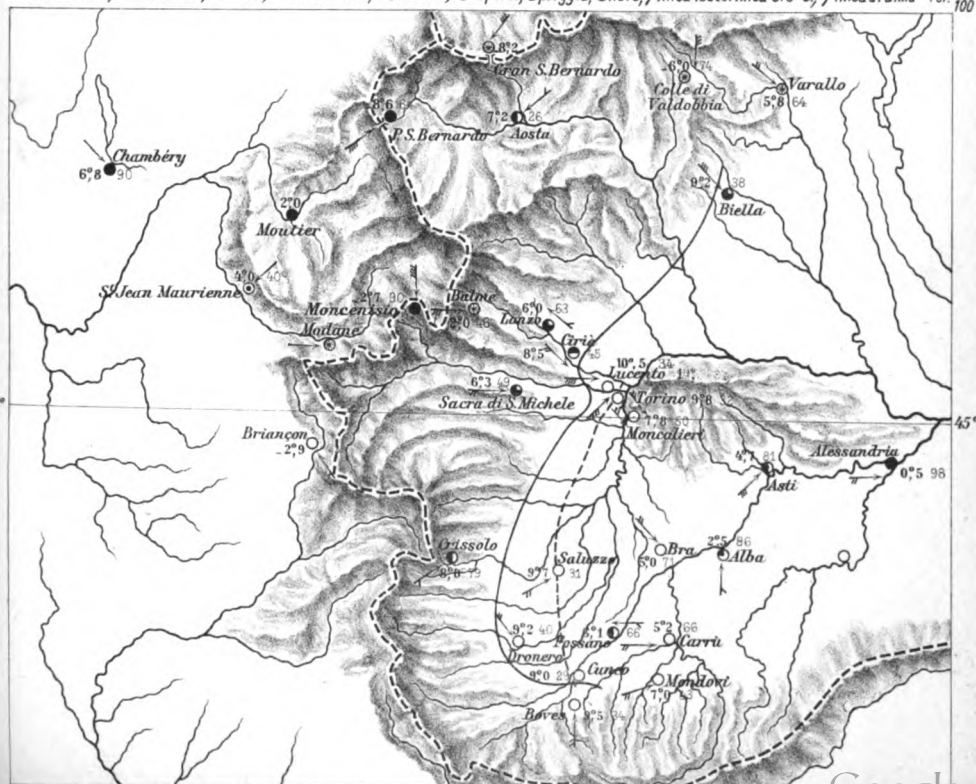
Lit. Salussolia Torino

Digitized by Google

Distribuzione della Pressione atmosferica sull'Europa nel mattino del giorno 24 Gennaio 1890

Isobare al mattino 23 Genn. — Traiettoria del centro di depressione — Isobare del mattino 24 Genn. — Vento; Pioggia.

Condizioni atmosferiche nel Piemonte e nelle Alpi Occidentali il 24 Genn. 1890, 9h ant.

Vento debole; moderato; forte; fortissimo; ○ sereno; ● coperto; ◉ pioggia; ⊕ neve; / linea isotermica di 9° C.; / linea di umidità rel.va 30/100

Gran S. Bernardo
Colle di Valdobbia
Varallo
P. S. Bernardo
Aosta
Chambéry
Moutier
Biella
St. Jean Maurienne
Moncenisio
Balme
Lanzo
Modane
Ciriè
Lucento
Sacra di S. Michele
Torino
Moncalieri
Briançon
Alessandria
Asti
Crissolo
Saluzzo
Bra
Alba
Dronero
Fossano
Carrù
Cuneo
Mondovì
Boves
45°

Digitized by Google

inferiore al rapporto che si ricava dalla formola data dal Rammelsberg (1).

$$3\,CaSiO_3\ .\ 6\,MgSiO_3\ .\ FeSiO_3$$

Il minerale analizzato essendo impuro, anche in questo caso come già per l'epidoto, occorre assumere solo i risultati come approssimativi. Ad ogni modo ho ragione di credere, come farò vedere, che questo rapporto tenda realmente ad esser superiore di quello che risulta dai dati dell'analisi e che sul suo valore influisca assai il minerale fibroso giallo-bruno che trovasi mescolato coll'anfibolo in proporzioni variabili.

Ho fatto due analisi di questo minerale, o meglio del miscuglio di esso con l'anfibolo, avendo però cura di scegliere dei campioni che presentassero delle proporzioni differenti dei due componenti. La prima si riferisce al minerale giallo-bruno quasi mancante di anfibolo, la seconda ad un miscuglio in cui l'anfibolo entra in maggiore quantità :

	1ª	2ª
SiO_2	46,17	51,68
Fe_2O_3, FeO (2)	10,51	10,34
Al_2O_3	8,03	4,21
MgO	12,92	17,80
CaO	22,63	16,37
	100,26	100,40

La composizione centesimale di questi due miscugli appare intermedia fra quella avuta per l'epidoto e quella avuta per l'anfibolo. Si può quindi considerare questo minerale giallo-bruno come uno speciale prodotto di alterazione fra l'epidoto e l'anfibolo. Ammessa questa ipotesi, di cui riparlerò, i miscugli di anfibolo e del minerale giallo-bruno non sarebbero che differenti gradi di alterazione tanto più vicini all'anfibolo quanto sono meno colorati e come si vede dai dati delle analisi quanto più la co-

(1) Rammelsberg, loc. cit.

(2) Stante le piccole quantità che avevo a disposizione di questi miscugli, non potei determinare separatamente il sesquiossido ed il protossido di ferro.

Digitized by Google

stituzione è prossima a quella dell'anfibolo tanto più abbonda la magnesia e sono scarsi il sesquiossido di ferro, l'allumina e la calce.

L'anfibolo da me studiato ed analizzato non sarebbe quindi altro che uno speciale grado di quell'alterazione come si può facilmente vedere paragonando insieme le composizioni centesimali dell'anfibolo e dei due miscugli; ed in essi si vede come realmente il rapporto della magnesia alla calce vada crescendo coll'avvicinarsi della composizione chimica verso quella dell'anfibolo (cioè col diminuire della quantità del minerale giallo-bruno) e come questo rapporto vada tendendo verso quello che si ottiene dalla già citata formola del Rammelsberg.

	Prodotti intermedi		Anfibolo	Anfibolo secondo
	1°	2°	analizzato	la formola del Rammelsberg.
$\frac{MgO}{CaO}$	0,8	1,52	1,65	2,0

La esiguità di questo rapporto dipende probabilmente dalla grande quantità di ferro che in questo anfibolo è ancora contenuto e dalla grande ricchezza in calce che in tutti questi minerali si nota.

Albite. — L'albite costituisce con la labradorite i tipi più comuni secondo cui i feldispati si presentano generalmente nelle roccie di queste località in cui per la mancanza delle roccie ortoclasiche l'ortosio manca generalmente. Non sono rare le druse cristallizzate di albite, generalmente mescolata a quarzo, specialmente nelle quarziti e nelle dioriti.

Come in generale in tutte le località ove ebbi agio di osservare dell'albite cristallizzata, in questo giacimento essa si presenta sotto forma di piccoli cristalli con aspetto poco complesso.

La zona d'inserzione dei cristalli è generalmente parallela alle facce $\bar{1}10$ e $\bar{1}30$, per modo che queste facce sono raramente visibili; i cristalli sono costantemente geminati secondo la legge dell'albite e non mi riuscì mai nè di trovare dei cristalli semplici nè delle altre leggi di geminazione.

Digitized by Google

Le forme trovate sono 010, 130, 110, $0\bar{2}1$, 001, 101, $\bar{1}30$ e $\bar{1}10$ delle quali l'ultima fu ammessa per analogia non essendosi mai potuta determinare.

Le facce 010, 001, 110, 101 sono le più comuni e si hanno in tutti i cristalli; sono più rare le faccie 130, $\bar{1}30$ e 021. Anche in questo caso, come già nell'epidoto, la forma quasi lineare ed appena visibile di queste ultime facce tende a dare spesso ai cristalli delle forme apparenti meno complesse.

Le faccie 110, 101 sono abitualmente rugose e quasi damascate, quelle 010 sono sempre striate parallelamente alle loro intersezioni con 110. Sfaldatura perfetta secondo 001.

Spessissimo l'albite è colorata in verdastro per inclusioni di cristalli microscopici di epidoto; la posizione reciproca dei cristalli di albite e di epidoto porta a stabilire che questi due minerali sono contemporanei ; abbondano diffatti i cristalli di albite che sembrano modellarsi su quelli di epidoto e viceversa non sono rari i cristalli di epidoto contorti, spezzati, spostati o schiacciati da cristalli di albite ; di più , come vedremo , oltre alle già notate inclusioni di epidoto nell'albite, si hanno anche dei casi di albite inclusa nell'epidoto.

Due analisi di questo minerale diedero i seguenti risultati :

	1ª	2ª	Media
$Si\,O_2$	67,73	67,59	67,66
$Fe_2\,O_3$	0,70	0,81	0,75
$Al_2\,O_3$	16,91	17,16	17,03
$Mg\,O$	0,18	0,10	0,14
$Ca\,O$	3,81	3,78	3,79
$K_2\,O$	0,81	0,87	0,85
$Na_2\,O$	9,21	9,11	9,16
	99,35	99,42	99,38

Come risulta da questi valori, quest'albite è ricchissima in calce ; la provenienza di questa calce non è però ben determinata. Come farò vedere quando parlerò dei caratteri microscopici della roccia incassante, anche per i suoi caratteri ottici quest'albite si presenta ricca in calce; per altra parte non occorre scordare che l'albite contiene sempre delle inclusioni, assai numerose

Digitized by Google

di epidoto che tendono ad alterarne la formola aumentando la quota della calce.

Le piccole traccie di magnesia provengono probabilmente da qualche inclusione di anfibolo.

Per quest'albite quindi, senza dare una vera formola, mi limito ad ammettere in essa una grande ricchezza in calce che la fa tendere verso la costituzione dell'oligoclasio.

Calcite. — E forse il minerale più comune nelle località da me visitate. Si presenta in bellissime cristallizzazioni di tipo scalenoedrico nelle roccie paleozoiche che costituiscono le grandi formazioni calcari del Chaberton ed anche nelle roccie prepaleozoiche abbonda, specialmente negli schisti lucidi e nei serpentini che soventi passano a delle vere oficalci a cui appartengono i noti marmi verdi di Bousson e di Rochemolles. In questi casi la calcite assume generalmente un tipo romboedrico, sebbene non manchino però neppure i casi di cristalli scalenoedrici appartenenti a queste formazioni e sono appunto di questo tipo i cristalli che ho osservato nel giacimento studiato.

Questi cristalli sono generalmente di dimensioni piuttosto grandi superando anche i due o tre centimetri di lunghezza, ma si presentano quasi sempre aggregati. Le forme cristalline determinate sono solamente due: lo scalenoedro $20\bar{1}$ ed un romboedro ottuso indeterminabile perchè aveva le faccie curve e profondamente striate.

I cristalli di questa calcite sono trasparenti e perfettamente incolori; la loro posizione rispetto all'epidoto, all'albite ed all'anfibolo basta a dimostrarne la loro origine secondaria; essi sono sempre addossati ai cristalli di epidoto e di albite, modellandosi su di essi senza che mai abbia notato un caso solo in cui dei cristalli di epidoto e di albite o fossero spostati dalla calcite o fossero su di essa impiantati.

Chimicamente questa calcite è purissima ed ho stimato inutile farne un'analisi quantitativa, avendo avuto dei saggi qualitativi che mi accertavano della mancanza assoluta del protossido di ferro e della magnesia.

Quarzo. — Con la calcite costituisce i minerali che più si riscontrano nell'alta valle della Dora Riparia; oltre che nella

Digitized by Google

zona gneissica dove furono determinate le sue poco complicate forme da Piolti (1) abbonda nelle roccie della zona delle pietre verdi, specialmente negli schisti argillosi.

Sopra Cesana esiste, sulla strada che conduce al colle di Sestrières, un affioramento di schisti rossi interessanti per le contorsioni delle loro stratificazioni, secati in ogni senso da numerosissime venature di quarzo cristallizzato. Grandi formazioni quarzitiche si hanno nel gruppo d'Ambin e specialmente alla Bognosa di Etiache dove le quarziti costituiscono una mole che si eleva a circa 3500 metri sul livello del mare; in esse abbondano i cristalli però, da quanto mi fu dato osservare, con poca complessità di forme.

Così pure nella zona sovrastante dei calcari trovasi generalmente il quarzo od in venature od in cristalli completi sparsi nella massa e che sembrano essersi formati per sospensione.

Nel giacimento studiato il quarzo lo si può solo considerare come elemento accessorio; rarissimo nei punti centrali dell'affioramento, abbonda di più verso la periferia vicino alla zona di contatto con i calceschisti e gli schisti lucidi circostanti assai ricchi in quarzo.

Esso si trova generalmente concentrato, come già notai, in piccole vene che partono dalle zone esterne e che riempiono probabilmente delle litoclasi della roccia; talvolta, ma raramente, trovasi pure impiantato nelle druse ma sempre a contatto con epidoto.

I cristalli sono assai piccoli, non superando mai i 6 od 8 millimetri; il loro aspetto esterno è variabilissimo essendo alle volte incolori, altre volte bianchi lattei, gialli per inclusioni ferruginose, bruni per patine di limonite che li ricoprono.

Le forme cristalline di questo quarzo sono affatto comuni; tutti presentano le solite forme $[100.22\bar{1}]$ $2\bar{1}\bar{1}$ a cui raramente si aggiunge la $4\bar{1}\bar{2}$; alcuni hanno sulle facce del prisma, in prossimità degli spigoli $2\bar{1}\bar{1}.100$ e $2\bar{1}\bar{1}.22\bar{1}$, delle striature parallele a tali spigoli, striature che possono far ammettere la presenza di qualche romboedro acutissimo non determinabile.

In un cristallo trovai una speciale e marcata tendenza a spaccarsi secondo superficie quasi piane, rugose, disposte, all'in-

(1) Piolti, *I minerali dello gneiss di Borgone*, loc. cit.

Digitized by Google

grosso, parallelamente alle faccie 100; ciò potrebbe far supporre in esso una sfaldatura parallela a tali faccie.

I cristalli hanno tutti forma prismatica e sono piuttosto allungati, seguendo in ciò la tendenza comune a tutti i cristalli di queste località e delle vicine, come lo attestano i numerosissimi cristalli del Delfinato e della Savoja. Credo quindi interessante e degno di nota l'abito speciale di un gruppo di cristalli provenienti da alcuni frammenti di calcare del Chaberton. In questi, che sono assai piccoli, si nota una tendenza spiccatissima alla scomparsa del prisma e secondariamente all'annullamento anche delle faccie $22\bar{1}$.

Quelli in cui si nota solo la mancanza quasi completa del prisma assumono il tipo di bipiramide esagona; quelli in cui anche le facce $22\bar{1}$ tendono a scomparire assumono una forma, abbastanza poco comune nel quarzo, costituita dal solo romboedro 100 sui cui vertici le faccie $22\bar{1}$ e $2\bar{1}\bar{1}$ compariscono come piccole smussature; oltre alle comuni forme ho in essi determinata la $4\bar{1}\bar{2}$.

Ematite. -- Questo minerale non presenta alcun carattere interessante. È costituito da finissime scaglioline di aspetto lucente, un po' terroso, che in alcuni punti assumono un vero aspetto polverulento e si trova generalmente sotto forma di sottili patine che ricoprono i cristalli di albite e di epidoto; i suoi caratteri esterni e la sua posizione sono sufficienti a determinarne la origine secondaria.

Si trova pure, sempre sotto la medesima forma, in alcune spaccature e su alcune superficie di rottura che debbono essere recentissime e che corrispondono forse a delle antiche screpolature in cui già si era depositata l'ematite.

Pirite. — È questo il minerale più raro fra quelli appartenenti al giacimento studiato. Ad eccezione di pochi cristallini a contorni poco definiti sparsi presso la zona d'inserzione dei cristalli, non la trovai abbondante che nel nodulo di epidoto fibro-raggiato, nodulo che può considerarsi come una piccola geoda in cui le condizioni in cui la cristallizzazione avvenne determinarono la speciale disposizione dell'epidoto.

In quel nodulo la pirite ha tutti i caratteri di un minerale secondario e si presenta sotto forma di cristallini il cui massimo

Digitized by Google

sviluppo non supera il millimetro, e che sono spesso quasi microscopici; in essi riconobbi come uniche forme il cubo ed un pentagonododecaedro indeterminabile.

Questi cristallini presentano la loro superficie alterata generalmente in limonite; rotti presentano nell' interno una colorazione gialla, metallica analoga a quella della pirite inalterata.

Terminata così la descrizione dei minerali notati nel giacimento descriverò brevemente le osservazioni microscopiche fatte su alcune lamine sottili della roccia incassante.

Queste sezioni furono fatte con frammenti poco lontani dalle druse cristallizzate ed alcune anzi furono fatte proprio presso la zona d'inserzione dei cristalli.

Questa roccia incassante è colorata in verde grigio; la presenza delle venature di cui già ho parlato dà ad essa un aspetto poco omogeneo sia per il colore che per la struttura che è alle volte micromera e necessita l'uso della lente per la determinazione degli elementi costitutivi ed alle volte abbastanza a grossa grana tale da potersi facilmente discernere gli elementi constitutivi ad occhio nudo.

Lo studio delle sezioni microscopiche di cui ho già parlato mette in evidenza gli stessi caratteri di eterogeneità in quanto si riferisce alla disposizione degli elementi e ciò specialmente nelle sezioni fatte proprio a contatto con le druse cristallizzate; in questi punti si notano degli addensamenti degli elementi corrispondenti agli addensamenti dei minerali nelle druse.

Unici elementi notati sono: un feldispato plagioclasico, epidoto ed anfibolo; gli altri minerali mancano completamente ad eccezione forse del quarzo che compare come elemento accessorio in prossimità delle venature quarzitiche. Questa mancanza assoluta degli altri minerali appoggia quanto già dissi sulla loro origine secondaria.

Il feldispato plagioclasico sembra esser costituito da *albite* come del resto è naturale, considerato l'intimo legame esistente fra le druse e la porzione della roccia incassante. La geminazione avviene sempre secondo la legge dell'albite; i geminati si presentano generalmente come grandi cristalli a contorni poco

Digitized by Google

definiti che penetrano ripetutamente gli uni negli altri, presentando in alcuni punti dei caratteri che si avvicinano a quelli delle geminazioni polisintetiche.

Nessun altro tipo di geminazione fu osservato.

Le direzioni di estinzione diedero degli angoli varianti entro limiti poco estesi: 3° a 3°, 30′ e 15° a 16°, 30′. Questi angoli un po' inferiori a quelli dell'albite normale e tendenti verso quelli dell'anortite dimostrano che realmente questa albite è ricca in calce. Essa non presenta generalmente dei caratteri idiomorfi molto spiccati essendo generalmente in plaghe a contorni poco definiti; tuttavia in alcuni punti delle sezioni ed anche in queste plaghe non mancano dei cristalli a contorni piuttosto netti. Essa è ricca di inclusioni di epidoto e talora anche di anfibolo; a sua volta la si può vedere inclusa in cristalli di epidoto. Colorazioni nulle od appena sensibili con debole rilievo.

L'*epidoto* presenta dei caratteri idiomorfi più spiccati di quelli dell' albite; è, come già notai, pochissimo colorato e si rende poco sensibile il suo pleocroismo; presenta però delle colorazioni assai vivaci con forte rilievo. Le sezioni allungate si estinguono quasi longitudinalmente (ho determinato un angolo variante fra 1° e 2°); in alcuni punti i cristalli si presentano sotto forma di sezioni rombiche il cui carattere monoclino è però distintamente manifestato dall' inclinazione delle linee di estinzione; contiene, come già dissi, delle inclusioni di albite e spesso, nella sezioni fatte proprio alla base delle druse, si presenta avviluppato da fibre di anfibolo.

L'*anfibolo* presenta assai distinti i caratteri di minerale dicroico; la sua fibra è finissima e come già nel minerale, ha struttura asbestoide. Si trova sparso ovunque occupando tutti i vani vuoti, rivestendo soventi i cristalli di epidoto e coprendo in certi punti delle plaghe assai vaste nelle quali oltre ad esso si notano solo pochi cristalli di epidoto.

Queste sezioni, come già dissi, furono fatte in prossimità delle druse e quindi i caratteri osservati non si possono considerare come riferentisi, in modo assoluto, alla massa della roccia, poichè è probabile che coll'allontanarsi dalle druse, gli elementi mineralogici subiscano delle modificazioni non solo in quanto si riferisce alle proporzioni relative secondo cui entrano a costituire la

Digitized by Google

roccia, ma forse anche nella loro stessa struttura; queste sezioni fatte così vicine alle druse non si possono considerare come vere sezioni della roccia, poichè si deve considerare questa zona di inserzione come un addensamento degli elementi che nelle druse sono cristallizzati, e quindi come più prossima alle druse che alla roccia.

Così l'albite cristallizzata ha dato un quantitativo di calce molto forte, superiore alla grande maggioranza delle albiti analizzate; nelle sezioni fatte essa presenta pure dei fenomeni ottici che accertano la sua ricchezza in calce senza che in questo secondo caso si possa tale eccesso riferire, come nel primo, a delle inclusioni eterogenee.

Ora l'albite come elemento litico è piuttosto raro; molte roccie che nelle geodi presentano dell'albite, sono invece nella loro massa costituite da oligoclasio; non è quindi molto improbabile l'ammettere che il feldispato che nelle druse si manifesta come vera albite, che nelle zone prossime alle geodi si manifesta come albite assai calcifera, sia nella vera roccia sostituita da oligoclasio; e forse la formazione dell'epidoto è una conseguenza di questa eliminazione di calce (che avviene dall'interno all'esterno della roccia nella trasformazione dell'oligoclasio nell'albite).

Ma prima di classificare la roccia occorre ancora tornare qualche istante su quel minerale giallo-bruno, che ho ammesso essere il risultato di una possibile alterazione dei minerali della geoda, allo scopo di osservare se si abbiano delle ragioni per ammettere realmente questa alterazione e se quest' alterazione, qualora esista, debba essere considerata come generale o solo come limitata alle geodi ed alle zone di roccia incassante.

L'esistenza del minerale giallo-bruno non necessita l'ipotesi di questa alterazione perchè esso potrebbe essere il risultato di un miscuglio, a proporzioni variabili di anfibolo e di epidoto che abbia assunto una forma fibrosa.

I cristalli di epidoto notati nelle sezioni microscopiche appoggerebbero però, fino ad un certo punto, l'ipotesi di questa alterazione perchè essi si presentano spesso avvolti come da reti di anfibolo grigiastro; viceversa si hanno dei cristalli completamente inalterati ed abbastanza voluminosi; anche la formazione secondaria della calcite e del sesquiossido di ferro (e della pirite) potrebbe pure spiegarsi con quest' ipotesi: ammettendoli come i prodotti di eliminazione di questa alterazione; ma contro di essa sta un fatto piuttosto importante ed è la mancanza in tutto

Digitized by Google

il giacimento di minerali capaci di cedere la magnesia necessaria per tale trasformazione, poichè le minime quantità di magnesia trovate nell'epidoto si debbono ascrivere a delle minime traccie di anfibolo e non ad un elemento costitutivo dell'epidoto.

Un altro fatto degno di esser ricordato e che non è certo fatto per sorreggere l'ipotesi dell'alterazione si è che in alcuni punti le fibre giallo-brune del minerale intermedio finiscono in fibre bianche, setacee che si possono considerare come vero amianto.

Tuttavia non credo si possa eliminare totalmente l' ipotesi di questa alterazione ridotta nei limiti di un fatto puramente particolare avendo avuto occasione di notare su un cristallino di albite molte piccole macchie verdi che terminavano al difuori con dei piccoli ciuffetti di fili d'anfibolo, macchiettine che, osservate con un ingrandimento di 30 diametri, si manifestavano per cristalli di epidolo.

Su questa alterazione concludo col dire che è probabile che esista, ma come già dissi, limitata solo ad alcuni punti e che essa non sia la comune trasformazione dell'anfibolo in epidoto, ma bensì la trasformazione inversa poichè, come già notai, l'epidoto ha dei caratteri che lo dimostrano come coetaneo dell'albite.

Ammesso che l'alterazione, nel caso in cui esista, sia solamente superficiale essa non avrà avuto nessuna influenza sulla costituzione della roccia, dove realmente, anche solo osservando le sezioni microscopiche fatte a qualche distanza dalla zona d'inserzione dei cristalli, non ci sono dei fenomeni che mi possano far ammettère questa alterazione, ed essa si potrà quindi considerare come una roccia costituita essenzialmente di albite, anfibolo ed epidoto. Sebbene in alcuni punti la ricchezza in anfibolo sia tale da dare alla roccia un'aspetto di vera anfibolite, tuttavia l'abbondanza del feldispato non mi permette di considerare la roccia come un anfibolite feldispatica ed epidotica, ma piuttosto come una *diorite attinolitica* ricca in epidoto, ammesso che nella roccia l'albite venga sostituita da oligoclasio.

Gabinetto Mineralogico dell' Università di Torino.

Digitized by Google

Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali o per la torsione di fili di nichel;

Nota del Dott. ADOLFO CAMPETTI

I.

1° Scopo principale di questo lavoro era di esaminare l'influenza di temperature elevate sopra le correnti che si ottengono sia allungando od accorciando spirali di filo nichel, sia torcendo fili del metallo stesso ed in special modo di esaminare se queste correnti si annullino verso i 350°, temperatura alla quale il nichel perde le sue proprietà magnetiche.

Ho però creduto necessario premettere alcune esperienze sulle correnti che si hanno a temperatura ordinaria e specialmente confrontare le correnti che si ottengono per la torsione (correnti di torsione) con quelle ottenute per allungamenti di spirali e che potremo chiamare con Braun di deformazione. — Per le Memorie che più strettamente si riferiscono al presente argomento vedasi la nota a piè di pagina (1).

2° Il filo di nichel adoperato era dello stesso di cui già ho usato altra volta (V. Nuovo Cimento 1890) e il galvanometro era quello astaticor esistenza eguale a 0,34 Ohm. già da me adoperato che per una distanza di metri 2.40 dello specchio dalla scala dava una divisione della scala per 0,0000001 Ampère.

Nelle esperienze di torsione il filo veniva stretto alle sue estre-

(1) BRAUN, *Ueber Deformationströme, etc.*, W. A. 1889. V. 37. 38. — *Bemerkungen über Deformationströme.* W. A. 1890.

ZEHNDER, *Deformationströme.* W. A. 1890. V. 38. — *Ueber den Einfluss von Dehnung und Torsion auf das magnetische Moment von Nichel und Eisen-Drähte, etc.*, W. A. 1889. V. 41.

Digitized by Google

mità tra due morsette di ottone, di cui l'una fissa, l'altra avvitata sulla testa di un asse girevole, la cui rotazione era misurata sopra un cerchio graduato. Il filo teso orizzontalmente poteva essere disposto sia nel meridiano magnetico, sia perpendicolarmente ad esso.

La corrente non è proporzionale alla torsione che dentro limiti assai ristretti: per torsioni forti la corrente cresce meno rapidamente della torsione stessa: lo stesso vale per le correnti di deformazione.

Tanto nella torsione quanto nella deformazione di spirali ha luogo il fenomeno di isteresi; limitandoci al caso della torsione questa isteresi era più sensibile nel caso in cui il filo fosse teso nel meridiano magnetico.

Nelle due tabelle seguenti sono riassunte alcune osservazioni relative a questo fenomeno: le esperienze si eseguivano così. Si torceva ripetutamente il filo di uno stesso angolo, per es. di 95°, (V. I tabella) dopo alcune torsioni la direzione ottenuta al galvanometro era sempre la medesima (45 divisioni): si torceva allora il filo di un angolo maggiore (130°): anche qui, dopo le prime torsioni, in tutte le successive si aveva al galvanometro una stessa deviazione (61): allora si dava di nuovo al filo la torsione primitiva (95°): la deviazione era maggiore della primitiva, e dopo varie torsioni assumeva un valore (51,5) che restava poi lo stesso per tutte le successive torsioni. In questo modo sono state costruite le due tabelle seguenti.

I. *Filo torto con* 45.

Deviazione	95°	130°	95°	130°	95°	195°	95°
Torsione	45	61	51,5	61	52,5	87	54,5

II. *Filo torto con* 44.

Deviazione	95°	50°	95°	50°	95°	130°	150°	130°	150°	130°	95°
Torsione	121,5	80	119	81,5	118	139,5	181	169	179,5	169	153,5

Credo inutile di insistere maggiormente sopra queste esperienze perchè già ne è stato trattato ampiamente nella citata memoria

Digitized by Google

di Zehnder; solo ho voluto riportare gli esempi sopra scritti per essere le condizioni dell'esperienza alquanto diverse.

Debbo pure aggiungere che alle indicazioni date dal galvanometro non è stata portata la correzione relativa allo smorzamento delle oscillazioni, che era del resto assai piccolo: quando se ne voglia tener conto basterà moltiplicare i numeri ottenuti per $1+\frac{1}{2}\lambda$ ove $\lambda=0,06$.

3° Poichè anche nelle esperienze seguenti ho esaminato, ora le correnti di torsione ora quelle di deformazione, così ho creduto opportuno di stabilire un confronto fra le une e le altre.

Dalle esperienze risulta che per deformazioni molto piccole i due modi di ottenere la corrente possono ritenersi come equivalenti (per esempio quando la torsione non superi i 100° per metro di filo); per deformazioni maggiori invece le differenze riescono assai sensibili. Sarà bene però premettere queste considerazioni.

Sia h l'allungamento che subisce una spira di un'elica avvolta sopra un cilindro di raggio R, cioè l'aumento di lunghezza del passo di essa elica, ed ω sia la torsione che per questo allungamento subisce l'unità di lunghezza del filo: allora se h è abbastanza piccolo di fronte ad R da poterne per una prima approssimazione trascurare le potenze superiori alla prima, tra queste quantità sussiste la relazione.

$$\omega=\frac{h}{2\pi R^2}.$$

Se l è la lunghezza totale del filo avvolto ad elica ed n il numero delle spire poichè $2\pi R.n=l$, la torsione totale sarà

$$\Omega=\frac{2\pi R.nh}{2\pi R^2}=\frac{nh}{R}=\frac{H}{R}$$

essendo H l'allungamento subìto dalla intera spirale.

Possiamo verificare questa formula in tal modo. Ad un filo di determinata lunghezza si dia una certa torsione e si noti la deviazione ottenuta al galvanometro: lo stesso filo poi si avvolga ad elica sopra un cilindro di raggio noto (in modo che l'allungamento della spirale produca nel filo una torsione dello stesso senso della precedente) e si osservi la corrente data da un al-

Digitized by Google

lungamento di questa spirale. Supposto che si resti con queste deformazioni sempre in quei limiti dentro i quali si può ritenere sussista proporzionalità fra la deformazione e la corrente, possiamo calcolare la torsione che per effetto dell'allungamento della spirale ha subìto il filo e di qui la corrente: dovremo ottenere un numero uguale o poco differente da quello direttamente osservato. La verificazione fu fatta per tre fili diversi

I. Torsione del filo 55 gradi - Deviazione al galvanometro 19.

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di 8 millimetri di raggio dette per un allungamento di mill. 10 una deviazione di 23.

Si ha quindi in questo caso:

Deviazione osservata	Calcolata
23	24,5

II. Torsione 50° — Deviazione 22.

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di mill. 8,2 di raggio dette per un allungamento della spirale di mill. 11 una deviazione di 32.

Si ha quindi:

Deviazione osservata	Calcolata
32	33,8

III. Torsione del filo 95° — Deviazione 18,2

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di mill. 8,2 di raggio dette per un allungamento di mill. 11 una deviazione di 16.

Si ebbe quindi:

Deviazione osservata	Calcolata
16	14,5

Quando si tratti invece di deformazioni assai maggiori le correnti ottenute per torsione o per allungamento di spirali si comportano assai diversamente; nè questo deve far meraviglia giacchè nel secondo caso alla torsione accompagnandosi la flessione, lo stato molecolare del filo deve risultare modificato in maniera differente. Il fatto più notevole, già osservato da Braun è questo. Se ad un filo si danno torsioni per esempio tutte fra loro uguali e *consecutive* in modo cioè che dopo la prima torsione si lasci

Digitized by Google

il filo torto e la seconda torsione venga data al filo già torto per la prima e così via, le correnti, che rispettivamente si ottengono, vanno decrescendo fino ad annullarsi quasi completamente. Se invece si allunga una spirale dandole, per esempio, una serie di allungamenti uguali e *consecutivi*, nel senso di prima, le correnti rispettive vanno da principio decrescendo, ma quando per l'insieme di queste deformazioni la spirale abbia acquistata una certa lunghezza, la corrente cambia direzione nel filo e torna di nuovo a crescere etc.

Però secondo Braun questa inversione avverrebbe costantemente quando la lunghezza totale della spirale è divenuta la metà della lunghezza totale del filo. Invece, almeno per la qualità di filo da me adoperata, il fenomeno non avviene così: solamente per spirali di diametro sufficientemente grande l'inversione avviene in quelle condizioni; per spirali di diametro minore l'inversione ha luogo per allungamenti assai minori.

Per esempio:

I. Lunghezza del filo avvolto ad elica cm. 113 — Diametro della spirale mm. 22.

Lung. a cui avvenne l'inversione cm. $50 = \frac{110}{2}$ e $113 - 110 = 3$.

II. Lunghezza del filo avvolto cm. 172,4 — Diametro della spirale mm. 16,5.

Lunghezza d'inversione cm. $77{,}7 = \frac{155{,}4}{2}$ e $172{,}4 - 155{,}4 = 17$.

III. Lunghezza del filo avvolto cm. 56 — Diametro della spirale mm. 16,5.

Lunghezza di inversione cm. $19{,}5 = \frac{39{,}0}{2}$ e $56 - 39 = 17$.

IV. Lunghezza del filo avvolto cm. 85 — Diametro della spirale mm. 12.

Lunghezza di inversione $31 = \frac{62}{2}$ e $85 - 62 = 23$.

V. Lunghezza del filo avvolto cm. 83,4 — Diametro della spirale mm. 8,3.

Si ebbe una prima inversione quando la lunghezza della spirale fu di cm. $16 = \frac{32}{2}$ e $83{,}4 - 32 = 51{,}4$.

Si ebbe una seconda inversione della corrente, cioè la cor-

Digitized by Google

rente riprese nel filo la direzione primitiva quando la lunghezza della spirale fu di cm. 54.

VI. Lunghezza del filo avvolto cm. 86 -- Diametro della spirale mm. 8,3.

Lungh. a cui avvenne la I^a inversione nella corrente cm. 14 circa.
» » la II^a » » » 29 »
» » la III^a » » » 74 »

Da ciò che precede risulta come l'inversione nella direzione della corrente avvenga tanto più presto quanto minore è il diametro della spirale non solo, ma che, quando il diametro è assai piccolo, alla prima inversione ne può succedere una seconda e una terza; la corrente però che la spirale dava dopo la prima inversione per un certo allungamento del filo non raggiungeva mai il valore della corrente data dalla spirale per un allungamento uguale al principio della deformazione.

Si deve anche notare che il filo adoperato precedentemente era ancora nuovo e quindi non aveva certo subìto forti torsioni prima di essere avvolto a spirale. Chè, se si fa uso di filo già torto, il fenomeno dell'inversione può anche sparire. Per esempio con un filo torto poi avvolto ad elica, in modo che per l'allungamento della spirale si producesse nel filo una torsione dello stesso senso di quella già subìta, non fu possibile ottenere l'inversione.

II.

Influenza della temperatura. — 1° L'apparecchio riscaldante di cui feci uso si componeva di due cilindri metallici di diametro differente posti l'uno dentro all'altro e riuniti fra loro alle estremità. Lo spazio lasciato vuoto tra i due tubi si riempiva con sabbia: nell'interno del tubo minore veniva posto il filo o la spirale da riscaldare: i capi del filo passando attraverso a tappi di amianto venivano poi opportunamente collegati al galvanometro.

Riscaldando direttamente il tubo esterno con fiamme a gas fu possibile di raggiungere i 350 gradi, mantenendo per un tempo sufficientemente lungo la stessa temperatura in tutti i punti del tubo.

In tutte queste esperienze, come nella maggior parte delle precedenti, non potendo essere evitate le correnti termo-elettriche, si faceva uso per la compensazione di una pila campione Daniell.

Digitized by Google

Perciò si ponevano i due capi di un circuito derivato della pila (contenente una cassetta di resistenza) in comunicazione, mediante contatti a mercurio, cogli estremi del filo di nichel e coi fili che andavano al galvanometro. Variando convenientemente la resistenza nella cassetta si poteva ridurre il galvanometro allo zero. Siccome poi nella cassetta la resistenza era sempre di qualche centinaio di Ohm, si poteva ritenere che la corrente data dal filo o dalla spirale di nichel passasse tutta attraverso il galvanometro.

Ciò posto, era prima di tutto necessario verificare se la temperatura abbia sulla intensità delle correnti un'influenza permanente; vale a dire se, quando il filo dopo il riscaldamento, è tornato alla temperatura ordinaria, dia ancora la medesima corrente che forniva prima del riscaldamento. Ora questo non avviene, cioè, dopo che il filo è stato riscaldato (qualunque sia la sua posizione rispetto al meridiano magnetico), la corrente alla temperatura ordinaria è in generale superiore alla primitiva; questa corrente però va decrescendo nelle prime torsioni che hanno luogo dopo il riscaldamento, finchè assume un valore definitivo differente dall'iniziale.

Fra le varie esperienze scelgo le seguenti: le osservazioni sono fatte tutte a 18° gradi:

1ª Spirale.

	18°	dopo 135°	dopo 232°	dopo 338°
Prima deviazione . .	. . . . 106, 5	114	117, 5	132
Deviazione definitiva	. . . .	108, 5	110, 5	121

2ª Spirale.

	18°	dopo 200°	dopo 296°	dopo 350°
Prima deviazione . .	 50	92	98	108
Deviazione definitiva	. . . .	79	87	93

Digitized by Google

Correnti di Torsione.

	18°	dopo 260°	dopo 300°	dopo 200°	dopo 300°
Prima deviazione. .	63, 5	92, 5	94	90	93
Deviazione definitiva	. . .	83, 5	85, 5	85, 5	87

2. Volendo ora osservare le correnti date dal filo a diverse temperature ho trovato praticamente più conveniente di servirmi di spirali, giacchè nel caso delle correnti di torsione non essendo possibile di avere un riscaldamento perfettamente uniforme in tutto il filo, nascevano nell'atto della torsione delle correnti termo-elettriche variabilissime da esperienza ad esperienza, che rendevano impossibili le osservazioni. Si usò allora questa disposizione. Da un medesimo filo si formarono due spirali consecutive di ugual numero di giri, ma avvolte in senso opposto; la lunghezza totale delle due spirali era circa la metà di quella del tubo di riscaldamento; le estremità opposte delle due spirali, cioè le più vicine alle estremità del tubo, erano tenute fisse mediante bacchette di vetro; all'incontro delle altre due estremità contigue era fissata un'altra bacchetta di vetro che veniva all'esterno attraverso a uno dei tappi di amianto. Tirando la bacchetta una delle due spirali si allungava, l'altra si accorciava della stessa quantità; ma essendo avvolte in senso opposto, la corrente nel filo aveva in ambedue lo stesso senso.

Si fecero esperienze con due coppie di spirali: l'allungamento non superò i tre centimetri; quanto all'aumento di resistenza del filo riscaldato, risultò da varie esperienze doversi attribuire al coefficiente di temperatura il valore 0,0063 (almeno da 200° fin sopra i 300°).

Ecco ora i dati e i risultati delle esperienze:

1ª *coppia di spirali.* -- Porzione di filo di nichel interna all'apparecchio riscaldante, metri 2,20.

Sua resistenza a 16° = Ohm 0,294.

Digitized by Google

Resistenza del rimanente circuito, compreso il galvanometro, a 16° = Ohm 1,046.

Resistenza totale a 16° = Ohm 1,340.

2ª *coppia di spirali.* — Filo di nichel interno, metri 2,74.

Sua resistenza a 18° = Ohm 0,350.

Resistenza del rimanente circuito Ohm 1,000.

Resistenza totale a 18° = Ohm 1,350.

Nelle tabelle seguenti sono riassunte tre serie di esperienze per la prima coppia di spirali e una sola serie per la seconda: nella prima colonna sono segnate le temperature (T); nella seconda le deviazioni calcolate dalla formola $D = d\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)$ ove d è la deviazione osservata; nella terza colonna i prodotti (R D) di queste quantità per le rispettive resistenze del circuito calcolate in base al valore scritto sopra del coefficiente di temperatura. Nell'ultima linea di ciascuna tabella sono segnati due valori per D, quindi per $R\,D$, giacchè si è notata la deviazione ottenuta per la prima torsione data al filo raffreddato e la deviazione ottenuta nelle altre torsioni successive.

I.

T	D	$R\,D$
16°	87, 5	117, 2
170°	69	112, 1
235°	59	102, 6
280°	45, 5	83, 6
296°	42, 5	78, 9
20°	101 — 89, 5	135, 3 — 119, 9

Digitized by Google

II.

T	D	RD
20°	89, 5	119, 9
260°	49, 5	88, 6
278°	47, 5	86, 6
306°	43, 5	81, 6
350°	34	63, 6
16°	111 — 96	148. 7 — 128, 6

III.

T	D	RD
16°	96	128, 6
217°	61, 5	106, 4
280°	47, 5	87
317°	39	75
322°	38, 5	74, 1
280°	48	87, 9
16°	109 — 96	146, 1 — 128, 6

2ª coppia di spirali:

T	D	RD
18°	124, 5	168, 1
150°	91, 5	150, 5
208°	80, 5	141, 6
260°	66	125, 5
335°	42, 5	88, 6
16°	149 — 133, 5	201, 1 — 179, 5

Digitized by Google

Dalle tabelle precedenti risulta che la forza elettromotrice sviluppata nel filo per la torsione decresce colla temperatura: la diminuzione è più rapida a temperatura elevata (verso i 300°): però anche a 350° la corrente è ben lungi dall'annullarsi. Per conseguenza o le piccole impurità del nichel adoperato (traccie di ferro e arsenico) sono sufficienti a mantenergli le proprietà magnetiche anche oltre i 350 gradi, il che non è probabile, secondo l'esperienze del Berson, ovvero le correnti possono ottenersi ancora, quando le proprietà magnetiche del nichel siano scomparse.

Ho eseguito ancora alcune esperienze a temperatura ordinaria per esaminare l'influenza che la magnetizzazione trasversale del filo esercita sulle correnti da esso date per la torsione. A tale scopo si faceva attraversare il filo da una corrente fornita da pile Bunsen, della quale l'intensità poteva essere aumentata e diminuita gradatamente mediante una resistenza costituita da una colonna di lunghezza variabile di solfato di zinco. L'intensità della corrente veniva misurata col mezzo di una bussola dei seni. Sospesa questa corrente, si torceva il filo e si osservava quale corrente venisse prodotta dalla torsione. Nelle poche esperienze eseguite e con correnti di circa 3 Ampère, la corrente ottenuta per la prima torsione data al filo dopo che era stato attraversato dalla corrente, differiva assai dalla precedente, ma le torsioni successive davano effetto poco diverso da quello ottenuto prima del passaggio della corrente.

Per esempio:

1°. Torsione 125°.

Senso della corrente data dal filo *A-B*. , . . Deviazione $D=52$.

Corrente esterna Ampère 3,228 (nel senso *B-A*).

Dopo il passaggio della corrente esterna. Prima deviazione $D_1=61$.

Deviazione definitiva $D_2=50$.

2°. Torsione 125°.

Senso della corrente data dal filo = *A-B* . . . . . $D=50$.

Corrente esterna, senso *B-A*. Ampère 3,228

Si fece vibrare il filo durante il passaggio della corrente $D_1=69$. $D_2=48,5$.

3°.

Si inverte la direzione della corrente data dalle Bunsen $D=50$.

Corrente Ampère 3,325 . . . . , ... $D_1=44$. $D_2=47$.

4°.

Corrente Ampère 3,009 . . . . $D=47.$

Si fece vibrare il filo . . . . $D_1=43.$ $D_2=47{,}5.$

Lo stesso filo si torce in senso inverso. Torsione 125°.

1°. Corrente di torsione, senso B-A . . . . . . $D=44.$

Corrente delle Bunsen, senso A-B. Ampère 3,236 . . $D_1=55.$ $D_2=44.$

2°. Corrente delle Bunsen, senso A-B. Ampère 3,294 $D=44.$

Si fece vibrare il filo . . . . $D_1=68.$ $D_2=44.$

3°. Corrente delle Bunsen, senso B-A. Ampère 3,312 $D=44.$ $D_1=40.$ $D_2=44.$

$D=44.$

4° Corrente delle Bunsen, senso B-A. Ampère 3,335 $D_1=40.$

Con vibrazione del filo . . . . $D_2=44.$

In questo caso adunque la corrente esterna che diretta in un certo senso produce aumento nella corrente che si ottiene torcendo il filo in un senso dato, produce diminuzione nella corrente che si ha torcendo il filo in senso opposto e viceversa; ciò si accorda assai bene coll'idea dell'orientazione degli elementi magnetici nel filo.

È probabile che con correnti più intense, specialmente se attraversano il filo a temperatura elevata, si abbiano effetti permanenti assai notevoli.

Questo lavoro fu eseguito nel laboratorio di Fisica diretto dal ch. Prof. A. Naccari, cui, per l'aiuto datomi coi suoi consigli, rendo qui vive grazie.

Torino, Giugno 1891

Digitized by Google

Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel;

Studio sperimentale di A. GARBASSO

I.

La questione della influenza di un campo magnetico sulla resistenza elettrica dei metalli è una di quelle intorno a cui dai fisici si è discusso di più; ma, quantunque in trentacinque anni se ne siano occupati abilissimi sperimentatori, le conclusioni, a cui questi giunsero, sono molto discordi.

Ricorderò le principali esperienze fatte sui metalli magnetici.

Edlund (1) sperimentando su fili di ferro e magnetizzandoli con eliche percorse da correnti, conchiuse che in nessun caso v'è alterazione della resistenza o almeno che tale alterazione deve essere inferiore a 0,0002 della resistenza totale.

Due anni dopo, *W. Thomson* (2) trovò per lamine di ferro e di nichel poste in un campo magnetico aumento di resistenza in direzione parallela alle linee del campo, diminuzione in direzione perpendicolare.

G. Wiedemann però osservò (3) che, data la disposizione sperimentale di Thomson, è probabile che i suoi risultati siano stati prodotti da deformazioni dovute all'azione del campo.

Nel 1866 *Beetz* (4) dopo essersi occupato della variazione di lunghezza che avviene in un filo di ferro quando venga ma-

---

(1) E. Edlund, *Versuche über das Elektricitäts-Leitungsvermögen des magnetisirten Eisens, Pogg.* XCIII, 315, 1854.

(2) W. Thomson, *Math. and Phys. Papers,* II, 307.

(3) G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektricität. Dritter Band S.* 724. *Braunschweig*, 1883.

(4) W. Beetz, *Ueber den Einfluss der Magnetismus auf die Länge und den Leitungswiderstand von Eisenstäben. Pogg.* CXXVIII, 193, 1866.

Digitized by Google

gnetizzato longitudinalmente, passò a considerare la modificazione della resistenza che quel filo subisce. Trovò che « *la magnetizzazione aumenta la resistenza del ferro nella direzione dell'asse magnetico* ». I valori ottenuti da lui variano tra $\frac{1}{1650}$ e $\frac{1}{3220}$ Perpendicolarmente all'asse non potè osservare effetto alcuno.

Nel 1877 *Chwolson* (1) in una memoria sopra il reostata a mercurio di Jacobi si occupò incidentalmente delle variazioni di resistenza del ferro magnetizzato longitudinalmente. Egli per primo tenne conto delle modificazioni che il fenomeno subisce al variare della corrente magnetizzatrice e ne rappresentò con una curva l'andamento.

L'anno appresso *F. Auerbach* (2) trovò che la variazione della resistenza del ferro è positiva o negativa secondochè la corrente magnetizzatrice è più o meno grande rispetto a quella che passa nel filo magnetizzato.

I suoi valori variano tra $-0,0186$ e $+0,0281$; egli cercò di confermare con vedute teoriche i suoi risultati sperimentali.

Tomlinson (3) trovò che nel ferro la variazione della resistenza elettrica per l'azione del magnetismo importa il 6 $^0/_0$ almeno (!) della resistenza totale. Per l'acciaio e per il nichel, come per il cobalto e per il bismuto trovò aumento di resistenza in direzione longitudinale.

Secondo *De Lucchi* (4) che sperimentò sopra dischi, la resistenza del ferro cresce in direzione assiale, diminuisce in direzione equatoriale; la variazione importa circa $^1/_{2765}$.

Il *Faè* (5) in una lunga serie di esperienze esaminò una

---

(1) O. Chwolson, *Ueber einen von M. H. von Jacobi construirten Quecksilber-Rheostaten. Carl's Repertorium*, XIII, 203, 1877.

(2) F. Auerbach, *Der Durchgang des galvanischen Stromes durch das Eisen. Wied. Annal.* V, 289, 1878.

(3) H. Tomlinson, *On the Alteration of the Thermal Conductivity of Iron and Steel caused by Magnetism. Proc. Roy. Soc.* XXVII, 109, 1878. — *The Influence of Stress and Strain on the Action of Physical Forces. Proc. Roy Soc.* XXXIII, 276, 1882.

(4) G. De Lucchi, *Intorno all'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità elettrica del ferro in direzione assiale ed equatoriale.* Atti R. I Veneto (5) VIII, 1475, 1882.

(5) G. Faè, *Influenza del magnetismo sulla resistenza elettrica dei conduttori solidi.* Atti dell'Ist. Veneto (6) VI. [illegible]

Digitized by Google

ventina fra metalli e leghe. Trovò per il ferro e per l'acciaio aumento di resistenza, maggiore nel caso in cui il rocchettino di filo, ch'egli adoperava, era perpendicolare alle linee del campo (e però la magnetizzazione in parte longitudinale, in parte trasversale). Notò nell'acciaio un aumento permanente.

Dopo i lavori di Faè s'incontrano quelli di *Goldhammer* e *von Wyss* che sono certamente i migliori su quest'argomento.

Il *Goldhammer*, in due memorie (1) esaminò sei metalli: bismuto, antimonio, tellurio, ferro, nichelio e cobalto. Per isfuggire alle obbiezioni del Wiedemann egli sperimentò su laminette deposte, in generale, elettroliticamente sul vetro platinato. Trovò per i metalli diamagnetici sempre aumento della resistenza, sia che la corrente passasse parallela, sia che passasse perpendicolare alle linee di forza. Pei metalli magnetici trovò aumento se la lamina e la corrente erano parallele alle linee, diminuzione se la lamina era parallela e la corrente perpendicolare. Inoltre tenendo lamina e corrente perpendicolari alle linee, ebbe sempre una diminuzione; osservò pure che una parte della variazione permane in ogni caso nel nichel e nel cobalto, nel caso della diminuzione nel ferro.

In seguito esaminò quantitativamente il fenomeno per il bismuto, il nichel ed il cobalto. Misurò le intensità dei campi impiegati generando delle correnti di induzione in un'elica di filo di rame. Trovò l'effetto proporzionale al quadrato dell'intensità del campo.

Il *von Wyss* (2) si limitò allo studio del ferro, diminuì ingegnosamente le difficoltà della misura ed eliminò le perturbazioni dovute al riscaldamento del filo. Egli misurò direttamente il momento magnetico del filo magnetizzato. Trovò in ogni caso aumento di resistenza; dimostrò la proporzionalità tra l'incremento della resistenza e l'incremento del momento magnetico. Trovò come massimo valore della variazione 0,00044; egli rappresentò con una curva l'andamento del fenomeno e tenne conto anche del magnetismo rimanente.

(1) D. Goldhammer, *Ueber den Einfluss der Magnetisirung auf die electrische Leitungsfähigkeit der Metalle. W. Annal.* XXXI, 360, 1887.

Id. id. id. W. Annal. XXXVI, 804, 1889.

(2) G. H. von Wyss, *Ueber den Einfluss der Stärke der Magnetisirung auf die Aenderung des electrischen Widerstandes des Eisens. W. Annal.* XXXVI, 447, 1889.

Digitized by Google

II.

Io ho studiato il comportamento del ferro, dell'acciaio e del nichel, fermandomi specialmente su quest'ultimo metallo che il von Wyss non aveva esaminato.

§ 1. *Produzione del fenomeno.* — In queste esperienze ho fatto uso di fili metallici avvolti in rocchetti. Per costruire questi rocchetti tagliavo una striscia di cartoncino lunga 20 cm. ed alta 2,5; quindi sui lembi più lunghi praticavo dei piccoli tagli lontani fra loro di 5 mm., ed avvolgevo il filo in modo che su una delle facce i tratti fossero paralleli ai lati corti del cartoncino, sull'altra inclinati di $^1/_5$. In seguito incollavo sulle due facce delle striscie di carta e rotolavo il cartone su sè stesso; avevo così un rocchetto cilindrico in cui metà del filo era parallela all'asse, metà un po' inclinata sull'asse stesso; come vedremo in seguito, questa inclinazione ha ben poca influenza sulla intensità del fenomeno.

Per magnetizzare i rocchetti tentai dapprima di far uso di semplici eliche di filo di rame, ma non ottenni risultato alcuno. Allora adottai l'espediente di magnetizzare per mezzo d'una potente elettrocalamita; l'apparecchio adoperato era di quelli che servono per le esperienze sul diamagnetismo, quali li costruiva Ruhmkorff, attivato da una pila Bunsen, composta da un numero di coppie, che variava secondo i casi fra due ed otto.

In queste condizioni il fenomeno si produceva in modo affatto regolare e soddisfacente.

§ 2. *Misura dell'effetto prodotto.* — Disposto il rocchetto fra i poli dell' elettromagnete e collegatolo con un ponte di Wheatstone, si poneva quest'ultimo in tali condizioni che il galvanometro non fosse attraversato da corrente e si osservava la resistenza.

Ciò fatto, tenendo sempre chiuso il circuito del ponte, si magnetizzava l'elettrocalamita e, dopo qualche minuto per evitare gli errori prodotti da correnti d'induzione, si leggeva la deviazione ottenuta nel galvanometro del ponte di Wheatstone. Essendosi preventivamente misurata (caso per caso) la deviazione che avveniva nel galvanometro per la variazione di un *Ohm*

Digitized by Google

nella resistenza che si paragonava con quella del rocchetto e conoscendosi quest'ultima, si deduceva subito dalla deviazione la ragione, in cui variava la resistenza del rocchetto per effetto della magnetizzazione

In ciascun caso si aveva cura di accertare che sussistesse proporzionalità fra le deviazioni osservate nel galvanometro e le variazioni di resistenza corrispondenti.

Per il ponte di Wheatstone invece d'un galvanometro ordinario feci uso d'un galvanometro aperiodico di Deprez e d'Arsonval, il quale, mentre ha il vantaggio di esigere un brevissimo tempo nelle letture, presenta pure quello, importante in questo genere di ricerche, di non subire in modo sensibile le azioni magnetiche esterne; quindi la possibilità di adoperarlo in vicinanza dell'elettromagnete senza pericolo di errore. Noterò ancora che, per ottenere una sensibilità abbastanza grande nelle letture, invece di osservare direttamente col cannocchiale la scala riflessa nello specchietto del galvanometro si faceva subire al raggio una seconda riflessione.

§ 3. *Misura del campo magnetico.* — Ottenuta così la grandezza dell'effetto prodotto, si trattava di misurare anche l'intensità della magnetizzazione adoperata nei singoli casi, onde dedurne la legge del fenomeno.

A tale scopo prima di ogni espezienza ponevo fra i poli dell'elettrocalamita Ruhmkorff un circuito formato di pochi giri di filo di rame, collegato con un galvanometro Thomson posto a tale distanza dall'elettrocalamita da togliere ogni sospetto di diretta influenza.

Il circuito indotto constava di dieci giri di filo della lunghezza totale di cm. 109.

Magnetizzando l'elettrocalamita si produceva nel circuito una corrente d'induzione, e quindi una deviazione nel galvanometro Thomson. Era poi opportuno di avere una misura almeno approssimativa dei campi magnetici adoperati in unità assolute.

A tal fine sostituii al campo dell'elettrocalamita Faraday quello generato da un'elica di filo di rame percorsa da una corrente nota, portai in questo campo il medesimo circuito che aveva servito durante le esperienze precedenti e misurai gli effetti che la corrente indotta produceva nel galvanometro Thomson.

Digitized by Google

Per l'elica inducente costruii una specie di tamburello di legno, su cui avvolsi 84 giri di filo di rame, disposti in 4 strati di 21 giri ciascuno e della lunghezza complessiva di metri 47.

Il tamburo era attraversato, normalmente al suo asse, da una bacchetta di vetro che si poteva far girare con dolce sfregamento; a questa bacchetta era fissato il piccolo rocchetto prima descritto. Si teneva dapprima la bacchetta in posizione tale che il piano del rocchetto fosse perpendicolare all'asse del tamburo: al momento dell'esperienza poi la si faceva girare rapidamente di 180°.

Per misurare la corrente induttrice mi servii di una bussola delle tangenti, costruita da Siemens e Halske, il cui coefficiente di riduzione si determinò col metodo elettrolitico.

Da queste ricerche risultò che, in ogni esperienza bastava dividere per 0.046 la deviazione prodotta nel galvanometro dal campo magnetico impiegato per avere la intensità del campo stesso nel centro (in dine). I numeri ottenuti in questo modo sono quelli che figurano nelle tabelle seguenti sotto la lettera H.

III.

Esperienze e risultati.

§ 1. *Ferro.* — Le esperienze furono fatte sopra tre rocchetti di filo di ferro (A, B, C) di qualità e provenienza differenti, ricotti i primi due, crudo il terzo. Quando nelle tabelle non è detto nulla in contrario s'intende che i rocchetti erano tenuti con l'asse parallelo alle linee di forza del campo magnetico.

I risultati ottenuti sono riprodotti dalle tabelle 1, 2, 3 e rappresentati dalle curve I, II, III; in queste curve si prese come ordinata l'effetto, come ascissa l'intensità H del campo magnetico nel centro.

Il rocchetto C dopo una serie di esperienze fu ricotto e i nuovi risultati ottenuti sono riportati nella tabella 4.

Nelle due esperienze cui spetta la tabella 5, si studiò l'effetto prodotto da un campo magnetico sopra un rocchetto disposto prima parallelamente alle linee di forza e poi perpendicolarmente.

Non ebbi mai a riscontrare che la magnetizzazione producesse diminuzione di resistenza nel ferro o nell'acciaio.

Digitized by Google

Tabella 1.

Rocchetto *A* ricotto.
Resistenza 0,64 ohm.
Diametro del filo 0,05 cm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
1520	0,001439
2170	0,001953
2170	0,002053
2390	0,002103
2610	0,002349
3480	0,002614
3910	0,002487

Tabella 2.

Rocchetto *B* ricotto.
Resistenza 2,54 ohm.
Diametro del filo 0,02 cm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
460	0,000850
590	0,001045
760	0,001290
980	0,001561
1200	0,001914
2060	0,002587
3480	0,002591

Tabella 3.

Rocchetto *C* crudo.
Resistenza 2,35 ohm.
Diametro del filo cm. 0,52

H	$\frac{\Delta R}{R}$
980	0,001600
1410	0,001819
1520	0,001973
1740	0,002201
3260	0,002513

Tabella 4.

Rocchetto *C* ricotto.
Resistenza 2,28 ohm.
Diametro del filo cm. 0,02.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
3500	0,002592
3910	0,002660

Tabella 5.

Rocchetto $B.H = 3480$

Parallelo alle linee	Perpendicolare alle linee
$\frac{\Delta R}{R}$	
0,002591	0,001150

Digitized by Google

§ 2. *Acciaio.* — Quanto all'acciaio sperimentai su fili di due diverse provenienze. La ricerca riesce in questo caso più difficile che nel precedente, poichè per la magnetizzazione permanente dell'acciaio è necessario ad ogni esperienza svolgere i rocchetti e ricuocere il filo; ne segue anche che i dati sperimentali sono più incerti che pel caso del ferro, poichè ciascuno è il risultato d'una sola esperienza, laddove ciascun numero delle tabelle precedenti risultava come media di 7 a 10 determinazioni.

Cercai di ovviare in parte a questo inconveniente sperimentando in ciascun caso su diversi rocchetti del medesimo filo (D_1, D_2, D_3; E_1, E_2); le tabelle 6 e 7 riproducono i risultati ottenuti.

TABELLA 6.

Rocchetti d'acciaio.

H	870	1300	1850	1850	3910
D_1	0,000828	0,000966	0,001019	0,000872?	0,001207
D_2	0,000942	0,000891	0,001065	0,001029	0,001274
D_3	0,000905	0,001073	0,001152	0,001070	0,001132
Media	0,000891	0,000977	0,001078	0,001049	0,001206

TABELLA 7.

Rocchetti d'acciaio.

H	760	1200	1850	3040
E_1	0,000833	0,001506	0,002118	0,002136
E_2	0,000732	0,001737	0,002121	
Media	0,000782	0,001621	0,002119	0,002136

Digitized by Google

Dall'insieme delle esperienze che ho eseguito sul ferro e sull'acciaio si possono dedurre le conclusioni seguenti:

1. In un filo di ferro o d'acciaio la magnetizzazione produce un aumento della resistenza elettrica, qualunque sia l'inclinazione del filo sulle linee di forza del campo magnetico.

2. A parità delle altre condizioni l'effetto cambia con l'inclinazione del filo sulle linee di forza; è massimo se questa inclinazione è nulla, minimo se è di 90°.

3. Entro certi limiti dell'intensità del campo l'effetto è proporzionale all'intensità stessa.

4. Il ferro crudo è un po' meno sensibile del ricotto, l'acciaio meno del ferro.

5. Esiste un massimo dell'effetto che nelle mie esperienze fu, pel ferro, di circa 0,0026 nelle migliori condizioni, e corrispose a un'intensità del campo di circa 3300 unità (C. G. S.).

§ 3. *Nichel.* — Le esperienze sul nichel, che qui riferisco, furono fatte sopra un rocchetto di filo (I) costruito in modo simile a quello descritto nel caso del ferro.

E notevole la intensità del fenomeno presentato da questo metallo tanto meno magnetico del ferro. La tabella 8 e la fig. IV rappresentano i risultati delle esperienze fatte sopra un rocchetto di filo di nichel disposto parallelamente alle linee di forza.

S'era già veduto nel caso del ferro come, disponendo il filo perpendicolarmente alle linee di forza del campo, l'aumento di resistenza fosse minore che nel caso del parallelismo; volli approfittare della sensibilità del nichel per studiare meglio quest'argomento; i risultati rappresentati dalla figura V, e dalla tabella 9 furono ottenuti tenendo il rocchetto I coll'asse perpendicolare alle linee di forza.

Vedendo la notevole differenza dell'effetto a seconda che si tratta di un filo parallelo o perpendicolare alle linee di forza era naturale che cercassi di determinare con qual legge varia l'effetto stesso col variare dell'inclinazione.

Per questo disposi del filo di nichel, fissato con cura sopra una tavoletta di legno, ripiegandolo a zig-zag in modo da formare tanti tratti rettilinei paralleli fra loro e ai lati maggiori della tavoletta, congiunti da brevissimi tratti perpendicolari. L'assicella era fissata ad un'asticciuola di ferro che giaceva nel piano stesso di quella ed era disposta perpendicolarmente ai lati mag-

Digitized by Google

giori. L'asta di ferro poteva girare sopra se stessa e le era rigidamente connesso un indice perpendicolare ad essa che si muoveva sopra un cerchio graduato.

Essendo l'asse di rotazione orizzontale e perpendicolare alle linee di forza, che erano pure orizzontali, era facile avere, in modo approssimato almeno, l'inclinazione della tavoletta rispetto alle linee.

Sperimentando con tale disposizione a campo costante si notò che s'otteneva una leggiera variazione nell'effetto se, partendo dalla posizione orizzontale della tavoletta, si aumentava l'angolo formato da questa con l'orizzonte fino a 65° circa, mentre poi l'effetto diminuiva rapidamente da questa inclinazione a quella di 90°. Il numero ottenuto come misura dell'effetto, in quest'ultimo caso è notevolmente minore, la metà circa di quello trovato sperimentando col rocchetto I, il che dipende probabilmente dal trovarsi in questo necessariamente una metà del filo inclinata sull'asse.

TABELLA 8.
Rocchetto I di Nichel.
Resistenza 0,89 ohm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
240	0,0016
330	0,0023
480	0,0045
800	0,0068
1130	0,0090
1630	0,0110
2060	0,0119
2280	0,0123
2930	0,0123
4130	0,0123

TABELLA 9
Rocchetto I di Nichel
Resistenza 0,89 ohm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
480	0,0009
760	0,0013
2040	0,0040
2330	0,0042
4780	0,0048

Due delle esperienze fatte su quest'argomento sono riprodotte nella tabella 10, la prima è anche rappresentata dalla curva VI. In questa curva sono ascisse gli angoli di inclinazione, ordinate gli aumenti di resistenza.

Digitized by Google

TABELLA 10.

Inclinazione sulle linee	$\frac{\Delta R}{R}$ $H = 2040$	$H = 2400$
0°	0,0118	0,0123
22° 30′	0,0114	0,0120
45°	0,0110	0,0113
67° 30′	0,0088	0,0098
90°	0,0021	0,0021

L'andamento della curva IV, analogo a quello della curva della magnetizzazione, fece nascere l'idea di ricercare se anche nel caso del fenomeno studiato si presentasse isteresi.

Per verificare questa supposizione operai nel modo seguente. Attivata l'elettrocalamita con 4 coppie Bunsen preparate nel modo più opportuno per ottenere correnti costanti, si misurarono tre campi diversi, ottenuti cambiando la distanza dei poli; si tenne nota di questi risultati e delle distanze dei poli in ciascun caso.

Ciò fatto e interrotta la corrente magnetizzante, si dispose il rocchetto fra i poli collocati alla distanza corrispondente al più debole dei campi misurati innanzi; e, fatta passare la corrente magnetizzante, si determinò l'aumento della resistenza.

Lasciato per cinque o sei minuti l'apparecchio in quiete, si avvicinarono i poli e si misurò il nuovo aumento: questo, sommato col precedente, dà l'aumento totale prodotto dal secondo campo; infine, avvicinati i poli ancora una volta (senza smagnetizzare mai), si ebbe in modo analogo l'effetto prodotto dal campo più forte.

Dopo qualche minuto si fece il cammino inverso e sottraendo la diminuzione di resistenza osservata dalla resistenza che il filo aveva prima che avvenisse la corrispondente diminuzione della intensità del campo, si ottennero le nuove ordinate di punti, aventi ordinatamente le stesse ascisse d'altri punti sperimentali determinati prima facendo crescere l'intensità del campo.

Due di tali esperienze sono riprodotte nelle tabelle 11 e 12; alla tabella 11 corrisponde la figura VII; la curva continua è quella trovata nella prima parte dell'esperienza, la curva punteggiata quella ottenuta nella seconda parte.

Digitized by Google

Oltre a queste esperienze se ne fecero altre in modo un po' diverso. Anzitutto si pose il rocchetto nel campo più intenso, quindi si allontanarono gradatamente i poli in modo da ottenere una diminuzione nella resistenza; giunti al campo più debole, si smagnetizzò e si lasciò per qualche tempo il rocchetto a sè.

In seguito, nuova magnetizzazione, nuovo avvicinamento dei poli alle distanze impiegate poco prima.

TABELLA 11.

↑↓ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
0	—
650	+ 0,0050
1250	+ 0,0040
2390	+ 0,0044
1250	— 0,0027
650	— 0,0024
0	— 0,0037

TABELLA 12

↑↓ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
0	—
540	+ 0,0055
1090	+ 0,0034
2390	+ 0,0043
1090	— 0,0034
540	- 0,0037
0	0,0050

TABELLA 13.

↓↑ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
2390	—
1250	— 0,0042
650	— 0,0058
0	— 0,0038
650	+ 0,0037
1250	+ 0,0026
2390	+ 0,0046

TABELLA 14.

↓↑ Rocchetto I.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
2390	—
1090	— 0,0040
540	— 0,0032
0	— 0,0046
540	+ 0,0042
1090	+ 0,0030
2390	+ 0,0042

Digitized by Google

Dai risultati ottenuti con questo procedimento (↓↑) come da quelli ottenuti nel modo descritto più sopra (↑ ↓), (vedi tabelle 13 e 14; alla tabella 13 corrisponde la curva VIII), pare si possa conchiudere che, anche in questo fenomeno, vale a dire fra la forza magnetizzante e la variazione di resistenza si presenta isteresi come in quello della magnetizzazione.

Dalle esperienze sul nichel, ora descritte, si possono dedurre queste conclusioni:

1. L'effetto della magnetizzazione sopra un filo di nichel è sempre un aumento di resistenza.

2. Tale aumento è massimo quando l'inclinazione del filo sulle linee è nulla, decresce al crescere dell'inclinazione e raggiunge un minimo quando il filo s'è ridotto perpendicolare alle linee.

3. Il nichel presenta un massimo dell'effetto, che ho trovato uguale a 0,0125 circa, nelle condizioni migliori; il massimo fu raggiunto con un campo di 2200 unità (C. G. S.).

4. L'andamento della curva che rappresenta il fenomeno è analogo a quello della curva della magnetizzazione.

5. Tra la forza magnetizzante e la variazione di resistenza si riscontra isteresi.

§ 4. *Altre esperienze sul nichel, magnetizzando con spirali percorse da correnti.* — Oltre alle esperienze descritte precedentemente, altre ne feci con un metodo differente. Si sa che il momento magnetico indotto nell'unità di volume del ferro varia col variare della lunghezza del filo sottoposto alla magnetizzazione e precisamente dipende dal rapporto della lunghezza al diametro, divenendo costante, per una intensità costante del campo, quando questo rapporto ha raggiunto un certo limite.

Ora, nei miei rocchetti i tratti di filo erano necessariamente molto brevi e però era probabile che la saturazione non fosse ancora raggiunta quando si impiegavano campi che sarebbero stati sufficienti a saturare dei fili più lunghi.

E poichè pareva naturale che la variazione della resistenza raggiungesse il suo massimo con il momento magnetico indotto, queste considerazioni mi portavano a concludere che, impiegando dei fili più lunghi, l'aumento massimo di resistenza si sarebbe incontrato con campi molto meno intensi di quelli impiegati precedentemente, anzi, secondo ogni probabilità col campo stesso

Digitized by Google

con cui Ewing (1) aveva raggiunto il massimo della magnetizzazione.

Per verificare queste supposizioni sperimentai sul nichel nel modo seguente:

Il filo impiegato aveva un millimetro di diametro e 40 cm. di lunghezza (400 diametri), doveva quindi ritenersi trascurabile su esso, secondo l'Ewing, l'azione dei suoi poli. Per magnetizzarlo costruii una spirale avvolta sopra un tubo di vetro, a quattro strati di filo, avente in tutto 32 giri per centimetro; onde ovviare all'inconveniente del riscaldamento prodotto dalla irradiazione della spirale magnetizzante, posi il filo di nichel in uno stretto tubo e fra questo e quello che portava la spirale feci circolare una corrente continua di acqua fredda.

Misuravo la corrente magnetizzante con una bussola, l'aumento di resistenza col metodo seguito nelle esperienze precedenti. Dall'intensità della corrente avevo subito quella del campo mediante la nota formola $H = 4\pi in$.

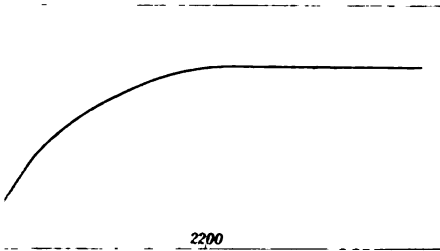
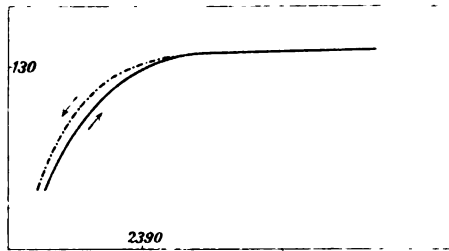
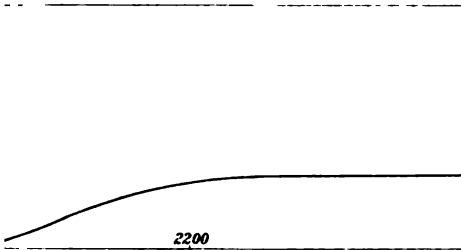
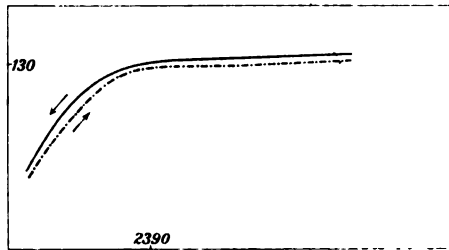
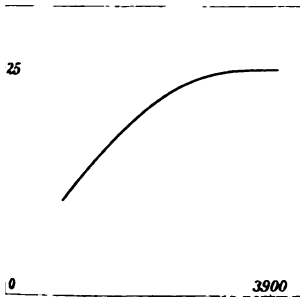
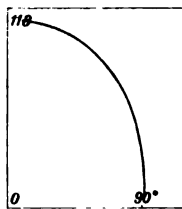
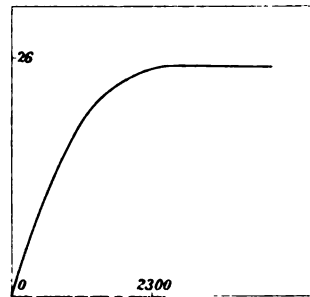
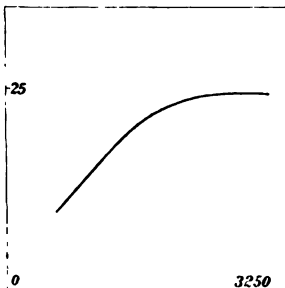
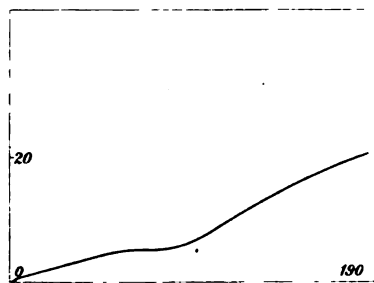
Con questa disposizione feci parecchie esperienze: scelgo tra gli altri i valori seguenti, che sono la media ciascuno di dieci o dodici determinazioni.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
68,7	0,00051
89,5	0,00061
92,3	0,00066
103,8	0,00067
124	0,00105
152,6	0,00154
170,4	0,00177

La curva IX rappresenta queste esperienze. L'andamento di essa ed il valore trovato per la variazione di resistenza nell'ul-

(1) EWING, *Phil. Trans. for* 1885 e *Phil. Trans. for* 1889.

Digitized by Google

Digitized by Google

tima esperienza confrontato con quello trovato con l'uso dei rocchetti e della grande elettrocalamita mostrano che l'aumento di resistenza era ben lontano anche col campo di 170 unità dall'aver raggiunto il massimo, mentre invece la magnetizzazione del nichel, per le esperienze dell'Ewing, che anch'io verificai, doveva essere già prossima al massimo con un campo di 120 unità

Esaminai anche dei fili di ferro e dall'insieme di tutte le esperienze risultano due conseguenze che mi sembrano notevoli e cioè:

1. A pari intensità del campo l'effetto è maggiore su fili lunghi che su fili molto corti; nei due casi però i valori trovati, sono dello stesso ordine di grandezza.

2. L'aumento di resistenza non raggiunge il massimo insieme al momento magnetico indotto; ma solo con un campo di intensità molto maggiore di quella che si richiede per il massimo della magnetizzazione.

Al fine di questo lavoro è per me un gradito dovere ringraziare il prof. Naccari che, nel suo laboratorio, pose a mia disposizione tutti gli istrumenti che mi erano necessarii e, quel ch'è più, mi soccorse dei suoi consigli e della sua esperienza.

Digitized by Google

RELAZIONE sulla Memoria del Prof. ANGELO BATTELLI intitolata: *Studio del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi del Boyle e del Gay-Lussac.*

Nei volumi delle Memorie di quest'Accademia vennero già inserite due Memorie del Prof. Battelli sulle proprietà termiche dei vapori. La prima fu presentata nel 1889, l'altra nel 1890. Nella prima sono descritte l'esperienze fatte dall'Autore intorno al modo di comportarsi del vapore di etere dietilico, quando venga assoggettato a pressioni crescenti, restando costante la temperatura. Lo studio fu fatto a molte temperature in modo da poter dedurre la legge, secondo la quale varia il volume del vapore a pressione costante quando varia la temperatura.

La seconda Memoria tratta della temperatura critica del solfuro di carbonio e dell'acqua.

La terza Memoria, che nell'ultima seduta fu data a noi per esame, contiene l'esperienze fatte sul solfuro di carbonio con lo stesso metodo seguito per l'etere e al medesimo fine.

Per la distanza dei limiti di temperatura e di pressione, entro i quali furono eseguite queste esperienze, per la diligenza usatavi, per le grandi difficoltà superate e in fine per la importanza di tali studi la Memoria merita come le precedenti un favorevole giudizio e noi ne proponiamo la lettura alla Classe.

G. FERRARIS.
A. NACCARI, *Relatore.*

Digitized by Google

RELAZIONE sulla Memoria dei Dott. O. MATTIROLO e L. BUSCALIONI, che ha per titolo: *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti seminali delle Papilionacee*. - Parte I. *Anatomia.*

Le ricerche, che formano oggetto della memoria presentata alla R. Accademia dai dottori O. Mattirolo e L. N. Buscalioni, interessano l'anatomia del tegumento seminale delle Papilionacee, e saranno seguite da ricerche fisiologiche sulla stesso argomento.

Questo lavoro avrà valore di una vera monografia, diretta ad illustrare un capitolo molto importante di anatomia e biologia vegetale finora poco noto, malgrado i molti studii pubblicati in proposito.

Nella prima parte gli Autori descrivono nel tegumento seminale i seguenti strati:

1° Strato delle *cellule malpighiane;*
2° » » a *colonna;*
3° » profondo suddiviso in piani ed in serie cellulari.

Gli *elementi malpighiani* furono oggetto di un esame diligentissimo; in grazia del quale gli Autori poterono stabilire, che la cosidetta *cuticola*, rivestente l'estremità libera delle cellule, non è altro che uno strato di rivestimento, analogo a quello che ricopre la superfice degli spazi intercellulari; che le fronti delle malpighiane sono per lo più ricoperte da un reticolo di suberina; e che in fine il *corpo del Beck* non è un granulo siliceo, ma un residuo nucleare.

Non meno importanti sono i risultati ottenuti dallo studio dello strato profondo; avendo gli Autori potuto stabilire la linea di separazione fra albume e tegumento con criterii nuovi e sicuri: dimostrare la natura delle comunicazioni intercellulari: scoprire aggetti foggiati a bastoncini, analoghi a quelli delle *Marattiacee* negli spazi intercellulari, e descrivere per i primi i numerosi tubi cribrosi proprii del fascio basale del funicolo.

Digitized by Google

Interessantissimi sono i risultati ai quali gli Autori giunsero studiando la ragione *ilare* o *chilariale*. In essa riscontrarono una fossetta, circoscritta da due labbra mobili sotto l'influenza delle variazioni igrometriche; la quale fossetta conduce ad una laminetta composta di tracheidi, finora ritenute come espansioni del fascio vascolare, mentre ne sono assolutamente indipendenti. A quest'organo nuovo, la cui funzione verrà discussa nella 2ª parte del lavoro, fu dagli Autori dato il nome di *Chilario*.

In vicinanza al Chilario misero in rilievo la presenza di tubercoli appaiati posti a cavaliere del rafe, formati dal considerevole sviluppo delle Malpighiane, e spesso anche dei sottostanti tessnti:

L. CAMERANO
Prof. G. GIBELLI, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Giugno 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Flechia, Peyron, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Schiaparelli, Pezzi, Carle, Nani, Cipolla e Ferrero Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente.

Il Socio Manno offre da parte dell'Autore, sig. Francesco Mugnier, Presidente della Società Savoiarda di Storia e d'Archeologia, un opuscolo intitolato: *Répertoire des titres et des documents divers relatifs à l'ancien comté de Genève et Genevois, analysés, traduits et annotés* (Chambéry, 1891).

Il Socio Segretario, in nome dell'Autore, il Socio Corrispondente Vittorio Poggi, presenta un opuscolo intitolato: *Contributi alla storia genovese nel secolo* XV (Genova 1891); e da parte pure dell'Autore, il Dott. Carlo Oreste Zuretti, parecchi lavori di filologia classica, fra cui: *Scolii al Pluto ed alle Rane di Aristofane dal codice veneto* 472 *e dal codice cremonese ecc.* e la *Costituzione di Atene di Aristotele tradotta* (Torino 1891), e nota la diligenza ed il sentimento critico mostrati in questi studi dal giovane Autore.

Digitized by Google

Il Socio Carle presenta parecchie opere di diritto pubblico e canonico offerti dall'Autore, il Prof. Francesco Contuzzi, dell'Università di Napoli, e brevemente discorre del loro contenuto.

Il Socio Flechia legge una sua Nota sull'origine del nome *Ariosto*.

Il Socio Nani legge un suo lavoro intitolato: *Il socialismo e il codice civile*.

Il Socio Cipolla legge una seconda sua nota *Sul viaggio in Italia di Corrado II nel* 1026, ed un'altra sua nota sopra un *Titolo cemeteriale cristiano scoperto ad Acqui*.

Lo stesso Socio dà lettura di una nota del Dott. Giuseppe Calligaris *Di tre diplomi di Federico II*, di cui uno inedito.

Questi lavori sono pubblicati negli *Atti*.

Il Socio Cipolla legge la relazione della Commissione, di cui è stato chiamato a far parte coi Soci Manno e Ferrero, con l'incarico di esaminare il lavoro del cav. Giovanni Sforza presentato per la inserzione nei volumi delle *Memorie*, intitolato: *Castruccio Castracani degli Antelminelli e gli altri Lucchesi di parte bianca in esiglio*.

La Classe accogliendo la conclusione della Commissione, ammette alla lettura il lavoro, e quindi ne approva la stampa.

La relazione anzidetta è pubblicata negli *Atti*.

Digitized by Google

Il Socialismo nel Codice civile;

Nota del Socio CESARE NANI

I.

Non è ancora troppo lontano da noi il tempo in cui l'appunto principale che muovevasi ai moderni codici era quello, che non avessero abbastanza rispettato la libertà civile. Pareva agli scrittori d'allora eccessivo ed incomportabile quasi ogni vincolo che in nome dell'interesse pubblico o del migliore governo della famiglia il legislatore avesse imposto nell'ordinamento famigliare; condannavasi perciò l' autorizzazione maritale anche in quella forma così modesta con cui fu accolta nel nostro codice civile; biasimavansi come soverchie le guarentigie di cui si vollero circondare alcuni atti più importanti; proclamavasi altamente illegittima ogni restrizione alla libertà contrattuale.

Per non citare che qualche esempio, un giureconsulto insigne, il Precerutti, di cui ricordo con riverente affetto gli insegnamenti, osservava: « il problema più arduo a risolversi e di somma « gravità è quello di fissare i limiti entro cui deve contenersi « l'azione del legislatore, e i principii fondamentali cui egli deve « seguire ed attuare. Basta porre un tale quesito per respingere « senz'altro l'onnipotenza del legislatore. L'onnipotenza è sinonimo « di tirannia, di dispotismo, si eserciti il potere legislativo da « un solo o col concorso del Parlamento rappresentante della « nazione . . . . . Lo stesso Robespierre nei suoi discorsi po- « litici dichiara che le leggi sono fatte per assicurare all'uomo « il libero sviluppo delle sue facoltà e non per incatenarle, e « raccomanda di evitare l'antica mania dei governi di voler « troppo governare . . . . . Non avrebbe fine il mio discorso « se volessi anche di volo accennare tutte le offese dell'immor- « tale principio di giustizia sotto il manto della pubblica utilità, « della necessità, delle esigenze della pratica e di simili altre « sonore locuzioni . . . . . È un errore difficile a combattersi

Digitized by Google

« e vincersi, perchè se ne disconosce la sussistenza, è un male
« ignoto che logora la vita e a guarire il quale non si pensa.
« Il socialismo apertamente professato non è temibile nè peri-
« coloso ; per contro è scabrosa la disfatta del socialismo ma-
« scherato sotto le apparenze ingannevoli di pubbliche necessità
« e difeso da chi si dichiara antisocialista per eccellenza. Chè,
« è pur sempre socialismo l'indebita intromissione dello Stato a
« scapito delle forze e dei diritti individuali ».

E conchiudeva: « Un altro errore assai radicato . . . . è
« quello di considerare il codice civile come un sistema di mezzi
« preventivi, diretti ad impedire le frodi e a cautelare tutti gli
« interessi e i diritti dei cittadini. Per tale guisa l'assolutismo,
« eliminato dalle leggi politiche, impera formidabile nelle leggi
« civili e vien meno il pregio principale delle libertà politiche,
« le quali sono preziose specialmente in quanto assicurano il
« trionfo della libertà civile. Per tale guisa si rende omaggio
« alle teorie socialistiche ; perocchè si pretende che il legislatore
« ponga riparo ad ogni abuso negli atti e nelle convenzioni dei
« cittadini, nello stesso modo che i socialisti vogliono che il go-
« verno abbia a rimediare a tutti i mali dell'uman genere, a
« rendere tutti felici, imponendo l'educazione, l'igiene, la pre-
« videnza ed ogni altro bene ».

Era allora pure (precisamente nel 1866) che un chiaro giurista francese, Emilio Accollas, dopo aver scritto un libro sulla *Nécessité de refondre l'ensemble de nos codes et notamment le Code Napoléon*, in un rapporto ad un comitato di studio costituitosi collo scopo di proporre una larga revisione dei codici napoleonici ed a cui partecipavano, fra gli altri, Jules Favre, Jules Simon, Vacherot, Garnier, Çourcelle-Seneuil; dichiarava che l'ideale a cui mirava la riunione era quello di « *substituer la* « *liberté au régime oppressif des vielles institutions juridi-* « *ques, la conscience et la raison à l'art prétendu savant qui* « *a si longtemps étouffé l'une et l'autre sous la formule et* « *qui heurte aujourd'hui de front les réalitès économiques*, « *de constituer en un mot l'autonomie de l'individu.* » Le quali idee egli svolgeva poi ampiamente nel suo *Manuel de Droit civil* (Paris, 1869), dove ad ogni pagina si flagella con una critica severa, spesso anche violenta, il codice napoleonico il cui principal carattere, dice l'autore (p. XXXI), « *est sa pro-* « *fonde antipathie contre la liberté.* »

Digitized by Google

In questi giorni, invece, nuovi e più formidabili attacchi si muovono agli stessi codici civili, partendo da criterii diametralmente opposti, e qua e là si elevano voci, non in tutto certo all'unisono fra di loro, ma concordi in ciò che lamentano che l'azione dello Stato in quei codici troppo timidamente si manifesti, che essi troppo concedano alla libertà dell'individuo, autorizzando, anzi legittimando, le oppressioni dei più forti in danno dei più deboli.

Assistiamo noi forse ad una crisi del diritto civile per cui sieno messi in discussione i principii essenziali che finora ne hanno costituito la base, una crisi simile a quella che travaglia ora il diritto penale, e che sta attraversando un'altra scienza affine alla giurisprudenza, l'economia politica? Noi non oseremmo affermarlo recisamente; perchè non ci pare, in verità, che l'opposizione sia finora organizzata, nè che abbia raccolto intorno a sè attualmente quel numero d'aderenti che è necessario per costituire una scuola. Ma è possibile che la schiera oggi esigua si vada via via ingrossando, sia per l'autorità degli scrittori che si sono messi a capo del movimento, sia perchè nelle loro dottrine v'ha, a nostro avviso, una parte di vero. Perciò crediamo venuto il momento di precisare quant'è possibile chiaramente la nuova tendenza, il che cercheremo di fare riassumendo a larghi tratti il programma dei novatori, a cui faremo seguire alcune brevi osservazioni.

Premettiamo, se pur ve n'è bisogno, che il nostro proposito è di occuparci soltanto di quegli autori che, pur accettandone talune vedute, non fanno tuttavia aperta professione di socialismo. I socialisti, infatti, che ritengono totalmente sbagliate le basi su cui si fonda l'odierna organizzazione sociale, è naturale che combattano tutti o quasi tutti i principii che governarono finora i nostri rapporti di diritto privato. Noi, invece, non vogliamo discutere qui che con coloro che, pur ammettendo in gran parte questi principii, li vorrebbero però applicati in modo diverso, nè esiterebbero, qualora ne fosse provato il bisogno, a trasformarli radicalmente.

Digitized by Google

Questa è appunto la tesi che ha sostenuto con molto calore il Gierke in un suo discorso pronunciato nel 1889 nella Società giuridica di Vienna, pubblicato sotto il titolo: *La missione sociale del Diritto privato* (*Die soziale Aufgabe des Privatrechts*, Berlin, 1889). Occasione al discorso fu il nuovo progetto del codice civile germanico, lo scopo il promuoverne una riforma sostanziale. È pregio dell'opera compendiare per sommi capi le argomentazioni del dotto Autore.

I Romani, egli dice, hanno pei primi introdotto la distinzione fra il diritto pubblico ed il diritto privato; al *jus singulorum* hanno contrapposto *il jus populi*, alla sovranità dello Stato quella dell'individuo. All'antico diritto germanico, per contro, tale distinzione era e rimase per secoli ignota; perchè i Germani non concepivano che l'unità dal diritto. La distinzione riapparve con rinnovata energia nell'evo moderno, quando risorse, insieme cogli altri elementi dell'antica coltura, il diritto romano; ed è divenuta coll'andar del tempo così profonda da far temere oramai non lontano il giorno in cui debbano trovarsi a fronte, da una parte l'individuo libero ed uguale, dall'altra lo Stato onnipotente e meccanico. A prevenire il pericolo di questa lotta, che sarebbe disastrosa per le sorti della nostra civiltà, pensa il Gierke essere necessario che si studi il modo di conciliare insieme diritto pubblico e diritto privato, risalendo ad un principio più alto, in guisa che quei due concetti cessino dal riguardarsi non solo come differenti, ma eziandio come ostili fra di loro. Distinti debbono essere, perchè così vuole la natura umana, nè potrebbe l'uno assorbire l'altro totalmente, senza che ne segua l'annientamento o la barbarie della società. Ma bisogna evitare che, slegati del tutto l'uno dall'altro, il diritto pubblico metta capo ad uno Stato assoluto, ed il diritto privato si converta in diritto prettamente individualistico. Bisogna, afferma il Gierke, ritornare al vecchio diritto germanico, non al diritto germanico nella sua veste medievale, ma al diritto germanico nei suoi eterni principii. Perchè in verità, esclama, la lotta pel diritto dell'avvenire è una lotta fra il diritto romano ed il diritto germanico! Trionfi pure la forma del primo, ma trionfi lo spirito, la sostanza del secondo!

In altre parole, e per dirla più semplicemente, diritto pubblico e diritto privato debbono procedere d'accordo fra loro, ed in particolar modo il diritto privato ha da proporsi uno scopo sociale. A raggiungere questo fine le leggi speciali non bastano;

Digitized by Google

è necessario che vi si indirizzino tutte le disposizioni del codice civile, si riferiscano esse ai rapporti dell'uomo colle cose o cogli altri uomini.

Quindi, per cominciare dalla proprietà, alla proprietà si debbono imporre dei doveri sociali. Dovere di non abusarne anzi tutto; ma, quel che è più, anche il dovere di farne un retto uso. Al concetto romano della proprietà come di un diritto assoluto ed illimitato, deve sovrapporsi quello germanico, che ritiene la proprietà come un diritto relativo che contiene in se stesso, e non solo riceve dall'esterno, la propria limitazione. La proprietà non ha più da servire unicamente all'interesse egoistico dell'individuo; ma sì bene deve essere ordinata nell'interesse di tutti.

Per lo stesso motivo, tutto il diritto immobiliare dovrà radicalmente trasformarsi, in guisa da costituire un sistema speciale, perchè le norme che reggono la proprietà degli immobili non possono essere le stesse che governano la proprietà delle cose mobili. Anche qui il criterio deve attingersi all'interesse sociale. Quindi sta bene che si ammetta in principio la libertà d'alienazione; ma nel tempo stesso occorre che si prendano tutte le cautele necessarie, acciocchè la proprietà fondiaria non sia esposta al pericolo di venir annientata dai debiti, o di sminuzzarsi soverchiamente. Perchè in definitiva è un grande interesse sociale quello che consiglia di assicurare la immanenza della proprietà fondiaria, è un grande interesse politico quello che impone di soccorrere la classe dei contadini, il più forte baluardo, dice il giurista tedesco, contro le aggressioni esterne e le agitazioni interiori. Grande e piccolo possesso hanno un'alta missione da compiere; per mettersi in grado di esercitarlo sarebbero legittimi e da approvarsi anche i fedecommessi famigliari!

E vi ha una folla di minori diritti reali che il legislatore deve proteggere, perchè tutti, per quanto piccoli in sè, possono concorrere ad accrescere la ricchezza nazionale; e vi hanno diritti d'obbligazione che esigono una tutela più efficace nell'interesse delle classi lavoratrici, ed a cui sarebbe facile concederla solo che, ritornando all'antico concetto germanico, si voglia abbattere la fragile barriera che separa il diritto reale dal diritto d'obbligazione.

Ma è nel tema dei contratti che la funzione sociale del codice civile si esplicherà più larga e poderosa. Quella della

Digitized by Google

libertà contrattuale infatti, avverte il Gierke, è un vecchio domma che può trarre a terribili conseguenze, se lo si accolga con cieca fede. Esso cela in sè il *bellum omnium contra omnes* legalizzato da una massima di diritto, peggio ancora, la sconfitta sicura e la oppressione del debole, che non può misurarsi ad armi uguali col più forte. Molte malsane cupidigie ha già frenato il divieto, antico nella legislazione, dei patti contrarii alla morale; ma ben più stretti e duri vincoli sono da imporre alla libertà di contrarre, se non si vuole che le classi inferiori siano condannate a soccombere sotto la prepotenza economica. È tutto un sistema di difese e di guarentigie che bisogna escogitare, onde impedire che i poveri vengano sfruttati dai più ricchi, gli inesperti raggirati dai più furbi. Non basta l'abolizione dell'arresto personale per debiti, non basta l'essere tornati, per altra via, alla proibizione delle usure; è il concetto della insequestrabilità che vuole essere maggiormente sviluppato; sono forme salutari che debbono introdursi per certi contratti, affinchè niuno troppo leggermente si assuma obblighi che possano più tardi convertirsi per lui in una rovina economica. Potranno soffrirne la libertà e la sicurezza del commercio; ma si otterrà il vantaggio inestimabile di non abbandonare il piccolo borghese ed il contadino disarmati contro il grande imprenditore, l'operaio contro il capitalista.

Tutto il contratto di lavoro è da regolare con nuove norme, diverse dalle attuali che hanno ancora la loro radice nel diritto romano, il quale, informato ai principii della schiavitù, modella il contratto di locazione d'opera su quello della locazione delle cose.

Bisogna rimettere in onore il vecchio principio germanico, secondo cui l'obbligo del risarcimento per un fatto dannoso non si fonda sul delitto, ma sul semplice rapporto di causa. Chi col fatto proprio, anche senza la minima sua colpa, ha recato danno altrui, sia tenuto ad indennizzarlo, per quanto gli sarà possibile. Egli sarà innocente, ma più innocente di lui è sempre la vittima.

Sopra tutto ha da campeggiare in un codice civile il diritto della persona; perchè tutti i beni, nel più largo senso del vocabolo, non esistono che per essa. La personalità umana, quale è costituita dalla natura, quale si atteggia variamente per la differenza delle classi sociali in cui viene a trovarsi, quale risulta infine per le condizioni speciali d'ogni individuo, deve trovar il

Digitized by Google

suo pieno riconoscimento nella parte fondamentale del codice civile, e debbono riceverne protezione tutti, non uno eccettuato, i diritti che colla persona umana si collegano.

Nel diritto privato ha segnato il suo posto il diritto famigliare. Il diritto romano nella famiglia non vede che un individuo, il sovrano, il *pater familias*; il diritto germanico invece vede un organismo, e da questa e per questa unità organica trae e misura i diritti e doveri così del capo come degli altri appartenenti alla famiglia, regolandone pure i rapporti patrimoniali. Naturalmente è al concetto germanico, secondo il Gierke, che il codice civile deve inspirarsi, e fortificare i vincoli che tengono unita la famiglia, assidendola sulle basi della podestà maritale e della patria podestà esercitata dal padre in concorso colla madre, e da questa sola, con poteri più limitati, in mancanza del genitore — patria podestà che deve durare finchè dura la convivenza domestica — e, quanto ai rapporti patrimoniali, sul regime della comunione dei beni.

Anche il diritto successorio dovrebbe, secondo la traccia dell'antico diritto germanico, rientrar nella sfera del diritto famigliare, mentre ora, grazie all'influenza del diritto romano, gli si dà per base la volontà dichiarata o presunta dell'individuo. Duri pure il testamento, dice il Gierke, poichè è penetrato nei nostri costumi, ma si sappia bene che nel fondo della nostra coscienza popolare si mantiene tuttora vivace il concetto, che la successione legittima debba tenere il primo posto e la successione testamentaria non aver altro ufficio tranne quello di concretare ad adattare, quando occorra, ai casi speciali la norma della legge. Il posto rimasto vacante bisogna che sia occupato da chi nell'organizzazione famigliare vi era più vicino, e debbono restare esclusi dalla successione quelli, che per essere parenti in grado troppo remoto, non si considerano più farne parte.

Ma la famiglia non è il solo organismo a cui si debbano rivolgere le regole del diritto privato. Altre ve ne sono che oggigiorno hanno acquistata la massima importanza e che si impongono all'attenzione del legislatore. Tali specialmente le grandi imprese su cui si può dire che si fondi la nostra attuale vita economica, Qui non si tratta punto di una somma di obbligazioni isolate d'individuo ad individuo, ma sibbene di una vera persona collettiva costituita dal capo dell'impresa insieme cogli addetti e cogli operai; persona collettiva, per cui esistono spe-

Digitized by Google

ciali responsabilità e speciali obblighi di tutela per parte dello Stato; quei medesimi che diedero argomento a quella legislazione operaia a cui quasi tutti i paesi civili hanno posto mano in questi ultimi tempi.

Ed altri organismi ancora ha creato il moderno spirito di associazione con sì ricca varietà di forme e d'intenti che non si possono, senza snaturarli, ridurre al tipo individualistico della società e della comunione romana. Per questi, nonchè per quegli istituti, per quelle corporazioni che hanno carattere pubblico ed a cui finora lo Stato non ha voluto concedere, quasi in dono, che una finta personalità, mentre invece sono enti vivi e vitali, è necessario che la legge, traendoli nella sfera del diritto privato, li disciplini con norme dettate dalla loro intrinseca natura e consone allo scopo sociale a cui servono. Rappresentano anelli intermedi fra l'individuo e la società; quanto più si procura che quegli enti siano vigorosi, tanto più si aumenta la forza di resistenza del corpo sociale contro i pericoli che lo minacciano.

Sotto ogni aspetto adunque è il punto di vista sociale che deve signoreggiare ed imprimere uno speciale indirizzo al diritto privato. Perocchè, conchiude l'illustre Autore, diritto pubblico e diritto privato sono figli della stessa madre; seguono, è vero, una vocazione diversa, ma, invece di combattersi come fratelli nemici fra di loro, debbono sempre trovarsi collegati insieme in un'opera comune.

Il programma del Gierke (da lui svolto anche in due altre pubblicazioni: *Der Entwurf eines bürgerlichen Gesetzbuches und das Deutsche Recht.* Leipzig, 1889 e *Personengemeinschaften u. Vermögensinbegriffe in dem Entwurfe eines bürgerlichen Gesetzbuches f. das D. Reich.* Berlin, 1889) può parere in qualche punto rivoluzionario. Nel fatto però, chi attentamente consideri, lo è ben poco. Perchè in sostanza il suo concetto è che la società — la tedesca sopra tutto — non potrebbe essere meglio costituita di quello che è attualmente. Tutto ciò che esiste, in alto come in basso, è degno di essere conservato; ogni classe sociale è bene sia mantenuta nel posto in cui si trova,

Digitized by Google

sarebbe anzi opportuno di fissarvela mediante i fedecommessi famigliari ed altre simili istituzioni. Grande e piccola proprietà esercitano ambedue, nel suo parere, una benefica azione, nè si può pensare a sopprimere l'una a beneficio dell'altra. Nulla adunque è da mutare ed il torto maggiore del progetto del codice civile tedesco è quello, secondo il Gierke, di crear serii pericoli a questo stato di cose, volendo seguir le vestigia del diritto romano, che è in aperta opposizione, nei suoi principii fondamentali, coi bisogni del nostro tempo. Questa mancanza di ossequio al vecchio diritto, davanti a cui i secoli si sono inclinati con devota ammirazione, e che la scienza germanica più che ogni altra ha contribuito in questo secolo ad elevar sugli altari, è forse quanto di più audace e rivoluzionario si contiene nello scritto dell'eminente giurista alemanno.

Ma una tendenza assai più radicale rivela il Menger, professore di diritto all'Università di Vienna, nelle critiche che anche egli rivolge allo stesso progetto con un suo lavoro: « Il diritto civile e le classi non abbienti » (*Das bürgerliche Recht und die besitzlosen Volksclassen*) pubblicato prima in due articoli dell' « *Archiv für die sozialen Gesetzgebung und Statistik* » e più tardi raccolti in un volume che è giunto già alla seconda edizione (Tübingen 1890).

Il Gierke infatti vorrebbe veder preponderare nel codice civile l'interesse sociale. Il Menger va più in là, perchè chiede che si prenda di mira non già l'interesse generale, ma l'interesse di una sola classe di persone, la classe dei non abbienti. A che giovano, egli dice, tutte quelle indagini sistematiche e storiche con cui si è voluto in questo secolo illustrare il diritto privato? Certamente la scienza se n'è arricchita; ma qual profitto ha tratto il popolo, la classe dei proletari sopra tutto, che pur costituisce l'immensa maggioranza, da un diritto così perfezionato? I moderni codici civili, il progetto germanico più che ogni altro, egli afferma, così nel loro spirito come nelle singole disposizioni, si sono prefissi di favorire le classi più agiate, mentre è precisamente la via opposta quella che dovrebbe tenersi. In una parola il Gierke si lagna che nel nuovo progetto i grandi interessi sociali sieno stati considerati da meno di quelli dell'individuo; il Menger per contro accusa i compilatori di aver sacrificati agli interessi delle classi dominanti quelli ben più sacri delle classi inferiori.

Digitized by Google

Egli intende a dimostrarlo con un lungo ragionamento, che ci sarebbe impossibile di seguir passo passo. Ci soffermeremo di preferenza sulla parte generale del suo lavoro, e ci limiteremo a rapidi cenni sulla parte speciale, dove l'autore prende ad esaminare, divise per gruppi, le disposizioni del progetto.

Il punto di vista da cui parte, egli lo dichiara altamente, (dichiarazione non superflua per l'autore del libro: *Das Recht auf den vollen Arbeitsertrag in geschichtlicher Darstellung*. Stuttgart, 1886), non è il socialistico; la sua critica per conseguenza riguarda l'applicazione, non i principii fondamentali dell'odierno diritto privato.

Intanto questo diritto, afferma il Menger, porta dentro di sè il vizio organico di esser stato foggiato dalle classi più elevate, che certo ebbero per guida nel crearlo unicamente il proprio vantaggio. A torto proclama la scuola storica che il diritto è il riflesso della coscienza popolare, sarebbe assai più giusto il dire che l'attuale diritto rispecchia le idee e serve agli interessi di un decimo della popolazione, che essendosi imposto agli altri nove decimi cerca di perpetuare la sua posizione privilegiata. Sicuramente le classi più umili hanno da qualche tempo in qua, dove più dove meno, ottenuto una certa partecipazione alla vita pubblica, ma la rivoluzione politica non ha esercitato che una ben tenue influenza per tutto ciò che riguarda gli ordini del diritto privato. Questo rimase qual era prima, poco o nulla modificato, tanto profonde ne sono le radici; nè la presente generazione educata in gran parte alle massime della scuola storica, che adora il passato, è la meglio in grado di formulare un codice che risponda ai bisogni dell'ora presente, ai bisogni dell'avvenire. Quindi si spiega, a dire del Menger, come il progetto germanico non giunga neppure all'altezza dei codici prussiano ed austriaco, opera d'uomini illuminati che nelle riforme sociali precorsero i loro tempi.

L'obbligo del legislatore, infatti, non è quello di limitarsi a copiare un compendio qualunque di diritto civile, ma ben più alto è il suo ufficio, perchè egli deve tener fisso lo sguardo all'odierno movimento sociale, assecondarlo, affrettarlo, se occorra, coi suoi precetti. Che fecero invece i compilatori del progetto? Tradussero il diritto vigente, eliminandone appena quanto appariva manifestamente antiquato, in altrettanti articoli di legge, concepiti per di più in una forma quasi incomprensibile al volgo profano.

Digitized by Google

La classe dei non abbienti si trova a paragone della classe doviziosa in una condizione molto più sfavorevole, per quanto concerne la difesa dei proprii diritti. Ciò si può dimostrare con varii argomenti. Anzitutto regna ancora la massima stabilita dai giureconsulti romani « *ignorantia juris neminem excusat* ». Ora questa ignoranza, ognuno vede, danneggia più facilmente il povero, che ha più limitata coltura e minori mezzi di ricorrere al consiglio degli esperti, che non il ricco. La finzione che ognuno debba conoscere il diritto, ora specialmente che le leggi di tutti gli Stati civili si sono moltiplicate per modo da riempire intiere biblioteche, è assurda e le conseguenze che necessariamente in molti casi ne derivano, tristissime. Unico rimedio al male questo, che lo Stato imponga al giudice d' impartire gratuitamente ad ogni cittadino, agl'indigenti sopratutto, ogni volta che il bisogno lo richieda, le opportune istruzioni legali, o, meglio ancora, si assuma d'ufficio la causa di chi non è in grado di procurarsi avvocati contro chi invece ne è provvisto.

In secondo luogo, il principio consacrato da alcuni codici (l'austriaco e l'italiano fra gli altri) che, avvertendosi una lacuna nella legge, il giudice debba colmarla ricorrendo all'analogia, crea, in molti casi, un nuovo pericolo per le ragioni dei non abbienti. Il perchè è ovvio, dal punto di vista dell'autore. A parte che è iniquo considerare come legge anche ciò che non risulta quale volontà espressa dal legislatore, il sistema del nostro diritto attuale non conosce che gli interessi delle classi dominanti. La regola dedotta per analogia quindi, per la forza stessa delle cose, non potrà essere consona agli interessi dei meno abbienti. Parli dunque o taccia la legge, il risultato sarà sempre lo stesso; laddove l'equità del giudice, dato che a questa fosse rimessa la decisione nel caso che manchi la disposizione esplicita, troverebbe forse il modo di attuare principii più umani ed aprir l'adito a salutari riforme legislative.

In terzo luogo, così nel campo del diritto penale come in quello del diritto civile, milita a danno dei poveri una specie di presunzione sfavorevole. Dappertutto dove l'indagine giudiziaria non ha da arrestarsi su fatti esteriori, ma deve scendere invece nell'intimo dell'animo e ricercare i più secreti moventi di una determinata azione, avviene, nel più dei casi, che il giudice sia inclinato ad interpretare sinistramente le intenzioni dei non abbienti, che si presentano davanti al suo tribunale. Ed invero non

Digitized by Google

sono forse i tribunali un'emanazione delle classi superiori ; non sono forse, di regola, chiamati ad applicare le norme del diritto i rappresentanti di quelle classi nel cui interesse quelle norme furono stanziate ?

E qui appaiono evidenti non pochi difetti dell'odierno diritto processuale. Noi abbiamo voluto troppo perfezionare l'amministrazione della giustizia. All'antica semplicità dei mezzi noi abbiamo sostituito, per crescere le guarentigie, un meccanismo complicato di avvocati, notai, ecc. Il perfezionamento, almeno in teoria, forse si è raggiunto, ma a spese dei poveri. Perchè o le prestazioni di quelle persone si pagano sempre a caro prezzo ed allora non gioveranno che ai ricchi, o si vogliono gratuite pei poveri e saranno per questi di qualità scadente. Si aggiunga che, secondo le leggi attuali, tutto lo svolgimento del processo è in balia delle parti litiganti, ed al giudice è imposto di rimanersi inerte ed impassibile fino al momento in cui sarà richiesto di dar la sentenza. Ottime prescrizioni pel ricco che, ben consigliato, non metterà mai il piede in fallo; pessime pel povero che, inesperto e mal assistito, corre pericolo di inciampare e rovinar la sua causa ad ogni passo!

In conclusione, bisogna por mano a radicali riforme in tutta la legislazione civile e processuale ; bisogna che gli interessi fin qui negletti dei miseri, che sono i più in confronto dei possidenti, diventino il principal argomento di studio pel legislatore; e se anche si vogliano salvi i principii fondamentali su cui riposa l'odierno diritto privato, si dia bando ai pregiudizi egoistici che da tanto tempo vi hanno messo radice ! Questi interessi mostra di ignorarli e tenere in non cale il progetto del codice germanico, esso che pone in cima delle sue disposizioni le norme relative al diritto delle obbligazioni , quasi volesse dimostrare che gli sta a cuore più l'interesse del commercio che non quelli non pure della proprietà, ma della stessa famiglia!

Del resto, tutto l'ordinamento sul progetto, secondo l'avviso del Menger, è sbagliato, ed egli ne imprende l'esame seguendo una distribuzione di materie che reputa più razionale; occupandosi, cioè, prima del diritto famigliare, poi di quello delle cose,

Digitized by Google

quindi delle obbligazioni, ed in ultimo delle successioni. Sul contenuto di questa parte del suo scritto, poco c'indugieremo, come abbiamo detto, per istudio di brevità. D'altronde date le premesse, non è difficile indovinare le conseguenze a cui il Menger è logicamente condotto.

Vediamone alcune.

Tutto il diritto di famiglia, quale risulta dalle disposizioni del progetto, si direbbe non si proponga altro intento fuori di quello di assicurare alle classi favorite dalla fortuna i vantaggi di cui godono attualmente, e delle classi inferiori non faccia nessun conto, dove pure non ne conculchi i diritti. Se ai rapporti patrimoniali nascenti dal matrimonio si destinarono ben 150 paragrafi, intesi a regolare cinque diversi sistemi che si abbandonano alla libera scelta dei contraenti, si sono dimenticati per altra parte gli sposi e sono i più, che nient'altro possono mettere in comune che la propria industria.

Gli alimenti, vi si dice, si prestano di regola con una rendita in danaro, quasi che nel più dei casi non si prestassero nel fatto e non si potessero prestare altrimenti che in natura.

Ancora si legittima, invece di ridurlo ai casi di pura necessità, il baliatico; istituzione immorale pei ricchi, inumana, sotto molti aspetti pei poveri.

Peggio accade per la donna sedotta e pei figli naturali. Per la donna sedotta, tranne nei casi in cui il fatto rivesta i caratteri di un reato, niuna indennità; se nasca prole, un magro risarcimento alla madre, quando risulti veramente essere il seduttore autore della gravidanza, e gli alimenti indispensabili al figlio. Altre legislazioni. è vero, sono anche meno liberali in siffatti casi. Ma al Menger ciò par poco o nulla, e stigmatizza la legge che si rende quasi complice di tali brutture, mettendo a vil prezzo l'onore e la bellezza delle migliori figlie del popolo insidiate continuamente dai ricchi; perchè secondo la sua opinione (su cui certo vi sarebbe qualche cosa a ridire) non vi sono che i ricchi che si rendano colpevoli di siffatte infrazioni alla morale. Ben più salde dighe egli vorrebbe opporre al dilagare del mal costume, mediante una serie di disposizioni che arieggiano, fino ad un certo punto, quelle che su tal materia aveva stabilite il diritto canonico. Ed infine propone che la tutela venga organizzata per modo, che non solo assicuri la buona amministrazione dei beni dei pupilli che appartengono alle classi agiate,

Digitized by Google

ma ancora sieno preservate da ogni pericolo la salute e le forze dei fanciulli che, per la condizione della loro nascita, dovranno più tardi entrar necessariamente nelle file degli operai.

La parte del progetto che riguarda i diritti sulle cose offre sicuramente minor interesse per le classi meno abbienti. Il valore della proprietà va indebolendosi grado grado pei pesi, sempre maggiori, che v'impongono le esigenze finanziarie dello Stato. Ma una spiccata tendenza del diritto odierno minaccia i più gravi pericoli anche all'inviolabilità della proprietà. Oramai nell'alienazione così degli immobili come dei mobili (ed il progetto consacra per l'appunto questo principio) il titolo non ha più che importanza secondaria, l'atto formale è tutto. A questo modo potrà il non proprietario, osservate le forme, alienare cose non sue e l'acquisitore, se di buona fede, ne acquisterà legittimamente il dominio. Non si risolve ciò forse in una spogliazione legale? Meglio ancora, in una confisca della proprietà in nome della sicurezza del commercio? Nel tempo stesso, per rendere sempre più difficile la condizione del vero proprietario, non solo si munisce di valide difese il possesso, ma anche la semplice detenzione.

Nè più felice è il progetto laddove vuole che alle leggi particolari dei varii Stati sia riservato di disporre a chi spetti la proprietà delle *res nullius*, mentre parrebbe più giusto attribuirla alle casse ed agli istituti fondati in soccorso degli operai, pei casi di malattia, infortunii sul lavoro, vecchiaia, ecc.

Ma è il diritto delle obbligazioni quello che tocca più da vicino le classi lavoratrici, ed è qui dove più largamente quindi dovrebbe svolgersi a loro favore l'azione legislativa. Ed invero non mancano leggi emanate in questi ultimi tempi che si proposero, in vario modo, di migliorare la sorte degli operai, anche nei loro rapporti cogli imprenditori. Ma a questo movimento che guadagna ogni giorno d'estensione e d'intensità è rimasto estraneo finora il diritto privato. Lo si potrebbe paragonare, sotto un certo aspetto, ad una remota città di provincia dove le mode arrivano sempre in ritardo dalla capitale. Basti il dire che il progetto che su altri punti, d'assai minor importanza, non è avaro di prescrizioni anche minute, del contratto di locazione d'opere invece se la sbriga con otto brevi e miseri paragrafi Il principio fondamentale in tema di contratti è l'assoluta libertà, eziandio pel progetto, e questo principio combatte il Menger al pari di

Digitized by Google

Gierke. Infatti, osserva anch'egli, la libertà, dove non sono uguali le forze dei contraenti, è una parola vuota di senso. Libertà di contratto fra l'imprenditore che è forte e l'operaio che è debole e bisognoso vuol dire assoggettamento del secondo al primo; vuol dire facoltà data all'imprenditore di imporre all'operaio qualunque patto più nocivo agli interessi di quest'ultimo. Libertà in questo caso è l'equivalente di privilegio. Ed appunto le classi dominanti, che non ammisero la libertà assoluta rispetto ai diritti reali, ai diritti di famiglia e, nella stessa sfera del diritto delle obbligazioni, rispetto all'usura, perchè ne potevano essere minacciati i proprii interessi, si riservarono per contro la libertà, come un privilegio, nelle loro contrattazioni cogli operai. Ma un diritto privato più umano e più giusto dovrebbe invece intervenire per rendere più completo il disposto delle leggi speciali, difendendo le classi lavoratrici contro ogni soperchieria, ogni abuso, ogni frode che volesse consumarsi a loro danno. Perocchè a questi pericoli i non abbienti si trovano esposti, sia per la propria inesperienza, sia pei bisogni materiali della vita che siffattamente li premono da toglier loro libertà di elezione, ed agio di riflettere quasi in ogni contratto a cui addivengano, ma certo più che altrove nelle locazioni d'opere. Delle guarentigie che il codice civile, in questa parte delle sue disposizioni, dovrebbe offrire al lavoratore discorre largamente il Menger, nè sarebbe possibile l'enumerarle tutte. Basti osservare che queste dovrebbero aver di mira non soltanto l'integrità della persona fisica dell'operaio, ma anche il suo onore e lo stesso suo amor proprio; assicurargli, ogni volta che il padrone non osservi gli obblighi impostogli dalla legge, una pronta ed adeguata riparazione; ed essere intangibili per guisa che non possano, mediante qualsiasi fatto, nè escludersi nè attenuarsi. La stessa tutela poi dovrebbe estendersi agli addetti alla grande ed alla piccola industria, senza dimenticar nemmeno le persone che si impiegano nei servizi famigliari.

Indipendentemente dal contratto è causa di obbligazione ogni fatto illecito che cagioni danno altrui. Nel diritto attuale, come già nel diritto romano, vi è colpa tutta volta che altri non si sia comportato come si comporterebbe in quel caso il *diligens paterfamilias*. Ora, esclama il Menger, in questa figura tipica del buon padre di famiglia si rispecchia tutto l'egoismo delle classi finora prevalenti, studiose del bene proprio, incuranti del-

Digitized by Google

l'altrui ! A questa figura egli contrappone quella dell'uomo probo (*der wackere Mensch*), che non è un eroe sempre pronto ai sacrifizi, ma sa in ogni suo atto conciliare l'utile proprio con quello degli altri, nè vuole conseguire il proprio benessere a prezzo degli altrui patimenti. Necessariamente, sostituita all'antica questa nuova finzione giuridica, molti fatti appariranno colposi che ora, sotto l'impero del nostro diritto, tali non appaiono; ma, diciamolo di passaggio, saranno pur sempre molto meno numerosi che qualora si accettasse il criterio del Gierke (più entusiasta che il Menger dei principii del vecchio diritto germanico) secondo il quale, come si è veduto, basterebbe in qualunque caso il semplice rapporto di causa a stabilir l'obbligo del risarcimento.

Il diritto ereditario, osserva il nostro autore, è una istituzione per sua natura aristocratica; ben poco, per conseguenza, ha da vederci la classe dei proletarii. Il maggior interesse che possa averci è questo, che le regole intorno alle successioni non sieno tali da favorire un maggior accentramento dei beni nelle mani di pochi privilegiati, e di accrescere per contro il numero dei non abbienti. Ora il progetto non in tutto si conforma a questo scopo; perchè pone per base, quantunque limitata in favore dei parenti più prossimi, la libertà testamentaria, ma in pari tempo non esclude la possibilità che le successioni privilegiate continuino a sussistere sotto l'egida delle leggi dei singoli Stati. Vi ha chi li guarda con favore (il Gierke fra gli altri) e vorrebbe generalizzarle, facendone uno dei capisaldi della legislazione sociale; ma non pare al Menger che giovi oramai nè al popolo nè alla monarchia di creare in ogni ceto un gruppo di fortunati che soli si assidano al banchetto della vita, mentre gli altri, i più, ne rimangono esclusi ed inutilmente chiedono di esservi ammessi.

Abolire la successione per causa di morte non è possibile, finchè si mantiene in vigore il principio della proprietà individuale; ma ben si può limitare la successione ai gradi più vicini di parentela e le eredità, che rimarranno quindi vacanti in numero molto maggiore che ora non accada, destinare a beneficio delle classi lavoratrici, dacchè è col loro lavoro che la ricchezza si è accumulata. Infine è necessario che si rendano più semplici le forme testamentarie, mentre invece il progetto non riconosce che il testamento notarile e giudiziario; e necessario è pure che

Digitized by Google

si provveda perchè la devoluzione dell'eredità, quante volte manchi la designazione d'un esecutore testamentario, si effettui d'ufficio per opera del Tribunale.

Il problema che in questo momento s'impone, conclude il Menger, è quello del benessere delle classi popolari. La rivoluzione democratica si è già compiuta nell'ordine politico, è tempo che si inizi anche nell'ordine del diritto privato.

*
* *

Lo stesso punto di veduta, in sostanza, adottato dal Menger, è sostenuto pure dal D^r^. Ehrlich in due notevoli articoli apparsi nella « Unsere Zeit » (*Soziale Gesetzgebungspolitik auf dem Gebiete des deutschen Privatrechts — Der Entwurf eines bürgerlichen Gesetzbuchs und die sozial-politischen Bestrebungen der Gegenwart* 1890 5.7.H.). Il suo pensiero si riassume tutto nelle parole con cui termina il secondo degli articoli citati: « I redattori del progetto si prefissero come legislatori un compito « giuridico. Ma come può il giurista, la cui operosità si rivolge « unicamente a padroneggiare la stoffa del diritto, il giurista « che non sia altro che giurista, darci alcunchè di diverso dal « diritto vigente, in una forma tecnicamente eccellente? . . . . .
« I redattori hanno solo effettuato un'idea che presentemente « in Germania domina non essi soltanto, ma l'intiera classe « dei giuristi: l'idea fondamentale della scuola storica, che la « legislazione, cioè, non abbia altro scopo tranne quello di tra- « durre il diritto vigente in una forma che sia tecnicamente « perfetta. È colpa loro se questa idea è falsa? Perchè in ve- « rità, il compito della legislazione è oggigiorno molto più ele- « vato, il suo ufficio è di attuare l'ideale morale e politico della « sua epoca, la vocazione per la legislazione lo ha ogni epoca « che possieda un ideale morale e politico ».

Accenniamo qui ancora un breve scritto di Fleischmann (*Die Sozialpolitik im Recht* in *Die Gegenwart* 1890, n°. 25), che vuol anch'esso una più energica influenza degli interessi sociali sul diritto.

Digitized by Google

*
* *

Poste di fronte a programmi così radicali parrebbero timide le osservazioni che il Glasson espose in una sua Memoria, presentata nel 1886 all'Accademia delle Scienze morali e politiche di Francia, col titolo: *Le code civil et la question ouvrière* (Séances et travaux de l'Académie des Sciences morales et politiques, t. XXV). Infatti egli, quanto si dimostra ossequente al codice napoleonico, il cui « éloge (dice) n'est plus à faire », altrettanto aborre dal socialismo di Stato. I suoi desiderii si limitano a ciò, che mediante una legge speciale si provveda a determinare il concetto e le conseguenze principali del contratto di lavoro, intorno a cui si agitano tante e così vive controversie. Ma, si noti bene, le norme direttive di questa legge dovrebbero essere attinte al diritto comune, non contenere, cioè, nulla di nuovo o disforme dal diritto ora esistente, perchè il loro scopo non può essere che quello di meglio chiarirlo, ovviando alle difficoltà create dall'assenza di una esplicita regola legislativa, ed in secondo luogo (il che forse è più importante ancora) la legge dovrebbe ritenersi unicamente come d'interesse privato e tale, quindi, da potervisi derogare mediante la pattuizione delle parti contraenti. « En un mot, nous demandons des dispositions de loi offertes et non imposées aux parties ».

Muovendo da tali criterii, il Glasson abbozza le linee fondamentali di un progetto di legge sopra questo argomento, suggerendo la soluzione delle principali questioni che le toccherebbe di affrontare, quali sarebbero: la prova del contratto; le conseguenze della sua rescissione; i privilegi sul salario; la sua insequestrabilità; la responsabilità per gli infortunii sul lavoro, e, uscendo forse alquanto dalla stretta cerchia dei limiti assegnati dall'autore alla legge che egli propone, la protezione da accordarsi alla moglie dell'operaio, specialmente pei lucri che essa consegua colla propria industria, nonchè un lieve allargamento della competenza dei consigli dei *prud'hommes*.

Dal punto di vista del miglioramento delle condizioni degli operai non si potrebbe sicuramente chiedere di meno; ma tuttavia, se dovessimo giudicare dalla discussione provocata nel dotto consesso dalla lettura di quella Memoria, discussione a cui presero parte Pont, A. Desjardins, P. Leroy-Beaulieu e Ravaisson

Digitized by Google

(op. cit., t. XXVI), dovremmo arguirne che a più d'uno siano parse troppo ardite le sue pretese. Si disse, infatti, essere inutile il disciplinare con una sanzione di legge il tale o tal altro punto, e miglior consiglio abbandonarlo alla giurisprudenza; si rilevarono le difficoltà di dare una definizione esatta del contratto di lavoro che può assumere tante e così diverse sembianze; si negò perfino la possibilità di distinguere l'operaio fra gli altri ceti della cittadinanza, e sopratutto si manifestò vivissima la preoccupazione che una legge speciale potesse ferire in qualche modo i principii del diritto comune. « Il ne faut toucher au droit « commun, même en faveur des plus intéressants ou des plus « dignes, qu'avec une extrême circonspection » notava Desjardins, e più energicamente ancora Leroy-Beaulieu « La législation spé- « ciale, c'est le privilége et c'est l'injustice... En résumé, c'est « par une hygiène générale, des procédés d'ensemble s'appliquant « à la Société toute entière que l'on peut surtout alléger les « maux que l'on signale. Que l'on s'occupe d'assurer des ga- « ranties à tous ceux, grands ou petits, hommes ou femmes, « aisés ou non, qui vivent de leur travail personnel, M. Leroy- « Beaulieu s'en félicitera; mais il verrait avec regret que l'on « voulut uniquement légifèrer en faveur d'une classe quelconque, « mal definie d'ailleurs et indéfinissable, de la Société ».

***

La voce degli innovatori trovò invece un'eco simpatica in Italia.

È giusto il notare però che presso di noi, prima ancora del discorso di Gierke, si era invocata la necessità di un codice privato-sociale.

Infatti, E. Cimbali nel suo libro « *La nuova fase del Diritto civile nei suoi rapporti economici e sociali* », pubblicato fin dal 1885, aveva notato, anch'esso, che mentre tutti i sistemi, le istituzioni, gli organismi sono travagliati da un febbrile movimento di rinnovazione, solo il diritto privato, in mezzo a tanta vertigine di rivolgimenti, sembra non senta per nulla l'influenza rivoluzionaria dei nuovi tempi. Anch'egli aveva segnalato l'individualismo signoreggiante nei moderni codici civili, dovuto all'influenza soverchia che ancora vi spiega il diritto romano. E pa-

Digitized by Google

revagli che il periodo individualistico fosse prossimo a chiudersi, stando oramai per aprirsi il periodo della socialità. Perciò a larghi tratti indicava il contenuto di quel futuro codice privato-sociale, che egli avrebbe voluto così ampio da comprendere nelle sue disposizioni, non solo tutti i rapporti dell'attività giuridica privata e quella del capitale col lavoro, ma eziandio tutte le materie ora regolate dal codice di commercio.

Ed anche prima del Cimbali, il Vadalà-Papale aveva innalzato il grido *instauratio facienda ab imis fundamentis*, domandando che lo spirito individualistico fosse eliminato dal dominio del diritto per farvi entrare lo spirito sociale. (*Il Codice civile italiano e la scienza*, Napoli 1881). La qual idea ha caldeggiato pure in altre pubblicazioni (v. ad es. *La nuova tendenza del diritto civile in Italia*, Trani 1883) ed ancora recentissimamente in un articolo « *Per un codice privato-sociale* » che apparve nella Rivista « *Lo Spedalieri* (1891, n° 1) » in cui afferma che tutto il lavorìo legislativo per la costruzione del codice civile a base sociale si fonda su tre tendenze che si sarebbero largamente manifestate nella coscienza giuridica italiana, ossia la tendenza scientifica, l'economica e la sociale.

Per verità però le nuove dottrine (e lo stesso Vadalà-Papale nell'articolo citato ebbe a confessarlo lealmente) non trovarono, a tutta prima, nella nostra letteratura giuridica un'accoglienza troppo favorevole. Senza pronunciarne una condanna assoluta e definitiva, parve generalmente che quel tanto di buono, che quelle recavano con sè, potesse attuarsi senza porre a soqquadro con innovazioni radicali e fors'anche intempestive, tutto l'edifizio del nostro codice civile. Vi fu perfino chi ritenne che « le leggi vigenti non sono « d'ostacolo a nessuna giudiziosa riforma, ma che invece in esse « trovinsi i germi di un migliore sviluppo, che bisogna sempre « più fecondare (Abate Longo, *La protezione dei deboli come « funzione dello Stato e l'influenza di questa nel diritto civile*, « Catania, 1886) ». Del resto la stessa forma alquanto indeterminata con cui si presentavano quelle nuove dottrine, la nebulosità, per non dire l'oscurità del linguaggio, di cui si rivestivano attingendo, senza misura, vocaboli e paragoni a scienze estranee alla giurisprudenza; lo studio manifesto di assidere il diritto civile sulla base di una scienza ancora immatura, qual è la sociologia e quasi di confondere insieme l'una e l'altra cosa, tutto ciò cospirava a dar facile appiglio alle critiche che da più parti si elevarono.

Digitized by Google

Non staremo a riferirle in disteso e neppure a riassumerle. Ci basti ora il ricordare che furono tra gli oppositori primo, forse, fra tutti il Melucci (*Questioni di diritto civile*, Torino 1884), quindi il Cogliolo, che le conclusioni alquanto ardite enunciate prima nella « *Teoria dell'evoluzione darwinistica del diritto privato* » (Camerino 1883), modificò poco dopo e ridusse quasi al nulla nei suoi « *Saggi sopra l'evoluzione del diritto privato* (Torino 1885) »; Polacco (*La funzione sociale dell'odierna legislazione civile*, Camerino 1883); Chironi (*Sociologia e diritto civile*, Torino 1886); Filomusi-Guelfi (*La codificazione civile e le idee moderne che ad essa si riferiscono*, Roma 1887); Cuturi (*Delle recenti discussioni sul metodo nello studio del diritto civile italiano*, Bologna 1887); Simoncelli (*Le presenti difficoltà della scienza del diritto civile italiano*, Camerino 1890).

A questo punto la discussione entra in una nuova fase. Perocchè egli è precisamente sul principio di quest'anno che due giovani e valenti professori, il Salvioli ed il Gianturco, in due discorsi accademici rinnovarono gli attacchi contro il nostro codice civile, come quello che mal corrisponderebbe ai bisogni ed agli interessi della moderna organizzazione sociale. Non chiedono nè l'uno nè l'altro una ricostruzione del codice in base alla sociologia, non pretendono di applicare al diritto civile le formole dell'evoluzione, ma ponendosi sopra un terreno meglio definito e più pratico vorrebbero, come il Menger, che le disposizioni della legge proteggessero e favorissero le classi più misere. Però il Gianturco (*L'individualismo ed il socialismo nel diritto contrattuale*, Napoli 1891) si limita ad invocare una revisione del diritto contrattuale che in opposizione all'odierno, il quale animato da uno spirito « vecchio, affatto individualistico, sacrifica « al dottrinarismo la realtà palpitante e dolorosa, » valga, mediante efficaci restrizioni a tutelare i poveri nelle loro convenzioni coi ricchi. Il qual voto esprimeva pure poco dopo, in sua interpellanza nella Camera dei Deputati l'on. Guelpa (*Atti Parlamentari*, Tornata 20 aprile 1891, numero 1278 segg.). Il Salvioli invece va assai più in là e nel suo discorso (*I difetti sociali del codice civile in relazione alle classi non abbienti ed operaie*, Palermo 1891), dove qua e là può forse ravvisarsi un'intonazione leggermente socialistica, seguendo in certo modo la traccia del Menger, percorre tutto intiero il campo del diritto civile, scende dai sommi principii alle applicazioni che se ne

Digitized by Google

fecero e nell'indirizzo, nelle vedute giuridiche, nei principali istituti, dappertutto vede (son sue parole) « uno spirito se non « avverso, mai benevolo, sempre certo indifferente ai diritti del « lavoro abbandonati a se stessi e alla posizione speciale delle « classi operaie. Ora (egli osserva) una saggia e simpatica le- « gislazione deve colmare questa lacuna, deve discendere dalle « altezze dei vieti concetti giuridici alle dure realtà della vita « operaia ». Date le premesse è agevole l'immaginarsi quali sieno le conclusioni e le proposte (già impugnate, almeno in parte, dal Delogu, *Codice privato e codice sociale*, Catania 1891), tanto più che le une e le altre sono ben poco dissimili da quelle del Menger. Nel giurista austriaco come nell'italiano è del pari ardente la fede, su cui non cade la più lieve ombra di scetticismo, non un dubbio li turba, non la menoma titubanza li arresta per un momento nel loro cammino!

Nuovi studi sull'itinerario di Corrado II nel 1026;

Nota del Socio CARLO CIPOLLA

II.

Nell' ultimo paragrafo del *Chronicon Novaliciense* (1) si legge un aspro giudizio contro Corrado il Salico: « Chuonradus per omnia litterarum inscius atque idiota regnum arripuit Longobardorum. Qui nonnullas subiugavit ecclesias, episcopia quoque necnon abbatias ». E nelle parole seguenti il cronista si lagna che l'imperatore abbia posto sotto la dipendenza del vescovo di Como anche l'abbazia Novaliciense.

Un così severo giudizio non potè essere pronunciato a caso. Se riflettiamo che il cronista Novaliciense scriveva a non grande distanza di tempo dalla morte di Corrado II, siamo costretti ad ammettere che egli riproduca la eco dei malumori che, nella sua

(1) M.G.H. *Script.* VII, 128.

Digitized by Google

congregazione religiosa, o meglio, in generale, in tutta la regione, aveva destato il reggimento del Salico.

Sono scarse le notizie che si riferiscono alla presenza di Corrado II nelle terre dell'odierno Piemonte; tuttavia se queste notizie si raccolgono con cura e se vi si aggiunga qualcosa che ancora le biblioteche possono offrire di nuovo, potremo sino ad un certo segno spiegarci le sdegnose parole dell' antico cronachista, pur tenendo conto della circostanza che quello scrittore è siffattamente occupato e preoccupato dalla storia dell' abbazia Novaliciense, che poco vede fuori di essa. Abbiamo avuto occasione di riconoscere questo carattere della sua cronaca, quando abbiamo esaminato il suo giudizio intorno a Leone vescovo di Vercelli (1). Qui abbiamo di che meglio spiegarci il suo carattere di scrittore.

È necessario anzitutto avvertire che Corrado II non si trovò nell'attuale Piemonte se non nel 1026.

Durante l'anno 1026, Corrado II fece un lungo soggiorno nella Lombardia occidentale, cioè nella Lomellina e nell'attuale Piemonte. Ma, come su altri particolari dell'itinerario di Corrado, anche intorno a ciò regna la maggiore incertezza, mentre pochi appena sono i punti che si possano dire assodati. La fonte migliore è Wipone (2), il quale dice che l'imperatore, venendo da Verona, giunse a Vercelli, dove celebrò la Pasqua, « Vercellis venit, ibique sanctum pascha celebravit ». La Pasqua scadde in quell'anno il 10 aprile, e a Milano trovavasi il mercoledì 23 marzo, siccome risulta da un suo diploma dato in quella città (3).

(1) *Di un diploma perduto di Carlo III (il Grosso) in favore della Chiesa di Vercelli* (*Atti dell'Acc. di Torino*, 3 maggio 1891).

(2) *Gesta Chuonradi*, ed. H. Bresslau, p. 35 (cap. 12).

(3) Stumpf 1913 (Böhmer-Ficker, *Acta imperii inedita*, p. 42-3, dalla stampa del Puricelli, *De ss. Arialdo et Herlembaldo*, p. 487). Anche il diploma 1914 viene registrato dallo Stumpf sotto il medesimo giorno 23 marzo; ma egli stesso si ricredette negli *Acta*, p. 395-6, poichè avendo avuto copia della pergamena contenente quel diploma ed esistente nell'Archivio di Stato a Milano, trovò che mancano le note del giorno e del mese, essendoci solamente quelle dell'anno e del luogo. Del resto, ciò risultava anche dal cenno che di quel diploma aveva dato il Robolini, *Notizie appartenenti alla storia della sua patria*, II, 103-4. Il diploma non è pubblicato con tutta esattezza dallo Stumpf;

Digitized by Google

Dopo di aver indicata la venuta di Corrado a Vercelli, prosegue Wipone parlandoci della opposizione fattagli da Pavia, i cui cittadini rifiutavano di ricostruire il *palazzo*, ch'essi avevano distrutto, appena ricevuto l'annunzio della morte di Enrico II. Scrive Wipone che Corrado « per biennium omnes Ticinenses afflixit », dove la frase *per biennium* bisogna intenderla con cautela, poichè in realtà egli non si trattenne in Italia per un così lungo periodo di tempo.

Quindi Wipone (1) segue narrando che *eodem tempore* (cioè durante l'assedio di Pavia) Corrado si recò a Ravenna, « Ravennam intravit ». E dopo di aver parlato di quanto accadde a Ravenna, narra (2) della state da lui passata « ultra Atim (Aitim) fluvium », in luoghi montani ed opachi, dove l'ospitò la generosità dell'arcivescovo di Milano. Passato l'estate, nell'autunno si allontanò da quei luoghi freschi, e « Italiam planam iterum peragrans », raccolse assemblee, combattè i suoi nemici, soggiogando il regno, « .....rebelles in vincula ponens, regnum pacificavit ». Qui si ricordi che col nome di *Italia plana* va intesa la pianura Padana, cioè quanto sta racchiuso fra la cerchia delle Alpi e la linea dell'Appennino. Di questa asserzione spero di avere altrove addotte (3) prove sufficienti. Le altre espressioni si spiegano facilmente, quando rammentiamo che alla parola *ribelle* non

---

p. e. nella pergamena non manca il nome della moglie di Corrado, che vi sta anzi nella forma *Gislae nostrae karissimae coniugis*, come ricavo dalla copia gentilmente comunicatami dal prof. G. Romano, del liceo di Pavia. — Mi sono chiesto anch'io come si possa conciliare la presenza di Corrado II a Milano, colle parole di Wipone (c. 12) « rex ingressus Italiam, per Veronam inter Mediolanum et Papiam Vercellis venit ». Parrebbe ch'egli non avesse toccato Milano, come di certo non entrò in Pavia. Forse Wipone voleva invece significare solamente che Corrado non fu a Pavia, ma presentossi dinanzi a Vercelli, dopo aver percorso il piano che sta tra Milano e Pavia. — Intorno alla coronazione di Corrado a Milano, cfr. BRESSLAU, *Konrad II*, I, 122. Se il Robolini dice che il diploma di Corrado fu dato in favore del monastero delle suore di S. Maria e il testo edito dallo Stumpf parla della Chiesa di S. Martino, la è una differenza solo apparente. In realtà fu dato naturalmente alla chiesa di S. Martino, la quale nel sec. XV si unì a quella di S. Maria, come gentilmente avvertivami per lettera il prof. Romano; e qui sta la ragione della confusione avvenuta nella indicazione fornita dal Robolini.

(1) Cap. 13,

(2) Cap. 14.

(3) *Arch. Stor. lomb.*, 1891, p. 158.

Digitized by Google

dobbiamo, seguendo il linguaggio del tempo, attribuire altro significato che quello di *nemico*. E, al postutto, Corrado dovea considerare come vero ribelle chiunque si opponeva al proprio diritto.

Queste parole sono seguìte da quest'altre, le quali ci fanno conoscere la via battuta da Corrado, quando abbandonò i luoghi montani: « et sic pertransiens, usque ad confinium Italiæ et Burgundiæ pervenit ». E il capo successivo (1) principia colla notizia che « inchoante anno nativitatis Christi 1027 rex Chuonradus in Iporegia civitate natalem Domini celebravit », dove recaronsi a lui gli ambasciatori di Rodolfo re di Borgogna. Ivrea era appunto sul confine tra l'Italia (=*regnum Italiæ*) e la Borgogna.

Le questioni cronologiche e storiche, che si possono muovere riguardo agli avvenimenti qui sommariamente narrati, sono numerose assai. Poichè è evidente che la narrazione presentasi lacunosa, e in qualche luogo, non dico inesatta, ma almeno non determinatamente precisa, come avviene in particolare per la frase troppo indeterminata riguardo all'assedio di Pavia. Inoltre ci pervennero alcuni diplomi (2), che attestano che Corrado si trovava a Cremona tra il 14 e il 19 giugno; altri diplomi (3), ma questi pur troppo privi di data, dimostrano ch'egli soggiornò a Piacenza o nei dintorni. Noi non sappiamo se Corrado siasi trovato a Cremona e a Piacenza nell'andare a Ravenna o nel ritornare. Accenno a ciò, perchè ha una qualche relazione, sia pure indiretta, con quanto dovremo considerare, rispetto al soggiorno di Corrado nell'odierno Piemonte.

Ritorniamo ora sui nostri passi, per vedere ciò che Wipone dice riguardo all'oppugnazione contro Pavia. Egli la narra tutta di seguito, dicendo che Corrado non desistettè per un biennio dal combattere i Pavesi, prima ch'essi accettassero di eseguire ciò che egli ordinava, compresa la ricostruzione del *palatium*. Non credo tuttavia che di qui si possa dedurre che Pavia sia stata ridotta a chiedere mercè, avanti che Corrado prendesse la via di Ravenna. È anche ammissibile la supposizione, che Wipone assommi qui in una narrazione seguìta tutto ciò che aveva da dire riguardo alla guerra contro Pavia, anche se avvenuto dopo della

(1) Cap. 15.
(2) STUMPF, 1916-9.
(3) STUMPF, 1921-2.

Digitized by Google

marcia sopra Ravenna, e pur anche posteriormente al tempo passato sui monti, dove l'ospitò l'arcivescovo di Milano. Forse sarà probabile che il più forte della guerra spetti ad un tempo anteriore alla partenza di Corrado; poichè non pare che egli lasciasse il Pavese, senza aver prima fatto sentire la sua potenza ai nemici. Ma è anche possibile l'opposto, non essendo del pari escluso che della vittoria contro i Pavesi, Corrado potesse essere, almeno in parte, debitore all'arcivescovo Milanese.

Ciò premesso, rilevo qualche particolare della guerra Pavese. Narra Wipone che Corrado oppresse i *defensores* dei Pavesi « Adalbertum marchionem et Willihelmum et caeteros principes..... » e « castrum eorum nomine Urbam desolavit ».

Il marchese Adalberto è da identificarsi con Adalberto marchese, figlio di Oberto II, della famiglia Estense, come osservò Muratori (1), secondo il quale il marchese Guglielmo « anch'egli probabilmente fu della stessa famiglia ». Il Terraneo (2) lo fa della stirpe Aleramica, scrivendo: « Guglielmo marchese di Monferrato ». Nè veramente è forse troppo presto, al 1026, il parlare di un marchese di Monferrato, se Ottone marchese di Monferrato s'incontra proprio con questo titolo appena pochi anni dopo, in una carta del 1040 (3).

Anche lo stesso nostro Guglielmo porterebbe il titolo di marchese di Monferrato, se dovessimo prestare ogni fede, pur nelle frasi, ad un documento di donazione del 1027 (4); egli era vivo ancora nel 1031 (5).

Secondo la genealogia che degli Aleramici compose il Desimoni (6), questo Guglielmo, secondo per ordine, è appunto il padre di quell' Oddone, che vediamo ricordato dal documento del 1040.

Quanto ad *Urba*, il Muratori (7) disse diggià che quel *castrum* è da cercarsi in Valle d'Orba. E non è di questo luogo il tentare

---

(1) *Ant. Estensi*, I, 117. Del resto, intorno a ciò cfr. quanto scrivo nella dissertazione *Di Rozone vescovo di Asti*, ecc., Torino, 1891, p. 21.

(2) *Adel. illustr.* II, 118.

(3) Moriondo, *Mon. Aquensia*, II, 302.

(4) Moriondo II, 297.

(5) Moriondo, II, 630.

(6) *Nuova Antologia*, III, 201.

(7) *Ant. Est.*, I, 117.

Digitized by Google

l'identificazione di questo castello, per la quale, chi il brami, può vedere le sagge considerazioni del Bresslau (1).

Ora passiamo a considerazioni di diversa natura.

Ci sono pervenute varie notizie le quali accennano ad altre resistenze incontrate da Corrado II nella regione, che, per intenderci, chiameremo piemontese.

Vedemmo testè come parli Wipone riguardo agli ultimi mesi del 1026. Corrado, lasciati i luoghi montani, nei quali aveva goduto un po' di frescura nella caldissima estate, tanto di sovente dannosa ai soldati tedeschi, percorse la pianura Padana, *Italia plana*, per venire ad Ivrea, sul confine tra l'Italia e la Borgogna. Wipone non determina chiaramente l'estensione territoriale nella quale avvennero le peregrinazioni autunnali dell'imperatore eletto. Dal contesto tuttavia sembra risultare ch'egli siasi trattenuto nella parte occidentale della pianura: nelle parole dello storico tedesco non si trova infatti la più piccola allusione a qualsiasi mossa ch'egli possa aver fatto dalle parti di Oriente. E poi come meta delle sue peregrinazioni, *peragrans*, *pertransiens*, è espressamente indicata la città di Ivrea, dove celebrò il Natale.

Queste escursioni furono fatte con scopo militare, dacchè Wipone parla di *ribelli* da lui posti in catene, e ricorda ch'egli *pacificò il regno*, che è una frase molto significante. A ciò stesso accennano anche altre fonti. Wolfherr nella *vita* di s. Godehardo vescovo di Hindelsheim (2), compendiando in poche parole la narrazione della spedizione italica di Corrado, narra che egli celebrò la Pasqua a Vercelli « et ita contiguas circumquaque regiones, in novo regio decore, visitando peragravit ». Più esplicito ancora è forse Rodolfo Glabro (3), quantunque questo scrittore sia estremamente confuso nella narrazione del principio della spedizione italica del 1026. Con evidente errore (4), egli asserisce che Corrado discese dalle Alpi per la via di Como. Ma sul rimanente della spedizione, pare che non erri scrivendo: « Nam et Papienses, ceterorum superbissimi, palatium regis, in sua civitate operoso sumptu constructum, destruxerant usque ad solum. Ille vero, ut comperit, ferociter irruit, Iporeiam primitus civitatem capiens,

(1) In nota al c. 12 di Wipone.
(2) *Acta Sanctorum*, Mai, I, 511, col. *a*; cap. 21.
(3) *Hist.*, M.G.H , *Script.*, VII, 66.
(4) Cfr. Bresslau, *Konrad II*, I, 455.

Digitized by Google

deinde ceteras, cum castris universis propriæ subiciens ditioni ». Poscia si recò a Roma.

Non può ammettersi che Corrado abbia conquistato dapprima Ivrea e poscia le altre città; ma può concedersi che dalle parole di Rodolfo Glabro questo almeno si possa desumere, che Ivrea fu tra le città, che il tedesco si assoggettò colla forza. Ora di questo posso dare una nuova prova, mercè la reintegrazione di un diploma di Corrado in favore del Monastero di Fruttuaria, diploma che finora era conosciuto solamente in modo imperfetto (1).

Questo diploma era conosciuto unicamente dalla edizione fattane dal Guichenon (2), dove manca di data. L'editore annota: « Hæc carta, quæ sine die et consule est, referri debet ad annum 1026, aut 1027 ». Mons. Francesco Agostino della Chiesa, in un'opera da lui stesso pubblicata (3), lascia intendere di aver conosciuta la data di questo diploma, accennando al 1026, colle parole: « ...in duobus privilegiis (*in favore di Giovanni abbate di Fruttuaria*) Conradi II Imperatoris, vno sub anno 1026 et altero seguenti datis ».

Ma assai più esplicito è nella sua inedita *descrizione del Piemonte* (4), conservata nella biblioteca di Sua Maestà in Torino. Parlando del privilegio dato da Enrico II al monastero Fruttuariense, egli scrive: « Confirmarono questo priuilegio et altri più ampi ne concessero Corrado 2, mentre nell'anno 1026 trovavasi all'assedio d'Ivrea; Henrico 3 imp. essendo in Mantua del 1055..... »

Nell'Archivio di Stato a Torino non si conserva che una copia del privilegio, fatta nel sec. XVIII (5); ma essa non ha importanza, poichè dal confronto fattone, mi risultò che essa altro non è che una copia della edizione prima della *Bibliotheca Sebusiana*.

Ma per buona sorte m'imbattei nella copia che di quel documento si fece, per suo uso, Mons. Della Chiesa. Trovasi in un fascicolo, nel quale quell'esimio erudito erasi trascritto vari an-

---

(1) STUMPF, 1943.

(2) *Bibliotheca Sebusiana*, Lugduni 1660, p. 382-3. Fu riprodotto nella seconda edizione della *Bibl.*, curata da Guglielmo HOFFMANN, Taurini, 1780, p. 118.

(3) *S. R. E. Cardinalium, Archiepisc. Episcop. et Abbatum Pedemontanae regionis Chronologica historia*, Aug. Taurin., 1645, p. 263.

(4) Tomo IV, p. 99. Questo volume è autografo.

(5) *Abbazia di S. Benigno di Fruttuaria*, mazzo 1.

Digitized by Google

tichi documenti, senza citazione di fonte. Il diploma per Fruttuaria è l'ultimo dei documenti ivi copiati dal Della Chiesa, ed è seguìto dal diploma di Corrado II in favore di Breme; ma quest'ultimo è scritto da altra mano, benchè contemporanea (1).

Ripubblico qui il diploma Fruttuariense (2), specialmente perchè nella nuova copia esso ha la data. Dalla *Descrizione del Piemonte* si poteva comprendere che il diploma spettava al 1026, e ch'era datato durante l'assedio d'Ivrea. Ma ora non solamente ciò viene confermato, ma apprendiamo ancora che esso è del 20 dicembre di quell'anno.

Il Della Chiesa ommette alcune formole finali, e qui e colà ci presenta un testo inferiore a quello del Guichenon. Sicchè pare che il testo esatto del diploma non si possa avere nè dal testo del Della Chiesa, nè da quello del Guichenon separatamente, ma dal confronto di ambedue.

Quando sia cominciato l'assedio di Ivrea lo ignoriamo; ma evidentemente Ivrea non fu presa d'assalto, nè dopo una breve oppugnazione.

Nel pubblicare la copia del Della Chiesa aggiungo in nota le varianti di quella del Guichenon, osservando che la maggior parte di esse sono preferibili; poco monta se in due luoghi il Della Chiesa credette di lasciar da parte alcune formule cancelleresche. Ma in una grossa variante, che si ripete due volte nel documento, s'imbatterà il lettore, ed è la sostituzione, fatta dal Guichenon, del titolo imperiale al reale, a proposito di Corrado. Forse di qui avvenne che si ommise poscia la data, dacchè nel 1026 Corrado non essendo ancora imperatore risultava troppo chiara la indicata modificazione introdottavi dal copista. In questa parte dunque, la lezione del Della Chiesa è indiscutibilmente preferibile.

Non è impossibile che a questo documento possa associarsene un altro, che sta senza data, ma è sicuramente anteriore al 26

---

(1) Questo fascicolo si trova intercalato in un volume degli *Annali* del Muratori (mazzo n° 18) annotati da Tommaso Terraneo, nella biblioteca Nazionale di Torino.

(2) Appendice I. Siccome nell'archivio del Comune di S. Benigno (di Fruttuaria) si conservano alcune antiche pergamene, e un volume di documenti, così si potrebbe sospettare che vi si trovasse in originale o in copia anche il diploma di Corrado del 1026; nell'Appendice II si troverà un cenno sui diplomi imperiali esistenti in quell'Archivio, che visitai nel 1889 e nel 1891, e da quel cenno si vedrà come il nostro diploma vi manchi.

Digitized by Google

marzo 1027, cioè alla sua coronazione quale imperatore, perchè in questo diploma è ancora indicato come re (1).

È un *præceptum confirmationis* col quale Corrado concede e conferma molti ed estesi possessi ai fratelli Bosone e Guido figli di Arduino marchese. Probabilmente (2) quest' ultimo è o Arduino IV, secondo le congetture del Desimoni, o Arduino V, secondo quelle del Bresslau (3). Il Desimoni opina che dopo la morte di re Arduino, la sua marca sia andata « sciolta e spezzata in parecchie signorie », una delle quali sarebbe il marchesato di Romagnano, che avrebbe appartenuto al sunnominato Guido. E anche il Bresslau fa discendere da Guido la stirpe dei Romagnano. Tuttavia intorno a questo Guido le incertezze sono molte. Il Desimoni suppone ch'egli fosse già morto nel 1029, trovando recata dal Della Chiesa una carta del 1029, secondo anno di Corrado (imperatore), rogata in Biandrate, in cui Perengarda, figlia del fu Guidone dei marchesi d'Ivrea e vedova di Opizzone conte, vendette alcuni luoghi situati nei contadi di Vercelli e di Ivrea (4).

---

(1) *Chart.* I, 453-4, *nr.* 266; STUMPF, 2125.

(2) Cfr. DE SIMONI, *Marche*, p. 97; DIONISOTTI, *Famiglie celebri dell'Italia Superiore*, Torino 1887, pag. 40.

(3) *Konrad II*, I, 363.

(4) Non tralascio di citare l'*Albero genealogico dimostrativo della Famiglia de' Signori Marchesi di Romagnano*, che, con annessi documenti, si trova in un processo a stampa nell'*Arch. Camerale*, Registro *Declaratorie* 1753, 2°. L'albero si fa cominciare con *Vidone*, *marchese di Romagnano*, padre di *Odolrico*; ma questi due nomi non si congiungono poi ai successivi membri della famiglia, rimanendone staccati. Per questi due nomi citasi il documento del 20 ottobre 1040, con cui Odolrico marchese figlio della buona memoria di Vidone marchese, insieme colla moglie Julita contessa, fa una offersione al monastero di S. Silano di Romagnano, al quale dona beni in Romagnano, Casalgrasso, Vinovo, Pancalieri, ecc. È il noto documento che può vedersi presso DURANDI, *Piem. cispad.*, p. 265, ID. *Piem. transpad.*, p. 113; MORIONDO, II 301; cfr. BRESSLAU, *Konrad II*, I, 379, nota 1, il quale conferma che quel documento appartiene ai Romagnano, e lo dimostra confrontando i beni descritti nel documento 1040 con quelli che ai Romagnano confermò il 6 marzo 1163 l'imperatore Federico I (presso STUMPF, *Acta*, p. 599-611). È dunque un fatto positivo che Guido ricordato come morto nel 1040 apparteneva alla stirpe che poscia si chiamò dei Romagnano, quantunque duri ancora l'incertezza sulle generazioni che lo legano ai suoi posteri. Una prova altrettanto sicura per accertare l'identità tra questo Guido capostipite della famiglia dei conti di Romagnano, e quello ricordato dal diploma del 1026 non l'abbiamo; poichè i beni che Corrado II confermò a Bosone e Guido con questo diploma, sono situati nell'Astese e nel Torinese, e non nel terri-

Digitized by Google

La medesima Perengarda, professante legge salica, figlia del marchese Guido, e moglie del conte Opizzone di Biandrate, fece una offersione alla chiesa di Vercelli (1).

Ma non è ben certo che questo Guido sia un tutt'uno col nostro, il quale secondo il Dionisotti visse almeno sino al 1047, locchè non pare ammissibile.

Certamente è diverso da questo quel *Wido marchio* che, secondo la cronaca Novaliciense (2), morì al tempo dell'abate Gezone. Infatti Godefrido, successore di Gezone, nel 1026 (e probabil-

---

torio Eporediense, in Romagnano, ecc., come nel documento del 1040. Tuttavia ci sono indizi per credere a questa identità, e tali indizi si possono trovare saggiamente raccolti ed esposti dal De Simoni (p. 97, 101), il quale ammette come cosa sicura che Guido, fratello di Bosone sia stato quello della stirpe Arduinica, che lasciò i primitivi possessi della famiglia per recarsi nella Marca d'Ivrea. A questo proposito può tornare utile osservare che il diploma del 1026, di cui si conserva l'originale nell'Archivio di Stato di Torino, era stato fatto veramente per il solo Bosone, e che il nome di Widone vi fu aggiunto, modificando in qualche luogo il testo, perchè potesse riferirsi ai due fratelli. Può questa circostanza (che fu rilevata dal Bresslau, op. cit., I, 135) rafforzare la supposizione che detto Guido fratello di Bosone, vivesse in certa divisione dal fratello.

(1) Completo ciò che il Desimoni (p. 97) stampò, con quello ch'egli mi comunicò amichevolmente; egli anche aggiunse che aveva adoperato, a questo proposito, molti anni sono, una raccolta di documenti Vercellesi fatta dal Della Chiesa. Cercai indarno tale opera del Della Chiesa in Torino nella Biblioteca Nazionale e in quella di S. M. Ringrazio i sigg. cav. Francesco Marocchino e cav. Camillo Leone che per me la cercarono, e pure indarno, nella biblioteca civica di Vercelli, e negli Archivi del Comune e del Capitolo di Vercelli. L'avv. A P. Carena nei suoi ottimi *Discorsi storici* scritti nel 1766 (conservati ms. nella biblioteca di S. M.) ha un bel capitolo *sopra le opere inedite di mons. Francesco Agostino della Chiesa vescovo di Saluzzo*, ch'egli chiama « il più diligente e laborioso de' nostri scrittori ». Dando l'elenco delle opere lasciate inedite dall'illustre scrittore. ricorda anche il *Promptuarium Antiquitatum Ecclesiarum Pedemontis in quo fundationes ac donationes ipsarum ecclesiarum, nec non privilegia et indulta summorum Pontificum, Imperatorum, Regum ac aliorum principum referentur*. Ma siccome Vercelli in quel tempo non apparteneva al Piemonte, così l'opera veduta dal Desimoni non puossi identificare con questo *Promptuarium*. Il Terraneo nel suo *Tabularium Celto-Ligusticum* (conservato nella biblioteca Nazionale di Torino) cita spesse volte le *Adnotationes* mss. del Della Chiesa, che sono osservazioni veramente preziose da lui fatte a molti documenti di storia piemontese. Ma anche qui non abbiamo i documenti citati dal Desimoni.

(2) Ed. Bethmann, lib. V, c. 31 (M.G.H., *Script.*, VII, 117-8).

Digitized by Google

mente anche nel 1014) era diggià abate Novaliciense (1), mentre Gezone dev'essere morto non dopo il principio del secolo XI (2).

E finalmente veniamo al diploma in favore del monastero di Breme.

Nel 1026 Corrado II concesse a quel monastero un diploma, che fu indicato dallo Stumpf (nr. 1923) nei suoi regesti, coordinandolo cogli altri diplomi, così da attribuirlo all'autunno di quell'anno. Lo pubblicò in appresso negli *Acta imperii selecta* (3) e allora lo attribuì all'agosto. In verità questo solo sappiamo intorno alla data di quel documento, ch'esso è anteriore al 7 settembre 1026, poichè nell'escatocollo esso porta il secondo anno di regno di Corrado, che in quel giorno entrava nel terzo anno. Sicchè non c'è motivo, per questo rispetto, di staccarsi dal Bresslau (4) che lo giudica dell'aprile. La sua collocazione può variare a seconda che adottiamo questo o quel sistema circa l'oscuro itinerario di Corrado II, durante il 1026.

Qui voglio comunicare soltanto una notizia a completare lo Stumpf dove dice di desumere il diploma da un istrumento notarile dell'Archivio di Stato di Torino. Il diploma leggesi sopra una pergamena contenente anche il diploma che in favore del monastero di Breme venne dato nel 929 da re Ugo. È in carattere della fine del sec. XII, e porta la data della stessa mano di chi scrisse il resto del diploma, ma aggiunta posteriormente. Essa vi sta in questa forma: « Data anno dominicae incarnationis millesimo XXVIIII regni vero donni Chunradi Secundi regnantis II, actum in Bremite feliciter ».

Lo Stumpf aveva congetturato che il numero XXVIIII celasse un errore da correggersi così: XX[VI, indictione]VIIII. Pare che non siasi ingannato. Infatti abbiamo avvertito che nello stesso fascicolo nel quale mons. Francesco Agostino Della Chiesa trascrisse alcuni documenti del secolo XI, e tra questi il diploma di Corrado in favore del monastero di Fruttuaria, trovasi, ma di altra mano del sec. XVII, anche il diploma presente, colla data: « Dat. anno dominicae Incarnationis 1026, Indictione nona, regni vero domni Corradi 2 regnantis secondo. Actum in Bremetto feliciter ».

---

(1) Corrado lo privilegiò in quell'anno 1026, come si dirà. STUMPF, 1923.
(2) BETHMANN, in MGH., *Script.*, VII, 133.
(3) Pag. 396-8, nr. 284.
(4) *Konrad II*, I, 455.

Digitized by Google

Il diploma di Corrado è in parte riferito anche nel processo a stampa (1761) *Sommario della causa in giudizio di Revisione vertente dinanzi l'Eccell. Regia Camera de' Conti tra il sig. vassallo Francesco Andrea Romagnano di Virle ed il r. Patronato per il feudo di Pollenzo* (p. 1-3). Non se ne riferisce la data per disteso, ma solamente il diploma viene registrato all'anno 1026. Come fonte si indica: *Prod. dal detto sig. Attore in comparsa* 29 *marzo* 1758 *per esistente presso l'Uffizio del signor Proc. Gen.* (1).

Nell'Archivio Camerale (2) esiste una copia del diploma stesso, fatta da « Nicola Lanio cittadino di Torino, traduttore di sc[ritture] antiche in più lingue », il quale la desunse nel secolo scorso da « estratto autentico . . . in caratteri antichi » (3). Egli riprodusse anche le autenticazioni dei due notai, *Jacobus de Collis de Bremide*, e *Johannes Bottus genitus quondam dni Jacobi publicus papiensis imperialique auctoritate notarius*, i quali dichiarano di aver eseguita questa copia. Il primo di questi due notai estrasse la sua copia « ab originali et auctentico priuilegio monasterii suprascripti ». In questa copia la data del diploma è in questa forma: « Data anno dominicæ Incarnationis millesimo vigesimo sexto, indictione nona, regni vero domini Conradi secundi regnantis secundo. Actum in Bremeto fęliciter » (4).

---

(1) L'anno 1761 risulta dall'esemplare che di questo Processo esiste nell'Arch. Camerale di Torino, « Declaratoria 1761, I ».

(2) *Romagnano di Pollenzo*, *Titoli e Scritture* dal 1026 al 1754, N° d'inventario 598.

(3) Per l'epoca del Lanio giova avvertire che abbiamo una patente del duca Vittorio Amedeo, 5 giugno 1694, che accorda una gratificazione a Nicolao Lanio *interprete* (Arch. Camerale, *Patenti Controllo Finanze*, Registro 190, f. 198').

(4) Nell'archivio dell'Economato Generale di Torino, *Cronaca Ecclesiastica*, busta II, esistono due copie (di cui una imperfetta) del *Chron. Novaliciense* di mano di Eugenio de Levis. In una di queste sta trascritto un brano del diploma, ma è desunto dalla stampa testè citata *Sommario della causa;* oltracciò il De Levis dopo aver copiato un brano del diploma di Enrico III, 1048, per Breme, dall'originale, allora esistente nell'archivio dell'Economato ed ora nell'Archivio di Stato, lo corresse, riducendolo a quello di Corrado II ma in questo lavoro pare non abbia adoperato altro aiuto che quello della medesima stampa.

Digitized by Google

APPENDICE

I.

1026, dic. 20; durante l'assedio di Ivrea. — Corrado II, a preghiera di Guglielmo abate Divionense, imitando quanto fece Enrico suo predecessore, riceve sotto la sua protezione il monastero di S. Benigno di Fruttuaria e Giovanni abate del medesimo.

In nomine sanctę et indiuiduę Trinitatis Conradus eius fauente misericordia Rex (1). Quoties (2) ad laudem seruitiumque Dei novus aliquis construitur locus (3) regia auctoritate (4) ad pręcauendas posterorum uersutias necessario corroboratur. Quocirca dignum duximus Fructuariense cęnobium literalibus pręceptis confirmare exorante dno Guillielmo Diuionense (5) abbate qui prędictum monasterium ex prędiis elemosinisque (6) propinquorum suorum, ac cęterorum fidelium Christi a fundamentis construens plurimos secundum regulam S. Benedicti Deo seruientes inibi congregauit: nos nostrosque in perpetuum successores prout diuę memorię prędecessorem nostrum Henricum suo ac fratrum contubernio sociauerat (7) omnium benefactorum suorum participium habere cupiens primum eiusdem cenobij abbatem nomine Johannem eius in presentia consecrari fecit et tam ipsum quam totum ipsum (8) locum suę Imperiali tutelę commisit, ea maxime pro causa, ut eandem illi in omnibus libertatem conseruaret (9), quam Cluniacense Monasterium obtinere dinoscitur (10). Nos ergo sa-

(1) Corradus eius annuente misericordia Romanorum Imperator augustus. GUICHENON. — L'invocazione *divina favente clementia* (o *providentia*) *rex*, nei diplomi di Corrado, è quella indicata dal WAILLY, *Paléographie*, Paris 1838, I, 284.

(2) Quotiens.

(3) locus construitur.

(4) imperiali authoritate.

(5) Wilelmo Diuionensi.

(6) eleemosynisque.

(7) sociauerit.

(8) eundem.

(9) conseruet.

(10) dignoscitur.

Digitized by Google

luti animę (1) nostrę consulentes et beneuolentiam et affectum quam (2) erga prętaxatum locum habuit imitantes; prędicti quoque R. (3) Abbatis precibus annuentes, sępe nominatum locum simili nos in defensione suscipimus, omnibus tam modernis quam posteris interdicimus, ne quis eius (4) fratribus rebusque quas ad pręsens possident, uel post modum aduisituri (5) sunt aliquam inquietudinem ullatenus (6) inferre pręsumat. Stuimus (*sic*) quoque etc. (7). Si quis autem etc. (8). Signum dni Chonradi serenissimi Regis. Hugo Cancellarius uice dni Arbonis archicancellarij recognovit. Dat. 13 Kal. Ianuarij anno dominicę incar. 1026. Regni uero dni Chuonradi regis tertio Ind. 10. Acta sub obsidione Eporeicue (9) feliciter » (10).

II.

Intorno all'antico archivio comunale di S. Benigno alcune notizie si possono leggere presso Gius. CALLIGARIS, *Un'antica cronaca piemontese inedita*, Torino 1889, p. 99, nota 1.

---

(1) *Voce ommessa.*

(2) quem.

(3) *Lettera omessa dal* GUICHENON, *e pare con ragione.*

(4) huius loci.

(5) vel in posterum acquisituri.

(6) *Voce ommessa.*

(7) Statuimus quoque et Dei nostraque authoritate confirmamus, ut idem locus sopra memoratam libertatem in cunctis obtineat, et quaecumque de eius libertate et stabilitate de abbatis electione et consecratione a domino apostolico Benedicto, multisque episcopis in priuilegiis et synodalibus decretis statuta sunt, rata omni tempore et inconcussa firmiter subnixa consecrentur conseventur.

(8) Si quis autem, quod absit, huius praecepti violator extiterit, tanquam imperialia (*sic*) banni transgressor, centum libras auri persoluat, dimidium Camerae nostrae, et dimidium ipsi Monasterio, et insuper Apostolicae maledictioni subiaceat. Et ut haec nostrae ingenuitatis authoritas stabilis et inconuulsa omni posthac permaneat tempore, hoc imperiale praeceptum inde scriptum manu propria confirmantes Sigilli nostri impressione iussimus insigniri.

(9) Evidente errore per *Eporeiae*. Il DELLA CHIESA (*Descriz. d. Piem.*, IV, 99) scrive giustamente: « assedio d'Ivrea ».

(10) Da copia di mano di mons. Francesco Agostino della Chiesa, esistente nella Biblioteca Nazionale di Torino, *Manoscritti Terraneo*, Annali Muratoriani postillati, cartella n° 18.

Digitized by Google

Vi si conservano alcune pergamene sparse, tra le quali alcune bolle dei sec. XIV e XV, ma niun diploma imperiale. I diplomi imperiali si trovano soltanto trascritti in un volume cartaceo, della fine del sec. XVII, che sulla copertina reca il titolo « In Dei nomine feliciter amen. Repertorium antiquarum scripturarum spectantium Communitati S. Benigni extractarum ab originalibus ». Il volume principia con un catalogo di pergamene, tra le quali non comparisce specificatamente descritto alcun diploma imperiale. Esso s'intitola: « Repertorium scripturarum repertarum in Archivio (*sic*) Còmmunitatis loci S. Benigni de Fuctuario factum de anno millesimo sexcentesimo octuagesimo octavo sub uigesima mensis Martij ». La pergamena più antica, qui elencata è del 1181, e la più recente del 1666. Segue la descrizione di due registri di documenti e di alcune carte.

A questo indice fa seguito una collezione di documenti trascritti, compresivi alcuni diplomi imperiali, di cui qui do la serie.

1) Fol. 62-3 (31 agosto 1006; Stumpf 1430). L'autenticazione, scritta da un amanuense in nome del notaio Marco Aurelio Carlevaris, porta la firma autografa del notaio Giuseppe Maurizio Roggieri, che firma in luogo del Carlevaris; in essa è detto che la copia è tolta « ab originali existente in Archivio (*sic*) Abbatiali S. Benigni ». Le indicazioni cronologiche inesatte sono: « dictio (!) II kal. septembris anno ab incarnatione dominicæ millesimo ducentesimo secundo anno uero Henrici Secundi regnantis V ».

2) Fol. 52-4 (1014; Stumpf 1621). L'autenticazione è simile a quella del diploma 1006, ma in essa è detto che la presente copia è tolta da altra copia esistente nell'archivio abbaziale.

3) Fol. 64-64[1] (2 sett. 1023; Stumpf 1810). L'autenticazione è simile alle precedenti; « .., ab originali existenti in Archiuio (*sic*) Abbatiali sancti Benigni . . . ».

4) Fol. 40-1 (18 aprile 1055; Stumpf 2471). L'autenticazione scritta da mano diversa dalle precedenti, è del notaio Giuseppe Enrico Alliberti, che vi appone la sua sottoscrizione; « . . . a proprio originali » in pergamena.

5) Fol, 63-63[1] (16 maggio (1) 1070; Stumpf 2735). Autenticazione, per la sostanza simile a quella dei numeri 1-3, ma scritta da altra mano; è fatta in nome del notaio Carle-

(1) Stumpf, per mera svista, scrive: 16 giugno.

Digitized by Google

varis, ma firmata dal Roggieri; « . . . ab originali existenti in Archiuio abbatiali S. Benigni, licet paulisper deuastatum (!) in sumitate ».

6) Fol. 41-2 (23 sett. 1079; Stumpf 2780 che ne fa un semplice cenno, dicendo che il documento fu visto nell'Archivio di Torino dal Bethmann). Enrico (IV) re conferma i privilegi regi e imperiali concessi in favore del monastero di Fruttuaria. « Datum nono kal. octobris anno dominicæ incarnationis millesimo septuagesimo quarto Indictione septima, anno dni. Henrici tertii ordinationis decimosexto, regni vero eius decimoquarto. Actum frangnenoni feliciter amen ». (Locus + Sigilli).

L'autenticazione del notaio Alliberti è simile a quella del n. 4; « . . . a proprio originali in membrana seu bergamina...»

7-8) (1159; 1238, febbraio; Böhmer-Ficker, *Friedrich II*, nr. 2315). Autenticazione, simile a quella dei n. 1-3, in cui è detto che il documento venne tratto da una copia antica e molto corrosa.

Al f. 66-7[1] si legge il diploma di re Roberto, edito nel I volume (N. 434-6) *Chartarum* dei *Mon. hist. patriæ*. L'autenticazione è simile a quella dei n. 1-3; « . . . ab originali existenti in Archivo abbatiali sancti Benigni ».

Passando ai documenti papali, appartengono al secolo XI i due seguenti: *a*) fol. 50-2; sinodo lateranense del 1015, Jaffé, 2 ediz., 4007 (3061); *b*) fol. 75-76[1]; (1096) 1097 sett. 9, Urbano II a Guiberto abate di Fruttuaria, ed. in *Mon. hist. patriæ*, *Chart.* I, 720-22, Jaffé 5669 (4244).

Quanto alle carte pagensi, due spettano al secolo XI e sono: *a*) fol. 65-6; 1019, ott. 28, donazione del conte Ottene, ed. in *Mon. hist. patriæ Chart.* I, 428-9; *b*) fol. 54-9 (senza data). Dichiarazione edita in *Mon. hist. patr. Chart.* I, 414 sgg.

Ai documenti citati fa seguito: in ordine di antichità, l'atto, 1123, di Guido vescovo di Ivrea, che si legge ai f. 48-49[1], e che leggesi pure nei *Mon. hist. patr.*, *Chart.* I, 758-9.

Digitized by Google

Titolo cemeteriale cristiano scoperto ad Acqui;

Nota di CARLO CIPOLLA

Il ch. sig. marchese Vittorio Scati possiede beni nel territorio di Acqui; appassionato com'egli è della storia e dell'antichità, va raccogliendo quegli oggetti antichi che vanno di giorno in giorno rivedendo la luce in quello storico territorio. Ed è un territorio che restituì diggià molti cimeli antichi, e ne continua a restituire. Il sig. marchese Scati mi mostrò negli ultimi giorni un frammento di iscrizione cemeteriale cristiana, raccolta nel 1885 dal sig. farmacista Tommaso Bertolotti di Acqui, egregia persona, che porta grande amore alle memorie storiche della propria terra. In quell'anno si demoliva parte dell'antica chiesa di S. Antonio *de Balneo*, in prossimità alla nota fonte bollente, per dar luogo alla erezione della Corte d'Assise. Pare che la pietra inscritta vi fosse stata adoperata, come materiale di costruzione, nell'abside, che si faceva risalire al sec. XIII. In quell'epoca colà trovavasi anche l'*hospitale verberatorum*.

L'iscrizione è incisa molto rozzamente, con grande irregolarità nella distanza tra lettera e lettera. Le linee sono molto addossate fra loro. La *P* ricorre una volta sola, ed è chiusa, siccome si usava nell'età della decadenza. In qualche lettera, come p. e. nella *Q*, si può ancora rilevare alcun che dell'antica e genuina forma romana. La coda, cioè, vi è un po' prolungata, ma non di troppo; siccome questa coda sta appoggiata rudemente al circolo della *Q*, così l'aspetto complessivo della lettera risulta rozzo assai e veramente barbarico.

L'epigrafe è incisa sopra un pezzo di marmo lunense, spezzato superiormente, inferiormente e al lato sinistro (di chi guarda). Sicchè l'iscrizione deve considerarsi come imperfetta da tre parti. Non si può con esattezza determinare quanto sia andato perduto al lato sinistro, quantunque sembri che tra la fine della linea 3, e quanto resta della linea 4 non ci sia altra lacuna, che di una lettera: s*v*b d*ie.* IIII [n]onas..... Ma bisogna pensare

Digitized by Google

alla irregolarità che il lapidicida conserva nella distribuzione delle parole e delle lettere, per comprendere come bisogna andar cauti, nel far deduzioni dalla indicata circostanza. La pietra venne anche sfaldata col martello, per essere adoperata per uso di fabbrica.

Il marmo attualmente è lungo cent. 24, ed alto 16, collo spessore di 6 cent. e mezzo. Vi si legge:

*vixit a*NNS · P · M
REQVIE
T · SBD · IIII
5. *n* O N A S

Al v. 1 si noti la scorrezione [a]nns, per [a]nnos.

Dalla piccola, ma storica città di Acqui non solo si ricuperarono, in vari tempi, molte iscrizioni e frammenti di antichità dell'epoca romana (1), ma furono abbastanza abbondanti i cimeli cristiani. Fra le iscrizioni riprodotte nel *Corpus*, se ne hanno tre del secolo v (2), ed una priva di data può facilmente riguardarsi come presso a poco contemporanea alle precedenti (3). Queste iscrizioni in generale furono trovate presso l'antichissima chiesa di S. Pietro di Acqui; chiesa che si fa rimontare all'età longobarda. Non so però in quale relazione stia l'iscrizione recentemente trovata con quelle, pure cristiane, che abbiamo ora ricordato. Quello che è chiaro si è, che anche la nuova scoperta, per quanto piccola e monca, pure aiuta a ricostruire la storia delle origini cristiane di Acqui.

---

(1) C. I. L. V, 2, n. 7504 sgg.; A. FABRETTI, *Musaico di Acqui*, in *Atti soc. archeol. Tor.* II, 19 sgg.; E. MAGGIORA, in *Atti* cit. II, 184 sgg.; G. BARTOLI, in *Atti* cit. II, 288; E. PAIS, *Corp. inscr. latin. suppl. ital.* n. 967, e 1083, 1.

(2) Il n. 7528 è il titolo cemeteriale di un vescovo, morto nel 488; il n. 7530 spetta al 453; e il n. 7531 al 491. Per la serie dei vescovi d'Acqui, cfr. CAPPELLETTI, *Chiese*, XIV, 133 segg.

(3) Il n. 7529.

Digitized by Google

Di tre diplomi di Federico II, uno dei quali inedito;

Nota del Dott. GIUSEPPE CALLIGARIS

Le condizioni generali in cui trovavasi il Piemonte nel 1238, quando l'imperatore Federico II giungeva nelle terre subalpine, ci son descritte a grandi tratti nel lavoro diligentissimo che il prof. Carlo Merkel consacrò alla storia dei Comuni piemontesi degli anni 1230-1259 (1).

Due elementi inconciliabili si disputavano il campo: il feudale, cioè, ed il comunale, e sotto qualunque nome o bandiera si raccogliessero i contendenti, a qualunque aiuto ricorressero, in fondo la lotta che si riproduceva non mutava nè natura nè scopo. Federico II portò, alla sua venuta, grandi speranze nei due campi, in ciascuno dei quali si acquistò simpatie, sebbene si debba credere che per un momento riprendesse maggior vigore l'elemento feudale (2). Ma, come ho detto, anche l'elemento a questo avverso ne risentì vantaggio e tanto forse che il vecchio e potente comune Astigiano ghibellino, si trovò isolato e in disparte mentre ebbero vantaggi comuni minori anche ad esso nemici.

Questa posizione singolare del comune Astigiano di fronte all'impero non è ancor nettamente illustrata, nè noi qui il tenteremo, bastandoci far notare certi fatti che, se non son nuovi, meritano però di essere esaminati e studiati con particolare cura da chi vuol ricostrurre l'intricatissima storia piemontese di questi anni.

Fra i favori che i comuni minori ebbero dall'imperatore son da notarsi tre diplomi, dati presso Cuneo nel marzo del 1238, nei quali l'imperatore accorda la sua protezione a Chieri, Cuneo,

(1) *Un quarto di secolo di vita comunale e le origini della dominazione angioina in Piemonte*, Torino, Loescher, 1890 (estr. dalle *Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, Serie II, Tom. XL).

(2) MERKEL, *op. cit.*, p. 26, 29.

Digitized by Google

Savigliano, i quali ultimi, come indicheremo, dovevano trovarsi in quel momento in urto con Asti.

Intorno alla condizione di questi tre comuni nel 1238 spenderemo alcune poche parole del presente studio, che vogliamo considerare quale breve prefazione al diploma imperiale su ricordato in favore di Cuneo, di cui qui diamo l'edizione ricavandola da copia assai antica, la quale ci pare a maggior titolo degna della luce perchè può pur servire in parte a presentarci una lezione più corretta del diploma stesso, che si ripete in forma quasi identica per i tre comuni.

Il ch. sig. Cav. Can. Casimiro Turletti nella sua *Storia di Savigliano* (1) ha diligentemente studiato la posizione che di fronte ad Asti assumeva nel 1236 e 1237 il suo comune, il quale trovavasi in quei giorni a correre egual sorte col comune di Cuneo. È ritornato sulla questione il Merkel nell'opera citata (2) nella quale studia, più che la storia interna di qualche centro comunale, le relazioni fra comune e comune. Da questi due lavori noi siamo certificati che nel 1236, avvenuto un potente risveglio guelfo con centro Alessandria, la quale sapeva destare l'attenzione dei comuni minori mostrandosi nemica ad Asti ed ai signori feudali, Cuneo e Savigliano si trovavano nelle file opposte al comune Astigiano e ai suoi alleati. Contro nemici così formidabili ed incessanti occorreva un aiuto non meno potente, e possiamo quindi spiegarci il bisogno che Cuneo e Savigliano sentivano nel 1238 di ricorrere alla protezione imperiale, che l'imperatore doveva essere lieto di accordare se noi notiamo i rapporti assai freddi, che intercedevano allora fra Asti e Federico II e gli sforzi da questo fatti per acquistarsi simpatie anche in quel campo, che parrebbe meno avergliene dovuto concedere (3).

---

(1) Casimiro Turletti, *Storia di Savigliano*, I, 114, 115. Savigliano, Bressa, 1879.

(2) Merkel, *op. cit.*, p. 21 sgg.

(3) Merkel, *op. cit.*, p. 26. Credemmo inutile inserire a questo riguardo più ampie notizie nel corpo del lavoro, perchè chiunque può leggere a sua posta il bello studio del Merkel, nel quale sono tratteggiati con diligenza tutti questi vari rapporti, ma siccome è sempre bene diffondere i buoni libri, ci sia permesso, in nota, riferire alcuni dei risultati degli studi dell'amico mio, che non saranno inutili al presente scopo. Gettando uno sguardo sull'intricatissima storia dei comuni piemontesi nel 1230-36, troviamo da una parte Alessandria, la più fedele rappresentante del guelfismo, ci sia lecita la parola, alla quale si stringono attorno molti comuni minori paurosi dei signori

Digitized by Google

Non così nettamente ci son delineate le condizioni in cui Chieri trovavasi nel 1238. Noi non sappiamo preciso in quali rapporti fosse in quell'anno con Asti, e, quel che è più, colla Chiesa e col comune di Torino, e quali furono i moventi che lo determinarono a porsi sotto la protezione imperiale.

Tale studio meriterebbe spazio assai maggiore di quello da noi dedicatogli nel presente lavoro, e dovrebbe essere accompagnato dalla ricerca di nuovi documenti, e dall'esame minuto di quelli già noti, cose tutte che noi qui non possiamo fare, per il che dovremo contentarci di poche congetture, che ci permettano di spiegarci, così in grosso, il diploma imperiale del 1238.

Il valoroso illustratore della storia Chierese, il Cibrario (1), privo di documenti che gli potessero spiegare il diploma, suppone che nel tempo di cui ci occupiamo, il comune attraversasse un vero periodo di prosperità, sì da giungere ad ottenere dall'imperatore la « corona e perfezione della libertà », cioè ad « essere immediatamente soggetto all'impero ». Se però ci pare poter stabilire che fra il 1220 ed il 1232 Chieri godesse realmente di pacifica e prospera fortuna, un documento di quest' ultimo anno ci fa veder troncata d' un tratto sì lieta sorte, ma ci lascia però indecisi sulle condizioni del comune per gli anni 1232-38.

Alludo qui a un patto di alleanza stretto a danno di Chieri, edito nell'appendice aggiunta al celebre « Codex Astensis, » di cui ci occuperemo appena esaminati alcuni punti della storia Chierese indispensabili a conoscersi.

Un documento del 1210 dicembre 16 (2) ci dimostra quanto fossero in quel momento stretti i legami di dipendenza, che

---

feudali che pretendevano diritti sugli uomini fuggiti dai loro dominii per concorrere a formare questi nuovi centri: di fronte le sta Asti, di partito imperiale, nemica implacabile dei nuovi comuni, e con lei si raggruppano i naturali nemici di questi, i signori feudali. Asti ed Alessandria sono i due centri a cui si riannodano le forze minori, l'anima dei due elementi nemici, il feudale ed il comunale. Se Asti prevale, i comuni minori devono piegar il capo davanti al più forte; ma colta la prima occasione si aggruppano nelle file opposte appoggiati ad Alessandria. Uno dei risvegli guelfi è appunto quello a cui su accennammo del 1236, che, per fenomeno curioso, portò, sto per dire, l'elemento comunale in parte sotto la protezione dell'imperatore.

(1) *Delle Storie di Chieri*, I, 120. Torino, per l'Alliana, 1827.

(2) CIBRARIO, *op. cit.*, II, 64.

Digitized by Google

stringevano il comune Chierese al vescovo di Torino, il quale pretendeva appartenergli tutti i diritti comitali « contile totum et jurisdictionem plenariam. » I Chieresi però non ammettevano una dipendenza sì piena ed assoluta, ma pure dovettero permettere che il vescovo riscuotesse, senza contraddizione o molestia, i banni per omicidio, furto, spergiuro, tradimento, di più « duella omnia et successiones peregrinorum et advenarum decedencium sine filiis et ordinamento [testamento] » e le successioni dei Chieresi stessi morti senza testamento o senza parenti fino al quarto grado.

Al vescovo fu inoltre riconosciuto il diritto di accogliere gli appelli di tutte le cause, coll'obbligo di definire in Chieri quelle che non superassero le lire dieci secusine, e gli fu data la conferma dei dazi e pedaggi, che già riscuoteva.

Più leggeri erano i vincoli che legavano Chieri ai conti di Biandrate nello stesso anno 1210 (1) giacchè, oltre il patto che obbligava il comune di Chieri a difendere i possessi dei conti predetti contro qualunque persona, eccettuato l'imperatore ed il vescovo di Torino, il qual giuramento dovea farsi dal Comune nell'occasione che « iurabit fidelitatem domino Gotifredo (conte di Biandrate) et nepotibus » che alla lor volta obbligavansi a prestare egual difesa ai Chieresi, questi dovevano ancor promettere di non ricevere alcun uomo soggetto del Conte « pro habitatore in loco Carii », promessa che ripetevano pure i Biandrate rispetto ai dipendenti di Chieri.

Un diploma di Ottone IV del 1212, marzo 14 (2) venne in buon punto a sollevare le gravi condizioni dei Chieresi rispetto principalmente al vescovo di Torino e a rimetterli nello stato in cui erano prima del 1210, approvando gli atti in cui contenevansi obblighi meno pesanti per il comune, abrogando gli altri col tacerne (3); importante fra tutte la concessione che

(1) Cibrario, *op. cit.*, II, 82. Il documento qui ricordato del 1210 è inserto in altro del 1224 che pur riguarda le relazioni fra Chieri ed i Biandrate.

(2) Cibrario, *Op. cit.*, II, 68.

(3) Cibrario, *Op. cit.*, II. 69: « indulgemus eis (ai Chieresi) et concedimus sicut a centum annis hucusque consueverant....... licitum sit eis consules creare vel potestatem... eis indulgentes illas consuetudines et fidelitates quas ab antiquis temporibus eorum predecessores facere solebant episcopis taurinensibus, volentes ut in his ipsis episcopis existant obedientes: ita tamen quod in illis ulterius ab episcopis eisdem non graventur contra iu-

Digitized by Google

gli uomini di Chieri non potessero essere chiamati in giudizio a Torino, ma tutte le lor questioni si risolvessero nella loro terra.

L'autorità vescovile, e tanto più quella meno grave dei Biandrate (1), subiva dunque alterazioni secondo che cresceva o scemava la potenza del comune, il quale nei tempi di maggior fortuna doveva sentirsi più libero da potenze forestiere, e da più deboli legami essere stretto a' suoi signori.

E periodo di prosperità ci pare che fu per Chieri quello compreso fra gli anni 1220-1232, nel quale il comune non solo legava a sè i signori più deboli che di buona o mala voglia si accostavano a lui per appoggio o difesa (2), ma riesce ad abbattere interamente la vicina terra di Testona, servendosi dei soccorsi degli Astigiani, che per antica tradizione erano amici ai Chieresi. Ma nel 1232 una fiera tempesta si va accumulando contro il comune, minacciato dalle armi di numerosi e potenti collegati, a capo dei quali si trova Asti, avvicinatasi al comune di Torino, probabilmente collo scopo di estendere nel « settentrione del Piemonte la propria influenza e rendersi meno costosa e più sicura la strada, la quale da Asti per Torino e Val di Susa conduceva i suoi laboriosi mercanti in Francia. » (3)

Quest'alleanza sì terribile per Chieri ci è riferita dal documento che già ricordammo, del 19 luglio 1232 (4), nel quale Asti prende sotto la protezione sua il vescovo, la Chiesa e la

---

stitiam ». E a pag. 70: « Item concedimus eis et confirmamus omnes consuetudines bonas quas habebant eo tempore quo nos Otto IV Romanorum imperator et semper augustus coronam imperii receperimus et eas illesas sibi conservari iubemus tam in fidelitatibus DD. (vescovo di Torino e conte di Biandrate) quam in recipiendis habitatoribus et appellationibus et in . . . (*deest*) tantum et non in amplius teneantur suis dominis quantum eo tempore tenebantur quo nos dictam coronam recepimus (cioè nel 1209).

(1) Nel 1224, agosto 5, il conte Gotifredo di Biandrate rinunzia nelle mani del podestà di Chieri, le convenzioni e i patti fermati nell'istrumento del 10 giugno 1210 (Cibrario, *Op. cit.*, II, 82). Cfr. Durandi, *Saggio sulla lega lombarda*, p. 143 (in *Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino* t. XL).

(2) Cfr. Cibrario, *Op. cit.*, II, documenti a pag. 77, 80, 82, 86, 93, 95.

(3) Merkel, *Op. cit.*, pag. 16

(4) *Codex Astensis*, *Appendix. Monumenta huc usque inedita, quae Codici de Malabayla subiiciuntur*, IV, 34. Cfr. pure t. I, la memoria col titolo: *Del codice d'Asti detto* de Malabaila, p. 180.

Digitized by Google

città di Torino e con essi Moncalieri, Pinerolo, Piossasco, Bagnolo e Barge coi marchesi di Romagnano e con Ciriè. Non ripeteremo qui tutto il documento che fu già riassunto e studiato, sebbene sotto punti di vista differenti, dal Sella [*Codex Astensis*, I, 180] e dal Merkel [*Un quarto di secolo*, ecc., p. 16], ma ci contenteremo di ricordare che fra i patti era espressamente indicato l'obbligo da parte di Asti, di difendere la Chiesa ed il comune di Torino contro Chieri (1).

Asti anzi prometteva di non ricevere mai come abitatori o alleati o dipendenti uomini di Chieri, salvo specialissime condizioni; di non mai riconciliarsi con questi, nè con loro contrarre lega, amicizia o patto. Se poi mai avvenisse che i Chieresi intraprendessero alcun che contro la Chiesa e gli uomini di Torino, o se questi si movessero contro quelli, Asti dovrà prendere parte alle ostilità e con ogni suo sforzo offendere i Chieresi, nè venir a patto o tregua se non di consenso dei Torinesi.

I Torinesi, in compenso dei gravi obblighi assuntisi da Asti, le promisero di difendere la Chiesa ed il comune contro chiunque tranne Milano, Vercelli e l Alessandria e « salva societate Lombardie, ea videlicet que est ex parte Mediolanensium ab Aste et Duria Baltia inferius » e, oltre ad altri vantaggi che a noi non interessa ricordare, concessero agli Astigiani « totam stratam crossam consuetam ire per pontem Padi Taurini » e libertà di prendere in Torino e territorio i loro nemici tranne i Milanesi, Vercellesi, Alessandrini, a patto che reciprocamente i Torinesi potessero prendere nell'Astigiana i nemici proprii, salvi i Pavesi, Tortonesi e Genovesi.

Abbiamo così nettamente distinti gli alleati delle parti contraenti, principali per noi fra queste, Asti e Torino.

Certo il comune di Chieri, minacciato da nemici così formidabili, dovette trovarsi in frangenti terribili, ma siccome in un lavoro della natura del presente non è possibile cercare i motivi

(1) *Codex Astensis Appendix*, IV, 35: Et specialiter teneantur comune et homines de Aste manutenere, adiuvare et defendere ecclesiam et comune et homines taurini et predictos cives et habitatores contra locum et homines de Cario et quod homines de Aste non possint nec debeant recipere in habitatores vel iuratos nec eciam in homines vel vassallos uuiversaliter nec singulariter, nisi aliquis eorum cum familia sua tota iret ad habitandum pro stallo facto perpetualiter et sine fraude in civitate Astensi vel taurinensi, nec se ullo modo reconciliari nec concordari cum predictis cariensibus ...,

Digitized by Google

che addensarono la bufera del 1232, così non possiamo neppure stabilir ora gli effetti che ne seguirono, giacchè sarebbe bisogno di ben più lunghe ricerche, che non possa permettere una breve prefazione ad un documento che si pubblica.

La storia Chierese, per quel che riguarda le relazioni esterne del Comune per il periodo 1232-38, è oscura assai (1), ma a

(1) Il Cibrario, nella celebre collezione di documenti che pubblica nel 2° volume *Delle Storie di Chieri*, non ha riportato documento alcuno per il periodo 1233-1237; nel vol. I dell'opera stessa (p. 113-114) ricorda però un atto di dedizione verso il comune fatta dai signori di Baldissoto, Marentino, Montaldo e Pavarolo nel 1235. — Forse questo documento ci fornirà campo per alcune congetture che possono interessare la nostra questione. L'illustre Quintino Sella nella *Memoria* del t. I, p. 181-82 del *Codex Astensis* cercò di portar qualche luce sull'argomento, ma, privo di nuovi aiuti, dovette solo contentarsi di supposizioni appoggiandosi a un documento ricordato dal Cibrario nella *Storia della Monarchia di Savoia* II, 13, 16 (Torino, Fontana 1841, edito poi dal medesimo autore nella *Storia di Torino*, I, in appendice p. 506). Si tratta della pace che nel 18 novembre 1235 il conte di Savoia Amedeo IV, in lotta col comune e col vescovo di Torino e con Pinerolo, concludeva coi suoi avversari, nella quale vediam Pinerolo tener salvi, fra gli altri suoi alleati, gli astigiani, dalla qual clausola il Sella vorrebbe dedurre che rimanessero ancor salde le alleanze del 1232 e che quindi « Asti e Chieri continuassero a trovarsi in campi opposti » (SELLA, *Memoria*, ecc. 181). Ce ne fa però invece dubitare il documento, pur del 1235, che più su citammo e che ebbi agio di studiare in grazia della cortesia dell'egregio signor Barone Gaudenzio Claretta, a cui rendo i ringraziamenti più vivi e sinceri che per me si possano, il quale nella sua ricchissima biblioteca conserva alcuni dei volumi che componevano la famosa raccolta Montalenti (Cfr. CIBRARIO, *Delle Storie di Chieri* II, p. XI-XII). Il documento in questione è inserto appunto nel t. II della suddetta raccolta, fra i *Documenti Cheriesi* a pag. 474-75, e fu estratto dal preziosissimo *Libro Rosso* di Chieri, fol. LII (Arch. di Chieri, sala 2ª, cartella 7ª, v. Inventario generale, art. 5). Confrontando la copia Montalenti col documento quale ci è presentato dal Libro Rosso, dovemmo constatare la diligenza di quella; la lezione però che noi presentiamo segue in generale quella del Libro Rosso, monumento importantissimo per la storia chierese, di cui volontieri rinfreschiamo la memoria, anche per ricordare i tesori preziosi racchiusi nell'archivio di Chieri, che grazie alla solerzia e diligenza del ch. Segretario capo della Città, sig. Carlo Benazzi, si va ordinando in modo da potersi mettere al paragone coi migliori archivi piemontesi. Nel 1235, luglio 31, in Chieri, nella Chiesa di S. Guglielmo, 22 consignori di Baldissoto, Marentino, Montaldo e Pavarolo giurano la cittadinanza chierese, e fra i patti che si stabiliscono, è pure incluso che i detti signori « facient pacem et guerram tamen pro comuni Carii de eorum oppidis et villis pro se et suos homines de Pavayrolio, et Montaldo, et Marentino contra quamlibet personam et terram, exceptis dnis suis videlicet Episcopo Taurinensi et Preposito Tau-

Digitized by Google

noi basta il notare che dopo il colpo terribile del 1232, per certo, come congetturammo in nota, se si scongiurò la collera

rinensi et proposito Cariensi, et de Baldisseto contra omnem hominem legaliter nullo excepto ». Ora il Cibrario stesso nel tomo I, p. 114 *Delle Storie di Chieri* ci avverte che due di questi feudi cioè Pavarolo e Montaldo erano dipendenti dal vescovo di Torino, e il fatto stesso che i signori di Pavarolo e Montaldo non son tenuti a combattere contro il loro « dominum » cioè il vescovo e il preposito torinese, ci assicura in questa opinione. La dedizione loro acquista quindi per noi una certa importanza, giacchè il veder uomini che posseggono feudi dipendenti dal vescovo di Torino, porsi sotto la protezione di Chieri, e giurarne l'amicizia e la cittadinanza ci farebbe arguire che i due nemici implacabili cioè Chieri e il vescovo di Torino fossero sempre in campi opposti e nel tempo stesso che Chieri non si trovasse più in condizioni così terribili come nel 1232. — Forse eransi mutate le relazioni del nostro comune con Asti, giacchè in questo medesimo atto di dedizione del 1235 leggiamo che il podestà « in plena credencia, consensu et voluntate ipsius credencie ipsius nomine comunis (Carii) et comune convenit.... quod ipsum comune guarreabit et defendet ipsos dnos et eorum poderium contra quamlibet personam et comune, salvo comune Astensi ». — Il passo fu già studiato da Iacopo Durandi (*Saggio sulla lega lombarda, ecc.*, p. 144 in *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XL, Torino, 1838), il quale da questo brano arguiva come Chieri avesse scosso la dipendenza feudale del vescovo di Torino, osservando che nel patto concluso non faceva per questo nessuna eccezione. E da ciò noi possiamo ancor una volta supporre che i due antichi avversari si trovassero piuttosto in urto che in buona armonia anche imposta e forzata. Diversa certo era la posizione di Chieri verso Asti giacchè essa è espressamente esclusa da quelli contro cui il comune deve portare le armi in favore dei nuovi amici. Questa esclusione ci dimostrerebbe piuttosto buone le relazioni fra le due città, la qual congettura ci è ancor confermata dal passo seguente pure del documento che studiamo: « Item si praedicti dni vel aliquis eorum facerent aliquod gravamen vel molestiam versus aliquem vel aliquos qui non sint de Cario, vel eorum jurisdictione, *vel de Ast et eius poderio*, et nollent facere racionem coram potestate Carii, vel si nollent satisfacere vel restituere pro comuni Carii rem ablatam, quod comune Carii non teneatur eos iuvare, inde nec cogere ut restituant. » (Racc. Montalenti, *Docum. Cher.*, II, 475; *Libro Rosso*, ecc., loc. cit.). Chieri ed Asti sono poste al livello medesimo e nella medesima considerazione e questo fatto ci farebbe dubitare assai fortemente, anzi credere che quegli antichi patti del 1232 non fossero più nel loro vigore per le relazioni fra i due comuni, i quali si trovassero anzi in buoni rapporti. Non è noto neppure con sicurezza quali fossero le relazioni in questo tempo fra Asti e Torino, ma il Sella (*Memoria*, ecc. I, 105) dubita che fossero alquanto fredde. Ad ogni modo, se pur restavano in teoria le alleanze del 1232, come ci mostrerebbe il documento del 18 novembre 1235, in questo medesimo anno dovevano in pratica essere state scosse assai, e forse tanto che Asti, la protettrice della Chiesa torinese, non dovea sdegnare di guardar benignamente Chieri, contro

Digitized by Google

minacciosa di Asti, non potè egualmente placarsi il vivissimo desiderio della Chiesa Torinese che sempre vedemmo tentar di assoggettarsi la perpetua ribelle.

Nel 1238 giungeva nelle terre subalpine Federico II, al quale anche Torino si piegava accettando la persona che l'imperatore le imponeva a governarla (1), e certo Chieri dovette salutar con gioia l'arrivo di chi poteva offrirgli scampo contro le sciagure continue che lo minacciavano. E il diploma che nel 1238 Federico II concedeva a Chieri forse era effetto di una lunga serie di cause, fra le quali non ultima probabilmente la lega del 1232, che aveva mostrato al nostro Comune, pericoli che si sarebbero ancor potuto rinnovare quando che sia. In questo senso si possono avvicinare anche nello spirito, diremo così, come s'avvicinano nella forma, i tre diplomi imperiali del 1238 per Cuneo, Savigliano e Chieri. Cuneo e Savigliano nella protezione imperiale cercarono rifugio contro Asti e contro i signori feudali minacciosi; Chieri cercava pure scampo contro un nemico assai più implacabile, fattosi formidabile nel 1232 per l'appoggio di Asti. E se poi quest'ultima s'era o portata con molta rilassatezza, o anche, svogliata e stanca della lega e degli impegni presi, aveva tutto dimenticato, poteva pur sempre farsi minacciosa e riprendere sul serio quelle armi che, impugnate nel 1232, aveva poi, come pare, lasciate ricadere.

Il documento del 1238 per Chieri basterebbe da solo a farci dubitare che più gravi fossero le condizioni, o almeno più ampie le offerte all'imperatore da parte del Comune supplicante che non quelle di Cuneo e Savigliano. I tre diplomi invero si corrispondono in massima parte, in fondo anzi sono identici, ma senza fallo si accostano più strettamente i diplomi per Cuneo e Savigliano, mentre in certe parti resta isolato quello per Chieri.

Le concessioni che Federico II faceva a Cuneo e Savigliano

---

cui aveva stretto patti sì terribili. Mi sarebbe impossibile precisare di più queste congetture, le quali ci fan lecito il conchiudere che forse il vescovo di Torino non doveva aver smesso mai le antiche pretensioni, le quali forse poi hanno spinto il comune chierese a cercar valida protezione nell'impero, mentre Asti, lasciato nel 1238 per un momento in disparte, indispettito quasi dei favori che l'Imperatore ad altri accordava di preferenza, non lo avrebbe potuto sostenere, se pur tanta speranza mai poterono accogliere i Chieresi rispetto al loro potente vicino.

(1) Cibrario, *Storia di Torino*, I, 230.

Digitized by Google

si possono riassumere in questa forma: gli uomini di questi due comuni, esponendo le oppressioni ed i gravami a cui andavan soggetti per causa di lor vicini che cercavano sopraffarli, pregano l'imperatore di riceverli sotto la protezione sua e dell'impero, offrendo perciò e il luogo stesso, il mero e misto impero, la giurisdizione, i pedaggi e qualunque lor cosa, nelle mani imperiali. Mosso questi dalle lor preghiere, riceve e gli uomini e il comune sotto la special sua protezione, confermando loro tutte le buone usanze e approvate consuetudini, di cui avevano per l'addietro goduto, concedendo loro che « non nisi in curia nostra uel legatorum nostrorum aut capitanei nostri qui loco ipsi pro tempore de mandato nostro prefuerit tam in criminalibus quam ciuilibus causis conueniantur ad iusticiam faciendam » (1), e che il « legatus et ordinatus » imperiale si attenga nelle cause civili a quelle pene che fin allora si solevano adoperare. E perchè nessuno più ardisse far contro i protetti dell'impero, a danno delle presenti concessioni, colpivasi di multa chiunque osasse in alcun modo contravvenirvi.

Le offerte ampie riferite per Savigliano e Cuneo eransi pur ripetute da parte degli uomini di Chieri, ai quali l'imperatore concede egualmente la propria protezione « sub nostra et imperii protectione recepimus », ma di più « locum eundem nostram specialem cameram reputantes et eximentes habitatores eiusdem ab omni alterius dominio et iurisditione cui hactenus tenebantur » (2). Conferma pure ai Chieresi le concessioni fatte a Cuneo e Savigliano aggiungendo che « capitaneo autem vel nuncio nostro quod ibidem statutum fuerit, volumus per curiam nostram in salario provideri ». Son questi i due punti in cui è più spiccata la differenza fra il diploma per Chieri e i due diplomi Cuneo-Savigliano, chè delle discrepanze minori di forma non è per noi il caso di occuparci, bastandoci così aver fatto notare la differenza di posizione che occupava nella storia piemontese in quel momento il comune di Chieri, rispetto agli altri due comuni pur favoriti dall'impero (3).

---

(1) Cfr. Diploma imperiale per Cuneo, edito in fine al presente lavoro, e diploma per Savigliano in TURLETTI, *St. di Savigliano*, IV, 82.

(2) CIBRARIO, *Delle Storie di Chieri*, II, 101. Non pare sia evidente l'allusione ai diritti che su Chieri pretendeva il vescovo di Torino, a cui in tal modo il comune sottraevasi totalmente?

(3) Potrebbe concorrere a spiegarci questa condizione di cose singolare il

Digitized by Google

***

Il diploma per Chieri fu edito dal Cibrario (1) il quale lo estrasse « e collectaneis rerum cheriensium Gabrielis Vischae iuris utriusque doctoris, vol. II, fol. 27 (2) » e secondo l'edizione procuratane dal Cibrario, fu ristampato dall'Huillard-Bréholles (3). Pure edito è il diploma per Savigliano pubblicato dapprima dallo Sclopis (4) che dice averlo dedotto dall'archivio civico di Savigliano senza determinar nulla di più; in secondo luogo fu compreso fra i documenti presentati dal Novellis (5) che usufruì « copia

---

numero relativamente grande di favori che Chieri ebbe in queste circostanze dall'imperatore. Ricordiamo: 1° Un diploma dato « apud Taurinum anno dominice incarnationis MCCXXXVIII, mense aprili, undecime indictionis » (CIBRARIO, *Delle Storie di Chieri*, II, 105, lo ricorda in nota; fu edito dal DURANDI, *Saggio sulla Lega Lomb.*, p. 144 in *Memorie dell'Accademia di Torino*, t. XL, e dall'HUILLARD-BRÉHOLLES, *Hist. diplom. Friderici Secundi*, V, 1, 197; Cfr. BÖHMER-FICKER, *Regesta Imperii*, V, nr. 2328), in cui l'imperatore assolve Chieri da ogni lega a cui fosse stata obbligata ad accostarsi; 2° Una lettera imperiale da Parma del 1238, novembre 26, in cui ripetesi quanto concedevasi nel diploma dell'aprile ingiungendosi ai Chieresi di non rispondere a niuno a cui potessero interessare quelle leghe senza speciale licenza dell'imperatore (CIBRARIO, *Delle Storie di Chieri*, II, 104; DURANDI, *Saggio sulla Lega Lombarda*, p. 145 in *Memorie dell'Accademia di Torino*, t. XL; HUILLARD-BRÉHOLLES. *Hist. diplom. Frider. Sec.* V, 1. p. 265; Cfr. BÖHMER-FICKER, *Regesta imperii*, V, n. 2407); 3° Diploma dell'agosto 1245, dato in Torino, in cui Federico sciolse nuovamente i Chieresi da leghe contratte anteriormente (CIBRARIO, *Delle Storie di Chieri*, II, 105 in nota; DURANDI, *Saggio sulla Lega Lombarda*, p. 148; HUILLARD-BRÉHOLLES, *Hist. dipl. Frider. Sec.*, VI, 339; Cfr. BÖHMER-FICKER, *Regesta imperii*, V, n. 3497).

(1) *Delle Storie di Chieri*, II, 101.

(2) Il 2° volume di questa raccolta (intorno a cui cfr. CIBRARIO, *St. di Chieri*, II, pag. IX-X) conservasi ora nella bibl. di S. M. in Torino, col titolo: *Monumenta Cheriensia* a 1221 ad 1520 M. S. n. 106, ma il fol. 27 in cui leggevasi il documento manca, come mancano pure molti fogli della raccolta.

(3) *Historia diplomatica Friderici Secundi*, V, I, pag. 177; cfr. BÖHMER-FICKER, *Regesta imperii*, V, I, nr. 2321.

(4) *Storia dell'antica legislazione del Piemonte*, Torino, Bocca, 1833, p. 200.

(5) *Storia di Savigliano e dell'abbazia di S. Pietro*, Torino, Favale, 1844, p. 384, doc. nr. 14. All'ediz. del Novellis, rimanda l'HUILLARD-BRÉHOLLES, *loc. cit.*, V, 178. BÖHMER-FICKER, *Regesta imperii*, V, I, nr. 2322, rimandano al Novellis e all'Huillard-Bréholles.

Digitized by Google

autenticata da tre notai del secolo XIV [forse XVI, come vedremo, e arguiremo da indicazioni del Turletti], esistente nei civici archivi di Savigliano », ed infine dal Turletti (1) che cita come fonte l'archivio civico (di Savigliano), div. II, categ. *Privilegi*, dove la trovò « su grande pergamena forte, in carattere romano, per copia del 1526 circa autenticata da tre notai ». Le differenze fra le tre edizioni del diploma di Federico II in favore di Savigliano sono minime e possono spiegarsi benissimo attribuendo al modo di leggere dei tre editori quelle diverse lezioni che riscontriamo.

Il diploma per Cuneo invece è tuttora inedito, sicchè nè l'Huillard-Bréholles, nè il Böhmer nè il Ficker, nè il Winkelmann lo registrano; a rigor di termine però non puossi dire sconosciuto. Infatti il Turletti lo ricorda fuggevolmente in una nota (2) e dopo lui ampiamente lo riassunse il Merkel (3), anzi ne riportò lunghi brani, ed io devo appunto alla cortesia del carissimo amico, che per primo lo usufruì nei suoi studi, il piacere di rendere ora di pubblica ragione il documento che, se non ignoto, aspettava pur sempre chi se ne occupasse di proposito per licenziarlo per le stampe. E degna di quest'onore ci pare la copia che di questo diploma conservasi nell'archivio di Stato in Torino, tra le carte riferentesi a Cuneo, mazzo 1°, docum. n. 2. La medesima fu fatta estrarre dall'originale ed autenticare per ordine del marchese di Saluzzo Manfredi IV nel 14 luglio del 1300 nella città di Cuneo stessa. Sono 4 notai i quali assistono all'atto, il primo dei quali, Guglielmo « de gastaudo » copiò e ridusse in forma di pubblico istrumento il diploma imperiale, gli altri tre invece, ascoltata la lettura della copia e dell'originale, affermarono quello con questo concordare esattamente. — Siam avanti a copia assai antica e probabilmente anteriore a tutte le copie che gli editori dei diplomi per Chieri e Savigliano (4) hanno utiliz-

(1) *Storia di Savigliano*, IV, 82.

(2) *Storia di Savigliano*, I, p. 117, nota 1ª.

(3) *Un quarto di secolo*, ecc. p. 26-27.

(4) Il Visca, dalla cui Raccolta il Cibrario estrasse il documento per Chieri, è del sec. XVI. Il Turletti dedusse il diploma per Savigliano da copia del secolo XVI, e forse da quella stessa da cui il Novellis ne traeva l'edizione anteriore sebbene, probabilmente per isbaglio, questi attribuisca al sec. XIV la copia che usufruiva, mentre i particolari che ce ne riforniscе concordano con quelli datici dal Turletti per la copia del secolo XVI di cui egli si vale Nell'archivio di Chieri, come già al tempo del Cibrario, non conservasi più

Digitized by Google

zate, la quale inoltre ci è attestato espressamente dipendere in via diretta dall'originale (1).

Cuneo, marzo, 1238. L'imperatore Federico II prende il comune e gli uomini di Cuneo sotto la sua speciale protezione [Torino, *Archivio di Stato*, Carte di *Cuneo*, *mazzo* 1°, *docum*. *n*. 2].

[S. T.] Anno domini millesimo ccc°, indicione xiii^a^, die Iouis, xiiii° mensis Iulii, in castro Cunei, in thalamo illustris viri domini Manfredi marchionis Saluciarum, presentibus Ruffino de Brayda, Henrico de Brayda, Thoma de Uascho, Manfredo de Romagnano et tabellionibus infrascriptis testibus ad hec specialiter adhibitis et vocatis. Ad eternam rei memoriam retinendam, et ut presenti exemplo ac publico instrumento adhibeatur perhempniter plena fides, prefatus dominus Manfredus egregius marchio Saluciarum, precepit mihi Guillelmo de Gastaudo notario infrascripto quatenus autenticare et in publicam formam reddigere deberem quandam litteram roboratam sigillo pendenti in cuius sigilli arculo est ymago imperatoria cum diademate in capite et cruce in manu dextra et pomo rotundo in sinistra in cathedra sedens. Cuius littere tenor talis est: Fredericus Dei gracia romanorum imperator semper augustus Ierusalem et Sicilie rex. Fidelium nostrorum oppressionibus pie conpati cogimur et eorum grauamina prouide releuare. Inde est igitur quod constitutis in presentia maiestatis nostre hominibus Cunei fidelibus nostris et exponentibus oppressiones atque grauamina statu imperii uacillante dudum illata sibi a conuicinis suis et locis circumadiacentibus, que uiribus preminebant eisdem et ipsos sue iurisdicioni summitere nitebantur, iidem de recipiendis ipsis sub nostra et imperii protectione culmini nostro attentius supplicarunt, ut ad hoc clementiam nostram inclinare possent facilius, locum ipsum,

---

nè originale nè copia del diploma in questione, come mi avvisa il mio amico Prof. G. Tessiore, paziente e valoroso ricercatore delle antiche memorie chieresi, della cui gentilezza ho approfittato nelle mie indagini, e al quale rendo pubbliche grazie.

(1) Un fatto curioso a notarsi è che il notaio Guglielmo di Gastaudo nelle abbreviazioni di cui si servì nella sua copia, pare volesse arieggiare quelle in uso solitamente nei diplomi, e queste abbreviazioni compaiono pure nella formola della sottoscrizione. Gli altri tre notai differiscono per la scrittura notevolmente dal primo, e da lui pure si scostano per le abbreviazioni di cui si servono.

Digitized by Google

merum et mixtum imperium, iurisdicionem, pedagia et quicquid comune habuit hactenus, in manibus nostris et imperii precise ac liberaliter resignando. Nos itaque supplicationibus suis fauorabiliter inclinati, homines loci eiusdem et ipsum locum Cunei, cum omnibus pertinenciis suis sub nostra et imperii protectione recepimus speciali. Confirmauimus eis preterea omnes bonos usus et approbatas consuetudines quibus usque ad hec felicia tempora nostra usi fuisse noscuntur. Concedentes eisdem ut non nisi in curia nostra uel legatorum nostrorum aut capitanei nostri qui loco ipsi pro tempore de mandato nostro prefuerit tam in criminalibus quam ciuilibus causis conueniantur ad iustitiam faciendam. De habundantiori quoque gracia nostra concessimus eisdem fidelibus nostris ut legatus et ordinatus noster eiusdem loci contentus sit in ciuilibus causis illis penis, bannis et mulctis quas infligendas pro iniuriis, dampnis datis, conuitiis et hiis similibus hactenus statuerunt. Presentis igitur scripti auctoritate mandamus et firmiter inhibemus quatenus nulla omnino persona sit que predictos homines Cunei fideles nostros, contra presentis protectionis, concessionis et confirmationis nostre tenorem in predictis aut aliquo predictorum inquietare seu molestare presumat. Quod qui presumpserit, preter indignationem nostram, penam quinquaginta librarum auri se nouerit incursurum. Quarum medietatem camere nostre et reliquam medietatem eisdem fidelibus nostris uolumus applicari. Ad huius protectionis, concessionis et confirmationis nostre memoriam et robur perpetuo ualiturum presens scriptum fieri et sigillo maiestatis nostre iussimus comuniri. Phs. (1).

Datum apud Cuneum, anno dominice incarnationis millesimo, cc° triceximo octauo, mense marcii (2), vndecime indictionis.

---

(1) A proposito di questo segno ricordiamo le parole del Cibrario (*St. di Chieri*, II, 105, nota) circa l'altro diploma di Federico II pure per Chieri dato a Torino nell'agosto del 1245 di cui già facemmo menzione, il cui originale (conservato nell'Archivio di Chieri, Sala seconda, cartella 16 col titolo: Diritti, Redditi, Ragioni e Privilegi, Esenzioni in genere, 1245 a 1493). è munito della sottoscrizione imperiale in questa forma: phs. Jacopo Durandi nell'edizione del diploma (*Saggio*, ecc. p. 148-9) non fa menzione e tanto meno esplica questo segno; l'Huillard-Bréholles (*Hist. Diplom. Frider. Secundi*, VI, 1, 339-40) riproducendo il documento vi aggiunge: « Et infra eodem charactere scribitur: *Philippus* ».

(2) Il Turletti, (*St. di Savigliano*, IV, 82) assegna al documento per Savigliano la data 8-11 marzo, e nella nota ne dà la seguente ragione: « perchè

Digitized by Google

Et ego Guillelmus de Gastaudo notarius hanc cartam autentici ad instantiam dicti domini marchionis scripsi et in publicam formam instrumenti redegi. [S. L.].

[S. T.] Et ego Guillelmus laurus (1) de Carmagnolia imperiali auctoritate notarius predictis interfui et hanc cartam ad autenticum ascultaui et quia concordare inueni, signum meum supra apposui vnaa (*sic*) cum suprascripto et infrascriptis notariis, et in testimonium me subscripsi.

---

negli inventari civici (di Savigliano) trovasi due volte coll'11 ed una coll'VIII marzo, e l'antica cronaca di Pedona ci dice che Federico II « confirmavit abbati Ottoni in Cuneo omnia iura abbacie S. Dalmatii anno MCCXXX.VIII. die XI mensis marcii », abbiamo perciò apposto al nostro (cioè al diploma per Savigliano) il termine medio 8-11 di quel mese. Se accettassimo la congettura del Turletti sarebbe da dubitarsi che la data approssimativa da lui ammessa per il diploma per Savigliano fosse ad un dipresso quella per il diploma in favore di Cuneo, dove sappiamo che Federico si fermò solo pochi giorni del mese di marzo. Io non posso discutere ora il primo degli argomenti addotti dal chiarissimo autore, giacchè ignoro quale autorità debba assegnarsi agli inventari degli archivi Saviglianesi. Riguardo al secondo degli argomenti sarebbe bisogno di assai maggiore discussione di quello che possasi permettere in una nota. Come ebbe la cortesia di farmi avvertito per lettera il medesimo Cav. Can. Turletti, egli desunse questo brano dell'antica cronaca di Pedona da un passo di Jacopo DURANDI (*Il Piemonte Cispadano antico*. Torino, Fontana, 1774, nota (*a*) p. 153), al quale sarebbero quindi da farsi rimontare le ricerche. Il Durandi si introduce a parlar di questa cronaca in tale forma: « di questa estinta città (Pedona) e dell'antico suo monistero molte cose parimente si leggono nell'inedita antica cronaca di Pedona, altresì citata da Jacopo Berardenco nelle sue memorie », ecc. Il ms. di Jacopo Berardenco era quello a cui attingeva a sì larga mano il MEYRANESIO (Cfr. M. H. P., SS. III in prefazione a « Fragmenta Chronicae antiquae civitatis Pedonae) e quindi trattandosi di fonte così sospetta non ci sentiamo in grado, senza studi speciali, di pronunciare un giudizio sul valore della notizia che il Durandi ci conserva. — Anche GIOFFREDO DELLA CHIESA nella *Cronaca di Saluzzo* (M. H. P., SS. III, col. 901) ci ricorda « otto abbate de san Dalmacio » che « vene fare la fidelita » all'imperatore, ma non ci parla di diplomi concessigli, e non ci presenta altra determinazione cronologica oltre l'anno 1238. Per queste ragioni ci sia lecito tralasciare di determinar il giorno del marzo in cui il diploma per Cuneo fu concesso, giacchè finora non è ben noto neppure in quali giorni del mese di marzo siasi l'imperatore fermato in Cuneo (Cfr. MERKEL, *Un quarto di secolo* ecc., p. 25; BÖHMER-FICKER, *Regesta Imperii* V, I, loc. cit., non fissano il giorno del mese di marzo del 1238 in cui furono dati i diplomi per Chieri e Savigliano).

(1) La copia ci presenta laur̄ che il MERKEL (*op. cit.* p. 27 nota 1[a]) interpreta invece *laurencius*.

Digitized by Google

[S. T.] Et ego Francischus de Suauis notarius plubicus (*sic*) vnaa (*sic*) cum suprascriptis et infrascripto notario hoc exemplum ad autenticum ascultaui et quia utrumque concordare inueni, signum meum aposui et in testimonium me subscripsi.

[S. T.] Et ego Villelmus lombardus imperiali auctoritate notarius publicus vnaa (*sic*) cum suprascritis notariis hoc exemplum ad autenticum ascultaui, et quia vtrumque concordare inueni, signum meum apposui et in testimonium me subscripsi.

RELAZIONE della Commissione incaricata di esaminare il lavoro presentato da G. SFORZA, col titolo: *Castruccio Castracani degli Antelminelli e gli altri Lucchesi di parte Bianca in esiglio* (1300-1314).

Il ch. sig. Giovanni Sforza, direttore del R. Archivio di Stato in Massa Carrara, compilò una monografia, di molto valore, collo scrivere la storia dei Bianchi Lucchesi, esuli dalla propria patria. La storia delle fazioni di Toscana non è conosciuta, come lo dovrebbe essere, e gli studi che intorno ad essa si vanno facendo in questi ultimi tempi dimostrano quanto vi sia ancora da fare, per mettere in piena luce questo argomento, quanto scabroso altrettanto importante.

Abbiamo veduto non ha molto che le vicende delle fazioni Pistoiesi vennero poste in nuova luce dal Prof. Zdekauer, e anche nell'anno corrente il Prof. Professione potè in modo inatteso illuminare quella strana figura che fu Vanni Fucci. Il Fucci appartenne alla parte Nera di Lucca; ed è bene che ora lo Sforza abbia tratteggiato le figure dei Bianchi lucchesi, e quella specialmente di Castruccio degli Antelminelli, che si può considerare come il primo tra i Bianchi.

Il lavoro dello Sforza si divide in quattro capitoli. Nel primo si descrive l'origine e lo sviluppo delle fazioni dei Bianchi e dei Neri a Lucca, a partire dal cadere del XIII secolo, e si discorre dell'esiglio al quale i Bianchi furono dannati dai Neri. Nel capitolo II parlasi dei primi tempi dell'esiglio dei Bianchi e spe-

cialmente della parte che essi presero alla difesa di Pistoia. Secondo lo Sforza, i Bianchi Lucchesi erano più schiettamente ghibellini, che non lo fossero quei di Firenze; e quindi si spiega come assai volentieri offrisse loro ospitalità cordiale e generosa la città di Pisa, che costituiva il centro del ghibellinismo in Toscana. Duravano fierissime le lotte tra fazione e fazione, quando calò in Italia Enrico VII, proclamando di voler rimettere armonia tra i discordanti. Lo Sforza dopo aver parlato della vita dei Bianchi in Pisa nel capitolo III, discorre nel IV ed ultimo delle relazioni loro coi fatti che caratterizzano la spedizione italica di Enrico VII; tien parola degli sforzi fatti da essi per rimetter piede in Lucca, e finalmente del loro ritorno in quella città. Quando furono restituiti in Lucca, in seguito alla pace stipulata tra Pisa e Lucca, quei Bianchi rimpatriarono non per vivervi pacificamente, sibbene per consegnare la città in balìa di Uguccione della Faggiuola.

Il volume si chiude con una serie di documenti inediti, desunti dagli archivi di Lucca e di Pisa. Alcuni di essi riguardano fatti minuti e interessi privati; ma anche questi hanno molto valore, poichè chiariscono la vita quotidiana dei Bianchi durante l'esiglio, e spiegano le difficoltà tra cui si trovarono.

Quindi la Commissione, cui l'Accademia ha dato l'onorevole incarico di prendere in esame il lavoro dell'egregio signor Sforza, reputa proporne la lettura.

Torino, 10 Giugno 1891.

ANTONIO MANNO
E. FERRERO
CARLO CIPOLLA, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
ERMANNO FERRERO.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

E

OPERE ACQUISTATE PER LA SUA BIBLIOTECA

Dal 31 Maggio al 21 Giugno 1891

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

NB. Le pubblicazioni notate con un asterisco si hanno in cambio; quelle notate con due asterischi si comprano; quelle senza asterisco si ricevono in dono

	Donatori
* *Le Stazioni sperimentali agrarie italiane*, ecc. — Organo delle Stazioni agrarie e dei Laboratorii di Chimica agraria del Regno, pubblicato sotto gli auspici del Ministero d'Agricoltura, ecc., diretto dal Prof. Ing. M. Zecchini; vol. XX, fasc. 4. Asti, 1891; in-8° gr.	R. Stazione enologica sperim. d'Asti.
* Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia; vol. XII, 1889. Batavia, 1890; in-4°.	Osservatorio di Batavia
Abhandlungen der k. Preussischen geologischen Landesanstalt; neue Folge Heft 3 — Die Foraminiferen der Aachener Kreide; von Ignaz Beissel, etc. Berlin, 1891; in-8° gr.	Berlino * *
— Atlas zu den Abhandlungen der k. Preussischen geologischen Landesanstalt; neue Folge, Heft 3. Berlin, 1891; in-4°.	Id.
* Bullettino delle Scienze mediche pubblicato per cura della Società Medico-chirurgica e della Scuola medica di Bologna, ecc.; serie 7ª, vol. II, fasc. 4. Bologna, 1891; in-8°.	Società Med.-chirurg. di Bologna.
Journal of Morphology, edited by C. O. Whitman, etc.; vol. IV, n. 3. Boston, 1891; in-8° gr.	Boston. * *

Digitized by Google

Soc. scientifica Argentina (Buenos Ayres). * Anales de la Sociedad cientifica Argentina, etc.; t. XXXI, entrega 5. Buenos Ayres, 1891; in-8°.

Accad. Gioenia di Catania. * Bullettino mensile dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, ecc.; nuova serie, fasc. 18-19. Catania, 1891; in-8°.

Società nazionale delle Scienze di Cherbourg. * Mémoires de la Société nationale de Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg, etc.; t. XXVI (3e série, t. VI) Cherbourg, 1889; in-8°.

La Direzione (Coimbra). Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira; vol. X, n. 2. Coimbra, 1891; in-8°.

Acc. delle Scienze di Cracovia. * Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie; — Comptes-rendus des séances de l'année 1891; Avril. Cracovie; in-8°.

R. Acc. Irlandese delle Scienze (Dublino). * The Transactions of the R. Irish Academy; vol. XIX, part 15: On curvilinear coordinates; by B. Williamson. Dublin, 1891; in-4°.

Museo Teyler (Harlem). * Archives du Musée Teyler; 2e série, vol. III, 5e partie. Harlem, 1890; in-8° gr.

R. Soc. Sassone delle Scienze (Lipsia). * Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Band XVII, n. 3, 4. Leipzig, 1891; in-8° gr.

Id. — Berichte über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft, etc., nat.-phys. Classe, 1891, I. Leipzig, 1891; in-8°.

Prof. J. V. Carus (Lipsia). * Zoologischer Anzeiger herausg. von Prof. J. V. Carus in Leipzig, etc.; XIV Jahrg. 1891; n. 364, 365. Leipzig, 1891; in-8°.

Commissione dei Lavori geol. del Portogallo (Lisbona). * Description de la Faune jurassique du Portugal; — Embranchement des Echinodermes, par P. De Loriol; 2 fasc. et dernier — Echinides irréguliers ou exocycliques. Lisbonne, 1890; in-4°.

Società Reale di Londra. * Proceedings of the R. Society of London; vol. XLIX, n. 299. London, 1891; in-8°.

Museo Britannico di Storia nat. (Londra). Catalogue of the Birds in the British Museum; vol. XIII, XIV, XV, XVIII, XIX. London, 1888-91; in-8°.

Id. — Catalogue of the Fossil Birds in the British Museum (Nat. History), etc. London, 1891; 1 vol. in-8°.

Id. — Catalogue of the Fossil Fishes in the British Museum (Nat. History), part II, etc. London, 1891; in-8°.

Digitized by Google

— Catalogue of the Fossil Cephalopoda in the British Museum (Nat. History), etc.; part II, etc. London, 1891; in-8°. — Museo Britannico di Storia nat. (Londra).

— Catalogue of British Hymenoptera in the British Museum; 2. edition, part I. London, 1891; in-8°. — Id.

* Monthly Notices of the R. astronomical Society of London; vol. LI, n. 7. London, 1891; in-8°. — R. Soc. astron. di Londra.

* Report of the sixtieth Meeting of the British Association for the advancement of Science, held at Leeds in September 1890. London, 1891; 1 vol. in-8°. — Assoc. Britannica per il progresso delle Scienze (Londra).

A guide to operations on the Brain, illustrated by forty-two life-size plates in autotype and two woodcuts in the text; by Alec FRASER. London, 1890; 1 vol. in-fol° gr. — Londra. * *

Popular Lectures and Adresses by Sir William THOMSON; vol. III; Navigation. London, 1891; in-8° picc. — Londra. * *

* Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften; XVII Band, 2 Heft. München, 1891; in-4°. — R. Acc. Bavarese delle Scienze (Monaco).

— Rerum cognoscere causas. — Ansprache des Präsidenten der k. bay. Akademie der Wiss.. Dr. Max v. PETTENKOFER, in den öffentlichen Festzitzung am 15 Nov. 1890. München, 1890; 1 fasc. in-4°. — Id.

* Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. bay. Ak. der Wiss., etc.; 1890, I-IV Heft. München, 1890; in-8°. — Id.

* Contribution to Canadian Palaeontology; vol. III (quarto). — On Vertebrata from the Tertiary and Cretaceous rocks of the North West Territory, by E. D. COPE. I — The Species from the Oligocene or Lower Miocene beds of the Cypress Hills. Montreal, 1891; in-4°. — Comit. geologico del Canadà (Montreal).

Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli; serie 1ª, vol. IV, fasc. 2 Napoli, 1890; in-8°. — Soc. dei Natur. di Napoli.

Fourth annual Report of the agricultural experimental Station of Nebraska. Lincoln, Nebraska, U. S. A., 1891; 1 vol. in-8°. — Staz. sper. agraria di Nebraska.

Bulletin of the agricultural experimental Station of Nebraska; vol. IV, n. 16. Lincoln, Nebraska, U. S. A., 1891; in-8°. — Id.

* The Journal of comparative Medicine and veterinary Archives, edit. by W. A, CONCKLIN, vol. XII, n. 5. New York, 1891; in-8°. — La Direzione. (Nuova York).

Digitized by Google

Governo francese (Parigi). Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences, et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique; 2e série, t. IX. Paris, 1891; in-4°.

Istit. di Francia (Parigi). * Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, etc.; t. CXI, 2e sem. 1890. Paris; in-4°.

Id. — Tables alphabétiques, etc. (Juillet-Décembre 1890); 1 fasc. in-4°.

Società geologica di Francia (Parigi). * Bulletin de la Société géologique de France, etc.; 3e série, t. XVI, 1890, n. 11; — t. XVIII, n. 1-8; — t. XIX, 1891, n. 1. Paris, 1890-91; in-8°.

Soc. Zoologica di Francia (Parigi). * Mémoires de la Société zoologiques de France pour l'année 1890; t. III, 2e, 3e et 4e parties, feuilles 7 à 25. Paris, 1890; in-8°.

Id. — Bulletin de la Société zoologique de France pour l'année 1890; t. XV, n. 3-9; pour l'année 1891, t. XVI, n. 1. Paris, 1890-91; in-8°.

Museo di St. nat. (Parigi). * Nouvelles Archives du Muséum d'Histoire naturelle, etc.; 3e série, t. II 1 fasc. Paris, 1890; in-4°.

Comitato intern. dei Pesi e Misure (Parigi). * Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publiés sous l'autorité du Comité international par le Directeur du Bureau; t. VII. Paris, 1890; in-4°.

Soc. filomatica di Parigi. Bulletin de la Société philomatique de Paris, etc.; 8e série, t. III, n. 1. Paris, 1891; in-8°.

La Direzione (Parigi). Annales des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx, etc, publiées par A. Gouguenheim; t. XVII, n. 5. Paris, 1891; in-8°.

Osser. di Polkowa (Pietroborgo). * Catalog von 5634 Sternen für die epoche 1875.0, aus den Beobachtungen am Pulkowaer Meridiankreise; Während der Jahre 1874-1880; von St. Romberg (Supplément III aux Observations de Pulkova). St-Petersburg, 1891; in-fol°.

Id. — Bericht für die Periode 1887 Mai 1 (13) bis 1889 Nov. 1 (13) dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte über deren Thätigkeit abgestattet vom Director der Sternwarte. St-Petersburg, 1890; 1 fasc. in-8°.

Società fisico-chimica di Pietroborgo. Journal de la Société physico-chimique russe - l'Université de St-Pétersbourg; t. XXIII, n. 4. St-Pétersbourg, 1891; in-8°.

Osservatorio di Rio Janeiro. * Revista do Observatorio — Publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro; anno VI, n. 4. Rio de Janeiro, 1891; in-4°.

Digitized by Google

Memoria della Società degli Spettroscopisti italiani, ecc.; vol. XX, disp. 4. Roma, 1891; in-4°. — Società degli Spettr. ital. (Roma).

* Rivista di Artiglieria e Genio; vol. II, Maggio 1891. Roma; in-8°. — La Direzione (Roma).

Bollettino della Società generale dei Viticultori italiani; anno VI, n. 9, 10-11. Roma, 1891; in 8° gr. — Soc. generale dei Viticolt. ital. (Roma).

* Bullettino della Commissione speciale d'Igiene del Municipio di Roma; anno XI, fasc. 7-12. Roma, 1890; in-8°. — Il Municipio di Roma.

* Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei; anno XLIV, Sessione III del 15 febbraio 1891. Roma; in-4°. — Acc. Pontificia dei Nuovi Lincei (Roma).

* Atti della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena; serie 4a, vol. III, fasc. 3-4. Siena, 1891; in-8° — R. Accademia dei Fisiocritici di Siena.

* Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, ecc.; anno LIV, n. 34. Torino, 1891; in 8°. — R. Acc. di Medic. di Torino.

* Rivista mensile del Club alpino italiano, ecc; vol. X, n. 5. Torino, 1891; in-8°. — Club alpino ital. (Torino).

* Transactions of the Canadian Institute; vol. 1, part 2. Toronto, 1891; in-8° gr. — Istit. Canadiano (Toronto).

— Fourth annual Report of the Canadian Institute (Session of 1890-91), being in Appendix to the Report of the Minister of Education, Ontario. Toronto, 1891; 1 fasc. in-8° gr. — Id.

Neptunia — Rivista mensile per gli studi di scienza pura ed applicata sul mare e suoi organismi, e Commentario generale per le alghe a seguito della *Notarisia;* Direttore Dott. D. Levi-Morenos; anno I, n. 4, 5. Venezia, 1891; in-8°. — La Direzione (Venezia)

Die Physiologie der Facettirten Augen von Krebsen und Insecten; eine Studie von Sigm. Exner, Prof. Physiologie an der Univ. in Wien. Wien, 1891; 1 vol. in-8°. — Venezia * *

Dates of publication of « Recherches sur les poissons fossiles », par L. Agassiz; by W. H. Brown. London, 1890; 1 fasc in-8°. — L'Autore.

Zifioidi fossili e il rostro di tiopolodonte della Farnesina presso Roma; Memoria del Prof. Giovanni Capellini. Bologna, 1891; 1 fasc. in-4°. — L'A.

Time Reckoning for the twendiet Century, by Sandford Fleming (from the Smithsonian Report for 1886). Washington, 1889; 1 fasc. in-8°. — L'A.

Digitized by Google

L'Autore. Versuche und Fragen zur Lehre von der Lymphbildung; von R. Heidenhain Bonn, 1891; 1 fasc. in-8°.

G. Perelli-M. Serbatoi e recipienti economici in tele impermeabili, brevettati nei principali Stati d'Europa e d'America; di Giuseppe Perelli-Minetti. Barletta, 1891; 1 fasc. in-8°.

Id. — Refrigeranti economici brevettati in Italia ed all'estero; di G. Perelli-Minetti. Barletta, 1891; 1 fasc. in-8°.

L'A. Sul metodo grafico nel calcolo delle ecclissi solari; Nota del Dott. Michele Rajna. Milano, 1891; 1 fasc. in-8°.

L'A. Cefalometria dei Modenesi moderni; Memoria del Dott. Paolo Riccardi. Modena, 1883; 1 fasc. in-4°.

Id. — Saggio di un Catalogo bibliografico antropologico italiano, compilato dal Dott. Paolo Riccardi (con cenni storici intorno all'Antropologia, e biografici intorno ad alcuni Antropologi italiani). Modena, 1883; 176 pag. in-8°.

Id — Statura e condizione sociale studiate nei Bolognesi contemporanei; Memoria del Dott. Paolo Riccardi. Firenze, 1885; 1 fasc. in-8°.

Id. — La grande apertura delle braccia in rapporto alla statura, studiata specialmente nei Bolognesi: Transunto da una Memoria del Dott. Paolo Riccardi. Bologna, 1886; 1 fasc. in-8°.

Id. — Crani e oggetti degli antichi Peruviani, appartenenti al Museo Civico di Modena e al Museo di Anatomia umana de la R. Università di Modena: — Viaggio intorno al globo de la *Vettor Pisani* sotto il comando del cav. Giuseppe Palumbo; Memorie del Dott. Paolo Riccardi. Firenze, 1868; 105 pag. in-8°.

Id. — Circonferenza toracica a statura studiate a seconda de l'età e del sesso in una serie di Bolognesi; Comunicazione preventiva del Dott. Paolo Riccardi. Pavia, 1887; 1 fasc. in-8°.

Id. — La statura nei Bolognesi contemporanei studiata in rapporto al sesso e a l'età; Memoria del Dott. Paolo Riccardi. Modena, 1887; 1 fasc. in-4°.

Id. — Contribuzione all'Antropologia del sordomutismo; Memoria del Dott. Paolo Riccardi. Firenze, 1889; 1 fasc. in-4°.

Id. — Di alcune correlazioni di sviluppo fra la statura umana e l'altezza del corpo seduto; Studio di antropometria del Dott. Prof. Paolo Riccardi. Modena, 1891; 1 fasc. in-4°.

Digitized by Google

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 14 al 28 Giugno 1891

	Donatori
* The american Journal of Philology, edit. by B. L. Gildersleeve, vol. XI, n. 2, 3. Baltimore, 1890; in-8°.	Università J. Hopkins (Baltimora).
Bulletin de la Société de Géographie commerciale de Bordeaux, etc.; XIV année, 2° série, n. 12. Bordeaux, 1891; in-8°.	Società di Geogr. comm. di Bordeaux.
* Proceedings of the american philosophical Society held at Philadelphia, etc.; vol. XXVIII, n. 134. Philadelphia, 1890; in-8°.	Società filosofica di Filadelfia.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze — Bollettino delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa; 1891, n. 131. Firenze, 1891; in-8° gr.	Bibl. nazionale di Firenze.
— Indice degli Atti amministrativi dei Comuni, delle Provincie, ecc.; pag. 129-152; in-8° gr.	Id.
* Bulletin de l'Institut national Genévois, etc.; t. XXX, Genève, 1890; in-8°.	Istituto nazionale di Ginevra
* Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig, 1890. Leipzig, 1891; in-8°.	Soc. di Geografia di Lipsia.
* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; serie 2ª, vol. XXIV, fasc. 10, 11 e 12. Milano, 1891; in-8°.	R. Istit. Lomb. (Milano).
* Compte-rendu des séances de la Commission centrale de la Société de Géographie, etc.; 1891, n. 12, 13, pag. 297-360. Paris, in-8°.	Soc. di Geografia (Parigi).
Revue géographique internationale, etc.; XVI année, n. 186, 187. Paris, 1891; in-4°.	La Direzione (Parigi).
* Revista trimestral do Istituto historico e geographico brazileiro, fundado no Rio de Janeiro; t. LIII (3° e 4° trim.). Rio de Janeiro, 1890; in-8°.	Ist. stor. e geogr. brasiliano di Rio Janeiro.
* Studi e documenti di Storia e Diritto; Pubblicazione periodica dell'Accademia di Conferenze storico-giuridiche, anno XII, fasc. 2. Roma, 1891; in-4°.	Accademia di Conferenze storico-giuridiche (Roma).
Annali di Statistica — Statistica industriale, fasc. XXX, — Notizie sulle condizioni industriali della Provincia di Foggia (Capitanata), con una carta industriale. Roma, 1890; in-8°.	Ministero di Agr. Ind. e Comm. (Roma).

Digitized by Google

Istituto di diritto romano (Roma). * Bullettino dell'Istituto di diritto romano pubblicato per cura del Segretario perpetuo Vittorio SCIALOJA; anno III, fasc. 5-6. Roma, 1891; in-8°.

Bibliot. nazionale Vitt. Emanuele (Roma). Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. — Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia; vol. VI, n. 5. Roma, 1891; in-8° gr.

G. CORA (Torino). * Cosmos — Comunicazioni sui progressi più recenti e notevoli della Geografia e delle scienze affini; del Prof. G. CORA; vol. X, n. 7. Torino, 1891; in-8° gr.

La Direzione (Valle di Pompei). Il Rosario e la Nuova Pompei, ecc; anno VIII, quad. 5. Valle di Pompei, 1891; in-8°.

Club alpino ital. Sez. Valsesia (Varallo). La Colonia tedesca di Alagna-Valsesia e il suo dialetto; opera postuma del Dott. Giov. GIORDANI, pubblicata per cura e a spese della Sezione Valsesiana del Club Alpino Italiano, col concorso di amici. Torino, 1891; 201 pag. in-8°.

R. Istit. Veneto (Venezia). * Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, (t. XXXVIII) serie 7ª, t. II, disp. 6ª. Venezia, 1891; in-8°.

Venezia * *. I diarii di Marino Sanuto, ecc.; t. XXXII, fasc. 139. Venezia, 1891; in-4°.

L'Autore. Istituzioni di diritto canonico ad uso delle Università; per l'Avv. Francesco P. CONTUZZI, Prof. nella R. Univ. di Napoli; vol. I, II. Napoli, 1885-86; in-8°.

Id. — La istituzione dei Consolati ed il diritto internazionale europeo nella sua applicazione in Oriente; per Francesco CONTUZZI, ecc. Napoli, 1885; 1 vol. in-8°.

Id. — Le leggi di composizione e decomposizione degli Stati attraverso i varii sistemi di Filosofia del diritto; per Francesco CONTUZZI, ecc.; vol. unico, 2ª edizione. Napoli, 1886; in-8°.

Id. — La loi sus les prérogatives du Souverain Pontife et du Saint Siège et sur les rapports de l'Etat avec l'Eglise, du 13 Mai 1871; Commentaire par F. P. CONTUZZI; 2ᵉ edit. Napoli, 1885; 1 vol. in-8°

L'A. Répertoire de titres et documents divers relatifs à l'ancien Comté de Genève et Genevois, analysés, traduits et annotés par François MUGNIER. Chambery, 1891; 1 in fasc. in-8°.

C. NIGRA. La Chioma di Berenice col testo latino di Catullo riscontrato sui codici; traduzione e commento di Costantino NIGRA. Milano, 1891; 1 vol. in-8°.

L'A. Vittorio POGGI — Contributo alla Storia genovese del secolo XV. Genova, 1891; 1 fasc. in-8°.

Digitized by Google

Pregiudizi e superstizioni del popolo Modenese: Contribuzione del Dott. Paolo Riccardi alla inchiesta intorno alle superstizioni e ai pregiudizi esistenti in Italia. Modena, 1856; 1 fasc. in-8°. — L'Autore.

— Id. id. Modena, 1891; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Intorno a due curiosi ornamenti personali in quarzo degli indigeni del Brasile; Comunicazione del Dott. P. Riccardi. Firenze, 1887; 1 fasc. in-8°. — Id.

Carlo Oreste Zuretti — L'iscrizione del vaso di Dressel. Torino, 1888; 1 fasc. in-8°. — L'A.

— Veronese non Modenese; pel codice A di Teognide. Torino, 1890; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Qui in antiquitate Euripidem poetae sint imitati: disseruit C. O. Zuretti. Augustae Taurinorum, MDCCCXC, 1 fasc. in-8. — Id.

— Scolii al *Pluto* ed alle *Rane* d'Aristofane; dal Codice Veneto 472, e dal Codice Cremonese 12229, L, 6, 28. Torino, 1890; 151 pag. in-8°. — Id.

— Studi di filologia greca: I. Appunti delle due *Elettre*; — II. Sull' *εἰ πρεσβυτέρῳ πολιτευτέον* di Plutarco e la sua fonte. Torino, 1891; 1 fasc. in-8°. — Id.

— Aristotele — La Costituzione di Atene tradotta. Torino, 1891; 1 fasc. in-8°. — Id.

Errata-Corrige.

Nell'*Elenco degli Accademici*, a pag. XII, dai Corrispondenti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Sezione di Matematica pura e Astronomia, va tolto il nome di Casorati (Felice), mancato ai vivi l'11 settembre 1890.

Pag. 441, lin. 12ª *Collegio di* leggi *Collegio*

Digitized by Google

INDICE

DEL VOLUME XXVI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
624 (5608) 20 VIII-91.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

☛ NB. *A questo fascicolo vanno unite le Tavole XI, XIII, XIV e XV relative alle Memorie dei sigg. Dott.* G. Cano, F. Sacco *e* G. B. Rizzo, *pubblicate nelle Dispense* 12ª, 13ª *e* 14ª.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

3

Digitized by Google